

УДК 532.59

© 1994 г. И. Б. БАХОЛДИН

## ВОЛНОВЫЕ СКАЧКИ В СРЕДАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ МОДИФИЦИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

Нелинейное уравнение Шредингера

$$A_t \pm iA_{xx} + i|A|^2A = 0$$

описывает огибающую периодических волн с медленно меняющимися параметрами на воде, в плазме, в нелинейной оптике [1]. Оно может применяться также для стационарных периодических волн (амплитуда волны и волновое число не зависят от времени, переменные  $t, x$  заменяются переменными горизонтальной системы координат на поверхности жидкости [2]). В данной работе исследуются свойства модифицированного уравнения Шредингера с производными третьего и более высоких порядков. Численно получены решения, описывающие переходные области между однородными волновыми состояниями. Если не рассматривать строение переходной области, протяженность которой растет со временем, то такие решения можно интерпретировать как скачки.

В работе [3] предложен нестрогий способ получения обобщения уравнения Шредингера путем разложения дисперсионного соотношения исследуемых волн в ряд Тейлора по степеням возмущений волнового числа  $\Delta k = k - k_0$  и построения соответствующего уравнения

$$A_t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^j A}{\partial x^j} + i \frac{\varepsilon^2}{\mu} |A|^2 A = 0, \quad c_j = \frac{(i\mu)^{j-1}}{j!} \frac{\partial \omega_0}{\partial k} \quad (0.1)$$

где  $\varepsilon, \mu$  — малые параметры, характеризующие нелинейность и дисперсию.

Наиболее простое обобщение — уравнение с третьей старшей производной — применяется, когда величина  $\partial^2 \omega_0 / \partial k^2$  близка к нулю. Тогда члены со второй и третьей производной, а также нелинейный член считаются одного порядка малости. Это уравнение было выведено для капиллярно-гравитационных волн на воде формальным способом [4]. В данной работе детально исследуются свойства и решения уравнения с третьей производной, исследуются также некоторые эффекты, возникающие при учете производных более высокого порядка. Последнее связано в основном с тем, что уравнения со второй и третьей производными дают решения с бесконечно протяженной зоной между однородными волновыми состояниями, что нефизично.

Уравнение (0.1) запишем в виде

$$A_t + \sum_{n=0}^{m_1} b_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} A}{\partial x^{2n+1}} + i \sum_{n=1}^{m_2} b_{2n} \frac{\partial^{2n} A}{\partial x^{2n}} + i|A|^2 A = 0 \quad (0.2)$$

Здесь коэффициент при нелинейном члене приравнен к единице путем соответствующего изменения масштаба величины  $A$ . Коэффициент  $b_1$  можно приравнять к нулю преобразованием  $x' = x - b_1 t$ , а  $b_2$  приравнять к  $\pm 1$  преобразованием  $x' = |b_2|^{-1/2} x$ . Ниже эти коэффициенты сохранены в большинстве выражений для общности.

1. Гидродинамическая форма уравнения. Подставим  $A = ae^{i\psi}$  в уравнение

(0.2), приравняем к нулю коэффициенты при  $e^{i\psi}$  и  $ie^{i\psi}$  [2]. Введем величину  $W = \psi_x$  и, поделив второе из получившихся уравнений на  $a$ , получим

$$a_t + b_1 a_x - b_2 (2a_x W + a W_x) + b_3 (a_{xxx} - 3a_x W^2 - 3a W W_x) + \\ + b_4 (-4a_{xxx} W - 6a_{xx} W_x - 2a_x W_{xx} + 6a W^2 W_x + 4a_x W^3 - a W_{xxx}) + \dots = 0 \quad (1.1)$$

$$W_t + \left[ b_1 W - b_2 \left( W^2 - \frac{a_{xx}}{a} \right) + b_3 \left( 3 \frac{a_{xx}}{a} W + 3 \frac{a_x}{a} W_x + W_{xx} - W^3 \right) + \right. \\ \left. + b_4 \left( \frac{a_{xxxx}}{a} - 6 \frac{a_{xx}}{a} W^2 - 12 \frac{a_x}{a} W W_x - 3W_x^2 + W^4 - 4W_{xx} W \right) + \dots + a^2 \right]_x = 0$$

Для уравнения с производными 1—4-го порядка и по индукции, по-видимому, для уравнений с более высокими порядками производных первое уравнение приводится к дивергентному виду домножением на  $a$

$$\frac{1}{2} (a^2)_t + \left[ \frac{1}{2} b_1 a^2 - b_2 a^2 W + b_3 (a a_{xx} - \frac{1}{2} a_x^2 - 3 \frac{1}{2} a^2 W^2) + b_4 (2a^2 W^3 - \right. \\ \left. - 4a a_{xx} W - 2a a_x W_x + 2a_x^2 W) \right]_x = 0 \quad (1.2)$$

Дивергентный вид может быть использован для анализа стационарных решений, поскольку позволяет один раз их проинтегрировать, а также для получения условий на скачках [5].

Для уравнения со второй старшей производной дивергентная система (1.1), (1.2) сходна с уравнениями Буссинеска с отрицательной дисперсией [2], поэтому эти уравнения можно назвать гидродинамической формой уравнения Шредингера. При учете производных третьего и более высоких порядков в этих уравнениях появляется несколько дисперсионных членов, а также нелинейные дисперсионно-диссипативные члены. Решения этих уравнений могут иметь волновой характер. Чтобы не возникало путаницы, в дальнейшем, если не оговорено иное, под волнами понимаются волны в гидродинамическом смысле.

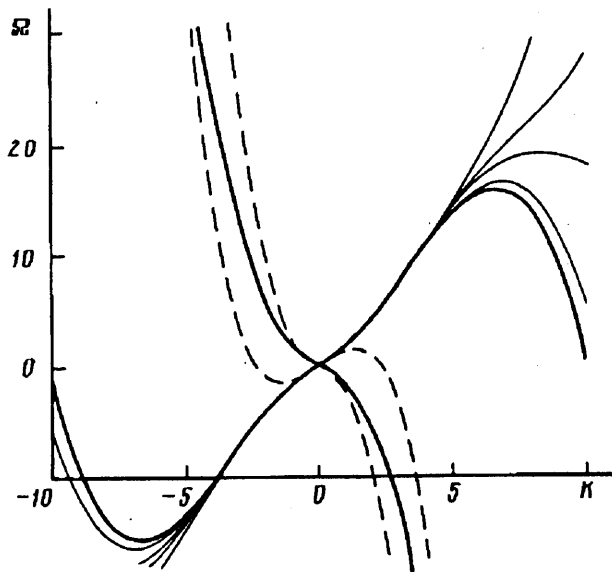
2. Дисперсионное соотношение для волн малых возмущений гидродинамической системы, эволюционность и устойчивость. Линеаризуем уравнения (1.1) относительно однородного состояния  $a = a_0 + a'$ ,  $W = W_0 + W'$ . Найдем дисперсионное соотношение для линеаризованных уравнений

$$a' = a_0' \exp [i (Kx - \Omega t)], \quad W' = W_0' \exp [i (Kx - \Omega t)]$$

$$\Omega = P_1(K) \pm K \sqrt{P_2(K)(2a_0^2 + P_2(K)K^2)}, \quad P_q = \sum_{j=1}^m b_j P_{q,j} \quad (2.1)$$

$j$	$N_1$	$N_2$	$P_{1,j}$	$P_{2,j}$
1	2	0	$K$	0
2	2	2	$-2W_0 K$	-1
3	2	4	$-K^3 - 3W_0^2 K$	$-3W_0$
4	4	4	$4W_0 K^3 + 4W_0^3 K$	$6W_0^2 + K^2$
5	6	4	$K^5 + 10K^3 W_0^2 + 5K W_0^4$	$5W_0 K^2 + 10W_0^3$
6	6	6	$6W_0 K^5 + (C_{1,6} K^3 + \dots) W_0^3$	$-K^4 + (C_{2,6} K^2 + \dots) W_0^3$
7	6	8	$K^7 + (C_{1,7} K^5 + \dots) W_0^2$	$-7W_0 K^4 + (C_{2,7} K^2 + \dots) W_0^3$

Выражения для  $P_{q,6}$ ,  $P_{q,7}$  выписаны по индукции,  $N_1, N_2$  — число граничных условий, которое нужно ставить при решении уравнений на некотором отрезке  $[x_1, x_2]$ . Это число определяется числом корней  $K(\Omega)$ , у которых  $\text{Im } \Omega \rightarrow +\infty$



Фиг. 1

при  $\text{Im } K \rightarrow \pm\infty$  [6]. Для уравнений с четными старшими производными наибольший порядок по  $K$  имеет в (2.1) член со знаком  $\pm$ , поэтому число граничных условий одинаково на обоих концах. Для уравнений с нечетными старшими производными наибольший порядок имеет  $P_1(K)$ , число граничных условий разное и зависит от знака  $b_m$ . Приведены  $N_1$  и  $N_2$  при  $b_m > 0$ , в противном случае величины  $N_1$  и  $N_2$  нужно поменять местами. Эволюционность уравнений, по Петровскому, обеспечивается тем, что для действительных и достаточно больших по модулю значений  $K$  подкоренное выражение положительно, т. е.  $\text{Im } \Omega = 0$ .

Если при некотором действительном  $K$  подкоренное выражение отрицательно, то однородное состояние неустойчиво (по крайней мере в линейном случае). Для уравнения со второй старшей производной однородные состояния неустойчивы при  $b_2 > 0$  относительно возмущений, у которых  $|K| < a_0 (2b_2)^{1/2}$ . Известно, что с учетом нелинейных эффектов эта неустойчивость приводит к распаду однородного состояния на солитоны (солитоны огибающей в терминах волновой формы уравнения Шредингера) [1]. Для уравнения со старшей третьей производной однородные состояния неустойчивы при  $b_2 + 3b_3 W_0 > 0$  относительно возмущений, у которых  $|K| < a_0 [2(b_2 + 3b_3 W_0)]^{1/2}$ .

Члены, порождаемые в полиноме  $P_2$  четной и нечетной производными, имеют одинаковый порядок по  $K$ , поэтому их целесообразно исследовать парами (2,3), (4,5), (6,7), ... Отметим наиболее простые признаки неустойчивости: 1) старший член в полиноме  $P_2$  отрицателен:  $[b_{2n} + b_{2n+1} (2n+1) W_0] (-1)^n < 0$ ,  $n = m_1$ ; 2) старший и младший члены в полиноме  $P_2$  имеют разные знаки:  $(b_2 + 3b_3 W_0) [b_{2n} + b_{2n+1} (2n+1) W_0] (-1)^n > 0$ .

Для уравнения со старшей третьей производной при  $b_1 = 0$ ,  $b_2 < 0$ ,  $b_3 > 0$  дисперсионная кривая состоит из двух ветвей, одна из которых в окрестности начала координат напоминает перевернутую букву  $N$ , другая один раз пересекает первую ветвь в начале координат (см. фиг. 1, жирные линии). Для модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза с положительными коэффициентами при третьей и пятой производной [7, 8] дисперсионная кривая выглядит аналогично  $N$ -образной ветви. Нелинейный член во втором из уравнений (1.3) такой же,

как и в уравнении Кортвега — де Вриза, поэтому можно ожидать появления нелинейных эффектов, аналогичных исследованным в [7, 8].

Дисперсионное соотношение (2.1) было исследовано на наличие трехволновых резонансов  $K_3 = K_1 + K_2$ ,  $\Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2$ . Численно было установлено, что существует  $K_*$ , такое, что для любого  $K_1$ ,  $|K_1| < K_*$ , найдутся  $(K_2, \Omega_2)$ ,  $(K_3, \Omega_3)$ , удовлетворяющие условиям резонанса, при этом  $(K_q, \Omega_q)$ ,  $q = 1 - 3$ , лежат на N-образной ветви. Найден также резонанс другого типа. Для любой точки  $(K_1, \Omega_1)$ , лежащей на N-образной ветви, найдется точка  $(K_2, \Omega_2)$ , лежащая на другой ветви, и точка  $(K_3, \Omega_3)$ , лежащая на N-образной ветви. Для обоих типов резонансов можно выделить особые случаи  $K_1 = K_2 = K$ ,  $K_3 = 2K$ , аналогичные резонансам, исследованным в [8]. Учет высших производных может дать дополнительные виды резонансов.

3. Уравнения волн с медленно меняющимися параметрами. Отбросим в уравнениях (1.2), (1.4) старшие производные, сделав подстановку  $T = vt$ ,  $X = vx$ , где  $v$  — малый параметр

$$(a^2)_T + (b_1 a^2 - 2b_2 a^2 W - 3b_3 a^2 W^2 + 4b_4 a^2 W)_X = 0 \quad (3.1)$$

$$W_T + (b_1 W - b_2 W^2 - b_3 W^3 + b_4 W^4 + a^2)_X = 0$$

Дисперсионное соотношение для малых возмущений однородного состояния системы (3.1) получим из (2.1), оставив только линейные по  $K$  члены

$$\Omega = K [b_1 - 2b_2 W_0 - 3b_3 W_0^2 + 4b_4 W_0^3 \pm a_0 \sqrt{2(-b_2 - 3b_3 W_0 + 6b_4 W_0^2)}]. \quad (3.2)$$

Если подкоренное выражение положительно, то система (3.1) — гиперболического типа, характеристические скорости  $v_{\pm} = \Omega/K$ .

По индукции легко выписать линейные члены и для уравнений с производными более высокого порядка. Целый множитель при  $b_j$  в подкоренном выражении соотношения (3.2) равен сумме арифметической прогрессии  $j(j-1)/2$ , остальные закономерности очевидны.

Для удобства сопоставления с другими работами введем в уравнении (0.2) и соответственно в (3.1) коэффициент 2 при производных по времени, тогда из уравнений (3.1) при  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -1$ ,  $b_3 = 0$ ,  $b_4 = 1/6$  можно вывести систему уравнений нелинейной геометрической оптики [5] для стационарных периодических волн, заменив  $T$ ,  $X$ ,  $W$  на  $X$ ,  $Y$ ,  $\alpha$ ;  $\alpha$  — угол между нормалью к фронту и осью  $x$ ,  $V$  — скорость волны

$$\frac{\partial}{\partial X} (a^2 \cos \alpha) + \frac{\partial}{\partial Y} (a^2 \sin \alpha) = 0, \quad \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \frac{\sin \alpha}{V} - \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\cos \alpha}{V} = 0, \quad \sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4), \quad \frac{1}{V} = 1 - a + O(a^2)$$

При выводе делалась подстановка  $\alpha$  из первого приближения уравнений в предположении, что  $a = o(\alpha^2)$ . Ранее [9] эти уравнения были выведены при  $b_4 = 0$ ,  $a = O(\alpha)$  в первом приближении. Следующими приближениями к уравнению Шредингера со второй производной в теории стационарных периодических волн могут быть уравнения с четвертой производной, а также уравнения с четными производными более высокого порядка. Знаки при коэф-

фициентах при этих производных чередуются таким образом, что однородные состояния устойчивы (см. разд. 2).

4. Волновые скачки. При решении нелинейных гиперболических систем возникает необходимость вводить скачки. В терминах волновой формы уравнения Шредингера это скачки между однородными волновыми состояниями. Граничные условия на них можно получить, исходя из дивергентного вида системы (3.1).

$$U [a^2] - [b_1 a^2 - 2b_2 a^2 W - 3b_3 a^2 W^2 + 4b_4 a^2 W^3] = 0 \quad (4.1)$$

$$U [W] - [b_1 W - b_2 W^2 - b_3 W^3 + b_4 W^4 + a^2] = 0$$

Здесь  $U$  — скорость скачка, квадратные скобки обозначают разность величин за скачком и до скачка.

Существенным отличием обобщенного уравнения Шредингера с третьей старшей производной от случая уравнений газовой динамики, а также от уравнения Шредингера со второй старшей производной и уравнения Кадомцева — Петвиашвили, которые описывают волновые скачки [9—10], является его инвариантность относительно преобразования вращения или преобразования Галилея. Поэтому нельзя ограничиться только исследованием стационарных скачков.

Для уравнения с третьей старшей производной и  $b_1 = 0$ ,  $b_2 < 0$  (фактически  $b_2 = -1$ , см. Введение),  $b_3 > 0$  проводилось численное исследование соотношений (4.1). После исключения из уравнений (4.1) величины  $a^2$  возникает алгебраическое уравнение пятой степени относительно неизвестной величины  $W = W_1$ . Величины  $b_2, b_3, W_2, a_2, U$  входят в это уравнение как параметры. В соответствии с тем, что число граничных условий на скачке равно двум, скачок эволюционен, если с одной стороны от линии скачка имеются одна уходящая и одна приходящая характеристики (будем называть эту область областью за скачком), а с другой — две приходящие характеристики (будем называть эту область областью до скачка). В процессе исследования решений этого уравнения фиксировалось значение  $a_2$  за скачком, а  $W_2$  менялось от  $W_2 = W_*$ ,  $v_+(a_2, W_*) = U$  до  $W_2 = W_{**} > W_*$ ,  $v_-(a_2, W_{**}) = U$ . Такой интервал значений  $W_2$  существует, если  $U < b_2^2 / (3b_3)$ . В зависимости от соотношений между параметрами имеется от трех до пяти действительных корней  $W_{(1)} < W_{(2)} = W_2 < W_{(3)} < W_{(4)} < W_{(5)}$ ;  $W_{(1)} = W_{(2)}$  при  $W_2 = W_*$ ,  $W_{(2)} = W_{(3)}$  при  $W_2 = W_{**}$ .

Скачок между  $W_{(1)}$  и  $W_{(2)}$  эволюционен, если его интенсивность не слишком велика и область  $Ut > x$  является областью за скачком. Значение  $W_2 = W_*$  соответствует скачку бесконечно малой интенсивности  $U = v_+(a_2, W_2)$ . Скачок максимальной интенсивности  $W_2 = W_{**}$ ,  $U = v_-(a_2, W_2)$  существует только как формальное решение, физически он неосуществим, поскольку в таком скачке  $a_1^2 < 0$ , перед скачком — область негиперболичности (некорректности) системы (3.1).

Скачок между  $W_{(2)}$  и  $W_{(3)}$  также эволюционен, если интенсивность его не слишком велика и область  $Ut < x$  является областью за скачком. Значение  $W_2 = W_{**}$  соответствует скачку бесконечно малой интенсивности  $U = v_+(a_2, W_2)$ . По мере увеличения интенсивности скачка при уменьшении параметра  $W_2$  в зависимости от соотношения между параметрами происходит выход в область негиперболичности системы (3.1) в связи с тем, что величина  $a_1^2$  становится отрицательной или же становится отрицательным подкоренное выражение в соотношении (3.2). В первом случае при дальнейшем увеличении  $W_2$  гиперболичность перед скачком восстанавливается из-за того, что меняет знак подкоренное выражение. Во втором случае гиперболичность может восстанавливаться из-за того, что меняет знак величина  $a_1^2$ . При этом могут иметься

корни  $W_{(4)}$  и  $W_{(5)}$ . Скачок максимальной интенсивности достигается при слиянии первого и второго корня или же третьего и четвертого. В любом случае перед скачком либо имеется область негиперболичности, либо гиперболичность есть, но  $a_1^2 < 0$ , поэтому такой скачок нефизичен.

Скачки между  $W_{(4)}$  и  $W_{(5)}$ , а также  $W_{(3)}$  и  $W_{(4)}$  эволюционны в случае, когда их интенсивность не слишком велика, при большой интенсивности происходит выход в область негиперболичности. При этом четвертый корень соответствует области за скачком, в первом случае это область  $Ut > x$ , во втором —  $Ut < x$ . Однако в рамках рассматриваемой в данной работе модели эти скачки нефизичны, поскольку в них всегда до скачка или за скачком величина  $a^2$  отрицательна.

Выше рассмотрены скачки, когда существует интервал значений  $W_2$ , такой, что  $v_+(a_2, W_*) = U$ ,  $v_-(a_2, W_{**}) = U$ . Однако если

$$\frac{b_2^2}{3b_3} < U < U_m, \quad U_m = \frac{b_2^2}{3b_3} + \frac{7}{8} a_2 \left( \frac{3}{2} a_2 b_3 \right)^{1/3}$$

то такого интервала нет, но существует аналогичный интервал, в котором  $v_+(a_2, W_{**}) = U$ . В этом случае имеется три корня и соответственно два скачка между значениями  $W_{(1)}$ ,  $W_{(2)} = W_2$  и  $W_2$ ,  $W_{(3)}$ . Первый скачок обладает теми же свойствами, что и в случае  $b_2^2/(3b_3) < U$ , отличие в том, что  $U = v_+$  при  $W_2 = W_*$  и  $W_2 = W_{**}$ . Второй скачок отличается существенно. Он эволюционен, если  $Ut > x$  — область за скачком, при этом в отличие от рассмотренных выше эволюционных скачков  $a_2 < a_1$ . Скачок бесконечно малой интенсивности достигается при  $W_2 = W_{**}$  и распространяется со скоростью  $v_+$ . Как и в случае  $b_2^2/(3b_3) < U$  при большой интенсивности скачка, перед скачком происходит потеря гиперболичности.

При  $U > U_m$  отсутствует интервал значений  $W_2$ , в котором имеется одна уходящая и одна приходящая на линию скачка характеристика.

**5. Численное исследование переходных областей между однородными волновыми состояниями.** Модель скачка, рассмотренную в разд. 4, можно использовать лишь для приближенного описания, когда не требуется исследование переходной зоны. Скачки возможны, только если уравнения (1.3) обладают решениями, описывающими структуру скачка [11]. В случае уравнения со второй старшей производной вместо стационарных структур возникают переходные области, протяженность которых увеличивается со временем. Внутри этих областей график  $a(x)$  при фиксированном значении  $t$  имеет осциллирующий вид [2], ниже такие области называются волновыми зонами. Если параметры этих осцилляций осреднить, то переходную область можно рассматривать как автомодельное решение, зависящее от  $t/x$  ( $x/u$  в обозначениях работ [9, 12]).

В терминах волновой формы уравнения Шредингера переходная область интерпретируется как область взаимодействия двух волн. Одна из них считается падающей, а другая — отраженной. На границе волновой зоны имеется узкий участок, который интерпретируется как структура скачкообразного трехволнового резонанса, при котором в результате взаимодействия падающей и отраженной волны возникает одна волна (волна за скачком). Как показали численные исследования настоящей работы, нет четко выраженной второй границы волновой зоны, амплитуда и пространственный период осцилляций постепенно уменьшаются при удалении на бесконечность. Наличие четкой границы в расчетах работы [2], по-видимому, связано с диссипативными свойствами использованного численного метода.

По аналогии с [2], где исследуется взаимодействие стационарных периодических волн с вертикальной стенкой, для получения решений с переходными областями проводились расчеты уравнения (1.2) на некотором отрезке  $[0, x_2]$ . При  $x = 0$  ставились условия симметрии

$A(x) = A(-x)$  по аналогии с условиями на твердой стенке, в дальнейшем эта граница отрезка называется стенкой. При  $x = x_2$  граничные условия ставились, исходя из предположения, что волновое состояние вдали от стенки однородно:  $A = a_0 \exp[i(Kx - \Omega t)]$ . Величина  $K = W_0$  задавалась, а  $\Omega$  определялась из дисперсионного соотношения уравнения (1.2). При  $t = 0$  также задавалось однородное волновое состояние  $A = a_0 \exp(iKx)$ .

Использовалась чисто явная трехслойная численная схема второго порядка точности по времени и по пространству. Одна представляет собой обобщение схемы для линейного уравнения Шредингера [13, гл. 5, § 4, п. 2,  $\epsilon = 0$ ]. Нелинейный член вычислялся по значениям на втором слое, все производные были аппроксимированы центральными разностями. Было эмпирически установлено, что условие устойчивости этой схемы  $\Delta t = c\Delta x^m$ . Если величина  $\Delta x$  не слишком мала, то заметна зависимость коэффициента  $c$  от  $\Delta x$ . Разложив разностные соотношения, аппроксимирующие уравнение Шредингера с третьей старшей производной, в ряды Тейлора, можно убедиться, что такая схема аппроксимирует не исходное уравнение, а уравнение с производными более высокого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + b_1 \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{5!} \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} + \dots \right) + ib_2 \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + \frac{2\Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} + \dots \right) + \\ + b_3 \left( \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \frac{2(2^5 - 1)\Delta x^2}{5!} \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} + \frac{2(2^7 - 1)\Delta x^4}{7!} \frac{\partial^7 A}{\partial x^7} + \dots \right) + i|A|^2 A = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В идеализированном случае, когда шаг  $\Delta t$  бесконечно мал и машинная точность бесконечно велика, полученное численное решение можно рассматривать как точное решение уравнения (5.1) для дискретного набора точек. Изменяя величину  $\Delta x$ , можно менять коэффициенты при производных и таким образом исследовать влияние производных высших порядков. Уравнение (5.1), очевидно, может быть записано в виде обобщенного уравнения Шредингера (1.2) с бесконечной последовательностью из коэффициентов  $b_q$ . При этом  $b_{2n}$  и  $b_{2n+1}$  имеют порядок  $O(\Delta x^{2n-2})$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Поскольку величина  $\Delta x$  мала, то чем выше порядок производной, тем меньше коэффициент при ней. В силу этого чем короче на некотором участке длина волны в решении, полученном в результате расчета, тем больше на него влияют высшие производные.

Для сравнения проводились также расчеты с уменьшенной величиной  $\Delta x$  и непосредственным включением в численную схему производных четвертого и пятого порядка с аппроксимацией способом центральных разностей. Сравнение показало совпадение некоторых качественных эффектов (см. ниже). Получить надежные результаты с непосредственным включением производных более высокого порядка не удается из-за чрезмерно мелкого шага по времени, применение же неявной схемы приведет к сглаживанию коротковолновых возмущений. При использовании же описанного выше подхода при расчете уравнения с третьей старшей производной можно автоматически учесть члены до седьмого порядка включительно, поскольку погрешность расчета по времени имеет порядок  $\Delta t^2 = c^2 \Delta x^6$ . В уравнении (5.1) отсутствуют диссипативные члены, поэтому коротковолновые возмущения не сглаживаются.

Недостатком описанного выше подхода в расчетах с нечетной старшей производной является необходимость постановки одинакового числа граничных условий на обоих концах отрезка  $[0, x_2]$ . Как показали численные расчеты, избыточность числа граничных условий при  $x = x_2$  приводит к появлению на этом конце небольшого скачка величины  $|A|(x)$ , который не мешает проведению расчета. В случаях, когда у стенки возникает однородное волновое состояние с  $W_0 = 0$ , а именно такие решения и были целью исследования,  $0 = A_x = A_{xxx} = A_{xxxx} = \dots$ , при  $x = 0$  можно выставить любое число граничных условий, которые не противоречат друг другу. Однако в некоторых расчетах при избыточном числе граничных условий при  $x = 0$  возникали большие градиенты и последующая остановка вычислений как в тех случаях, когда такое решение имеется, так и в тех, когда его нет.

Для контроля в расчетах с нечетной старшей производной применялась также чисто явная двухслойная схема (схема 2) первого порядка точности (обобщение схемы [13, гл. 5, § 4, п. 1]). Нелинейный член вычислялся на первом слое, старшая производная порядка  $m$  аппроксимировалась как разность налево или направо от аппроксимаций порядка  $m - 1$  способом центральных разностей. Условие устойчивости этой схемы также  $\Delta t = c\Delta x^m$ . Выставлялось столько граничных условий, сколько необходимо для корректности. К этой схеме также можно применить описанный выше подход, но здесь он не эффективен, поскольку аппроксимация по времени имеет первый порядок. Кроме того, уравнение, аналогичное (5.1), будет включать диссипативные члены, которые сглаживают коротковолновые возмущения, поэтому влияние производных высокого порядка будет незначительным.

На фиг. 2—6 представлены графики  $a(x)$  при фиксированных значениях  $t$ , полученные в результате расчетов. На фиг. 7 участки концевой части волновой зоны показаны в увеличенном виде. Ниже приведены величины коэффициентов  $b_1, b_3 - b_5$ , ( $b_2 = -1, a_0 = -1, W_0 = 0,2$ ), включавшиеся в численную схему в явном виде, а также величина  $\pi/\Delta x$ , по которой из уравнения (5.1) можно определить коэффициенты фактически аппроксимируемого уравнения:

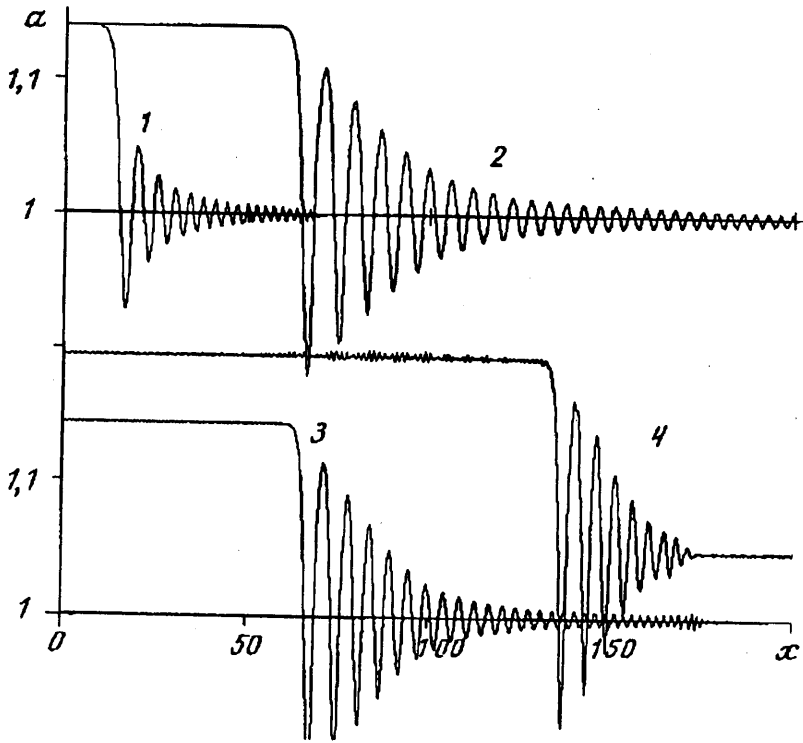
Фигура	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6
Кривая	1; 2	3	4	1	2	1; 2	3; 4	1	2	3	1	2	3
$t$	10; 50	50	100	80	30	10; 50	10; 70	10	8	3	1	30	55
$b_1$	0	0	0	-1	-4	0	0	-1,4	-1,4	-1,4	-1,4	0	0
$b_3$	-0,1	0,1	0,17	0,3	-0,5	0,1	0,25	0,3	0,3	0	0	0	0
$b_4$	0	0	0	0	0	0	0	0,02	-0,04	-0,1	0	0	0
$b_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	-0,05	-0,5
$\pi/\Delta x$	40	90	100	40	40	30	40	100	100	80	80	50	50
Кривая на фиг. 7	—	3; 4	—	—	—	1	2	—	—	—	—	—	—
$t$	—	5	—	—	—	20	20	—	—	—	—	—	—

Графики с отрицательными значениями  $b_5$  (см. фиг. 6) получены по схеме 2. Некоторые кривые смещены по вертикали для удобства их изображения, кривая 4 на фиг. 7 смещена также по горизонтали и увеличена по вертикали в 10 раз.

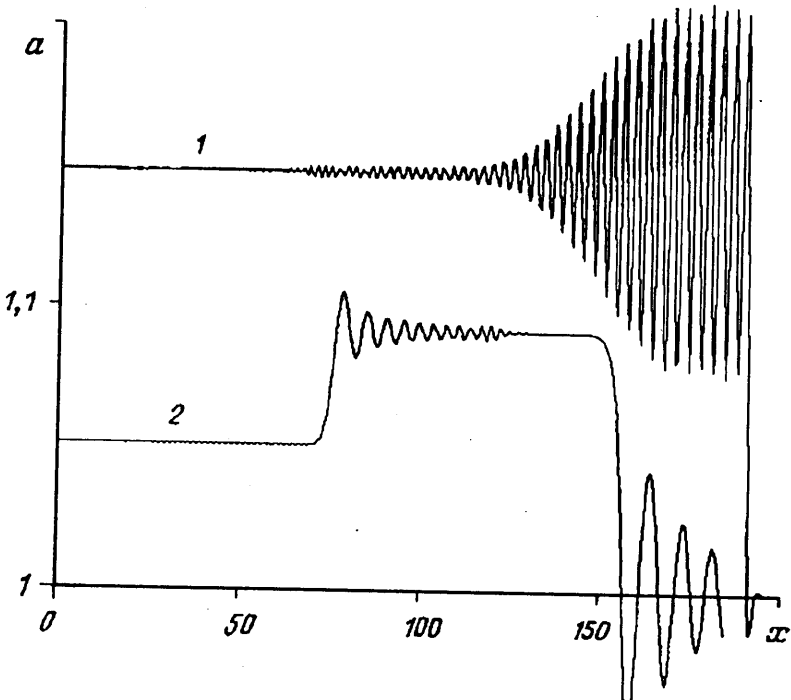
Графики, приведенные на фиг. 2—3, демонстрируют, каким образом величина  $b_3$  влияет на характер решения. Если  $|b_3| \ll |b_2|$  (фиг. 2, кривые 1, 3), то решение в основном сходно с решением уравнения Шредингера со второй старшей производной. Однако при  $b_3 > 0$  поверх однородного участка за скачком наблюдаются коротковолновые возмущения малой амплитуды, неразличимые в масштабе рисунка. При увеличении  $b_3$  длина волны и амплитуда этих возмущений увеличиваются (фиг. 2, кривая 4), сокращается протяженность волновой зоны перед скачком, она перестает расти со временем и содержит только несколько волн (см. фиг. 3, кривая 1). За скачком при этом возникает волновая зона, внутри которой можно выделить границу между участками, где амплитуда этих волн не зависит от  $x$ , и участок, где амплитуда уменьшается при уменьшении  $x$ . Протяженность обоих волновых участков растет со временем. При дальнейшем увеличении  $b_3$  пропадает волновая зона перед скачком и участок волновой зоны с постоянной амплитудой волн за скачком.

При расчетах с большими значениями  $b_3$  возникают трудности в связи с отражением волн за скачком от стенки, что с течением времени ведет к решениям, близким к хаотическим. При  $b_3 = 0,3$  эта трудность была преодолена путем изменения величины  $b_1$ , что эквивалентно переходу в движущуюся систему координат. При  $b_3 = 0,5$  и  $b_1 = -1,4$  избежать отражения не удалось. Поэтому в качестве примера расчета при больших значениях  $b_3$  приводится расчет при  $b_3 = -0,5$  и  $b_1 = -4$  (фиг. 3, кривая 2), поскольку расчет набегания волны справа на стенку эквивалентен расчету набегания на стенку слева с обратным знаком величины  $b_3$ . Если  $|b_1|$  превышает величину, приблизительно равную  $v_-$ , то возникает решение с двумя скачками, скорости которых приблизительно равны  $v_+$  и  $v_-$ . В решении, соответствующем кривой 2 на фиг. 3, перед ближайшим к стенке скачком отсутствует волновая зона, т. е. это скачок описанного выше типа. Второй скачок сходен с изображенным на кривой 1 фиг. 2, амплитуда волн перед скачком существенно меньше амплитуды самого скачка. Кривые на фиг. 3 демонстрируют, что при больших значениях  $|b_3|$  проявляются волновые дисперсионно-диссипативные эффекты, связанные с нелинейными членами типа

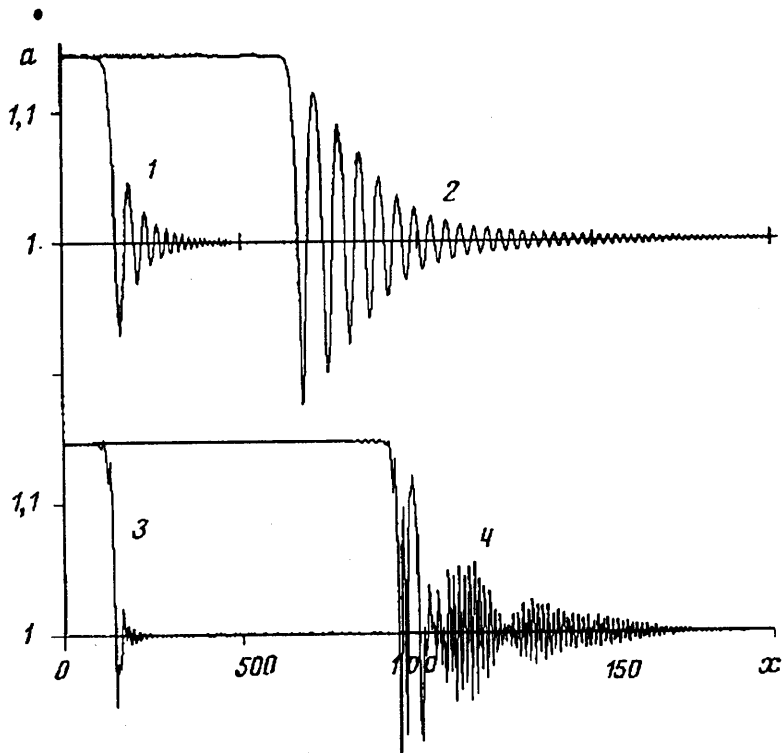




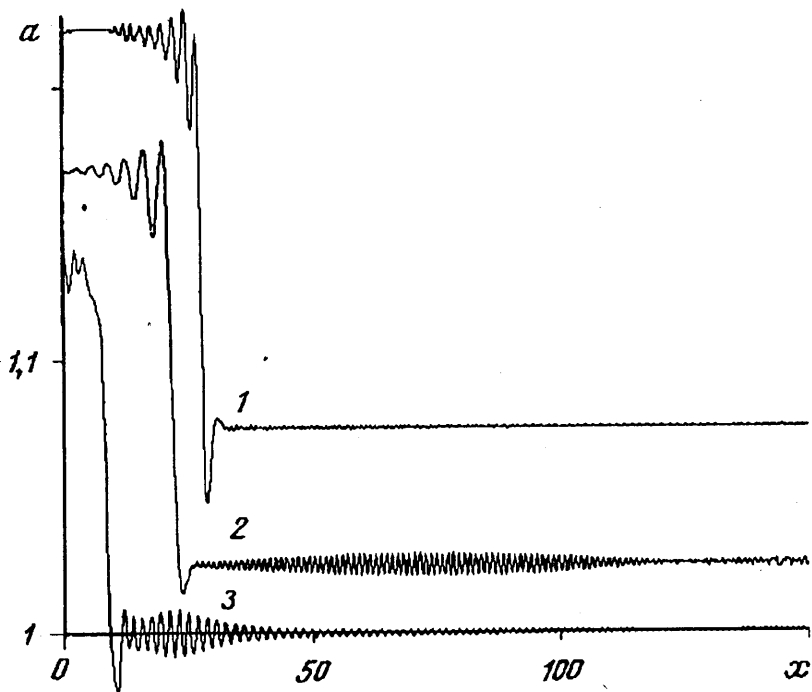
Фиг. 2



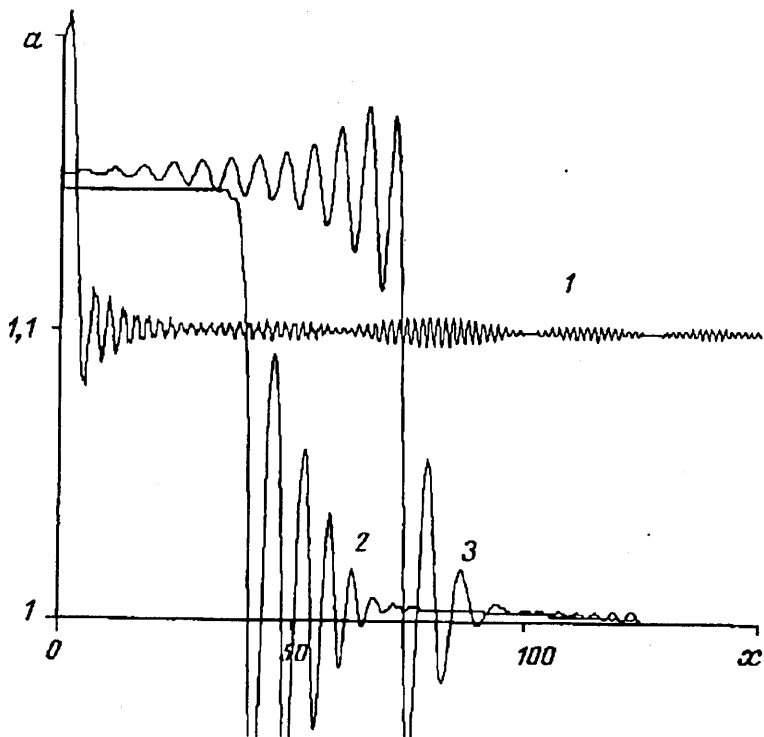
Фиг. 3



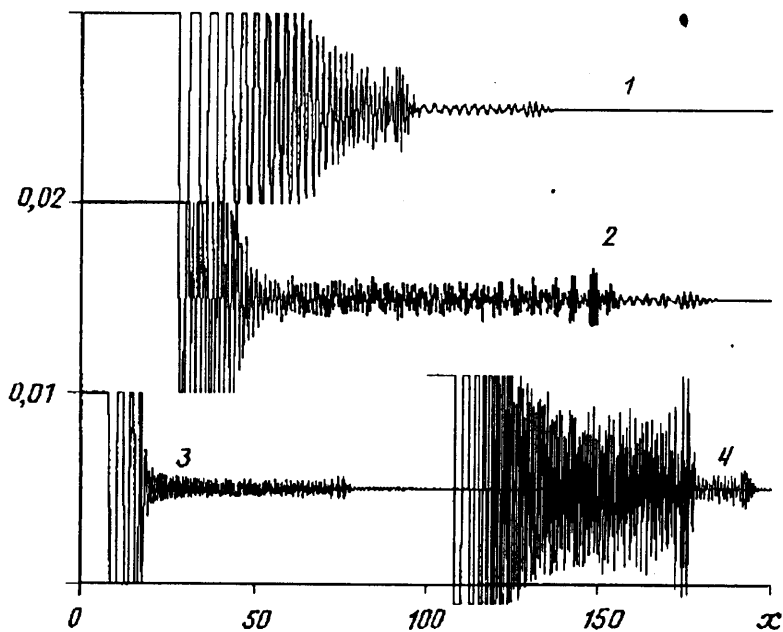
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

произведения производных четного и нечетного порядка в уравнениях (1.3)—(1.4). Данные решения представляют собой комбинации автомодельных решений и скачков со стационарной структурой.

Следует особо остановиться на протяженности волновых зон. Более детальные исследования с изменением величины  $\Delta x$  показывают, что конечную протяженность имеют только волновые зоны перед скачком при  $b_3 > 0$ . Во всех остальных случаях конечность волновых зон порождена производными порядка выше третьего в уравнении (5.1), поскольку на концах волновых зон длина волн мала.

Было установлено, что наличие и протяженность волновой зоны зависят от вида дисперсионного соотношения (2.1). Очевидно, на краю волновой зоны нелинейными эффектами можно пренебречь, поэтому волны перед скачком, бегущие вправо, можно описывать этим соотношением, при этом следует взять знак плюс. Можно выделить три типа строения этой ветви.

При первом типе  $\partial\Omega^2/\partial K^2 > 0$  при  $K > 0$  групповая скорость возрастает при уменьшении длины волны. В этом случае протяженность волновой зоны может быть бесконечной, при этом длина волны бесконечно уменьшается, а ее фазовая скорость бесконечно увеличивается по мере удаления от скачка, как, например, в случае уравнения со второй старшей производной или при  $b_3 < 0$ .

При втором типе имеется участок  $[0, K_*]$ , где  $\partial\Omega^2/\partial K^2 > 0$ , при  $K > K_*$   $\partial\Omega^2/\partial K^2 < 0$ . В этом случае волновая зона конечна, при  $K = K_*$  возникает каустика, на конце волновой зоны огибающая волны имеет форму, похожую на функцию Эйри. Расчеты данной работы качественно подтверждают гипотезу работы [14], где предложено для описания корабельных волн вблизи каустики применять обобщенное уравнение Шредингера с производной третьего порядка, но без производной второго порядка. К такому типу относятся решения при небольших положительных значениях  $b_3$ . Учет членов с производными четвертого и пятого порядка в соответствии с уравнением (5.1) приводит к тому, что дисперсионное соотношение относится к такому типу во всех случаях, когда  $|b_3|$  не велик по сравнению с  $|b_2|$ , поэтому наблюдаемые при расчетах волновые зоны всегда имеют конечный размер, увеличивающийся со временем.

При третьем типе дисперсионного соотношения  $\partial\Omega^2/\partial K^2 < 0$  при  $K > 0$ . В этом случае волновая зона перед скачком отсутствует или состоит из конечного числа волн, как это имеет место при больших значениях  $b_3$ .

В случаях, когда обобщенное уравнение Шредингера содержит большое количество производных, у дисперсионной кривой может быть несколько участков роста и уменьшения групповой скорости и соответственно несколько длин волн, при которых может возникать каустика. В расчете, соответствующем кривой 2 на фиг. 2, наблюдаются три каустики (фиг. 7, кривые 3, 4). Ближайшая к скачку каустика порождена третьей производной. Следующая за ней возникает из-за того, что коротковолновые возмущения за скачком отражаются от стенки, она порождена высшими производными, привнесенными схемой. Третья каустика также порождена высшими производными, она ограничивает скорость распространения возмущений, возникших на начальной стадии формирования решения, с течением времени эти возмущения пропадают. При уменьшении  $\Delta x$  исчезают точки перегиба на дисперсионной кривой, порожденные третьей производной, и соответствующая каустика, тип решения качественно меняется (см. фиг. 4, кривая 1, фиг. 7, кривая 1).

В решении, графики которого показаны кривой 2 на фиг. 4 и кривой 2 на фиг. 7, в результате воздействия высших производных волновая зона за скачком не увеличивает свои размеры со временем, каустика как бы прилипает к скачку, при этом перед скачком излучаются короткие волны, на которых, как и в рассмотренных ранее решениях, возникает каустика (см. фиг. 7, кривая 2).

На более поздних стадиях возникает самофокусировка коротких волн вблизи

скачка, а затем участок коротких волн с большой амплитудой и хаотично-упорядоченным поведением типа странного аттрактора. Протяженность этого участка растет со временем. Между коротковолновым участком с большой амплитудой и участком с малой амплитудой образуется невозмущенный участок. Аналогично устроено решение, возникающее при переходе от решения, соответствующего кривой 2 на фиг. 2, к решению, соответствующему кривой 1 на фиг. 4.

Анализ дисперсионного соотношения с учетом четвертой и пятой производных, приведенных схемой, показывают, что на соответствующем диапазоне величины  $K$  у дисперсионной кривой имеются две близко расположенные точки перегиба. По-видимому, из-за этого происходит коллапс, после чего большое влияние начинают оказывать нелинейные дисперсионно-диссипативные эффекты.

На фиг. 1 показаны различные типы ветви дисперсионной кривой при  $b_2 = -1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $W_0 = -0,2$ . Сплошная жирная линия —  $b_3 = 0,1$  (второй тип). Сплошные тонкие линии —  $b_3 = 0,1$ ,  $b_4$  и  $b_5$  из (5.1),  $\pi/\Delta x = 30$  (первый тип),  $\pi/\Delta x = 40$  (две близко расположенные точки перегиба),  $\pi/\Delta x = 50$  и  $90$  (две точки перегиба, одна из которых вне границ фигуры). Штриховая тонкая линия —  $b_3 = 0,5$  (третий тип). При  $b_3 = 0,1$  и  $0,5$  показана также вторая ветвь дисперсионной кривой, для построения которой следует в соотношении (3.2) взять знак минус.

С целью анализа того, какие из старших производных приведены к таким эффектам, были произведены расчеты с включением в схему производных четвертого (фиг. 5) и пятого (фиг. 6) порядков и уменьшенным значением  $\Delta x$ .

При  $b_4 > 0$ ,  $b_2 = 0$   $\partial\Omega^2/\partial K^2 > 0$ , вид решения мало отличается от решения уравнения со второй старшей производной. При  $b_4 > 0$  и  $b_3 = 0,3$   $\partial\Omega^2/\partial K^2 < 0$  при  $K \in [0, K_*]$ ,  $\partial\Omega^2/\partial K^2 > 0$  при  $K > K_*$ . В соответствии с этим перед скачком волновая зона должна отсутствовать или состоять из конечного числа волн, волновая зона за скачком должна иметь конечную длину, на каустике за скачком происходит отражение вперед коротких волн малой амплитуды. Каустика у этих волн, распространяющихся перед скачком, возникать не должна. Все это подтверждается расчетом (кривая 1 на фиг. 5). При  $b_4 < 0$  наблюдается отражение волн от стенки и последующая самофокусировка волн (кривые 2, 3 на фиг. 5). Имеется тенденция к образованию солитонов огибающей.

При  $b_5 > 0$  также наблюдается отражение волн от стенки с последующим замещением периодических волн двухпериодными волнами (кривая 1 на фиг. 6). Появление солитоноподобных структур и двухпериодных волн хорошо заметно в решении, соответствующем кривой 2 на фиг. 4, таким образом эти эффекты вызваны здесь влиянием четвертой и пятой производных. При  $b_5 < 0$  (кривые 2, 3 на фиг. 6) волновая зона ограничена с обеих сторон от скачка, а если  $|b_5|$  мал по сравнению с  $|b_2|$ , то протяженность волновой зоны за скачком не растет со временем. Решение здесь не содержит каустик и коротких волн, на границах волновых зон существенна нелинейность, все это сходно с решением аналогичной задачи для уравнения Кортевега — де Вриза [15]. Поскольку влияние на вид дисперсионной кривой седьмой производной с положительным коэффициентом при ней сходно с влиянием пятой производной с отрицательным коэффициентом, то, возможно, ограниченность волновых зон с обеих сторон от скачка в решении, соответствующем кривой 2 на фиг. 4, обусловлена влиянием седьмой производной. В решениях, соответствующих кривым 2, 3 на фиг. 5 и кривой 1 на фиг. 6, с течением времени возникает хаос из-за отражения от стенки, поэтому показана только начальная стадия.

Как указывалось в разд. 2, в случае отрицательных значений  $b_3$  и положительных значений  $b_4$  однородное состояние неустойчиво. Оценить характер данной неустойчивости из проведенных расчетов не представляется возможным, поскольку вследствие того, что величины коэффициентов при этих производных малы,

длина волны, при которой происходит рост возмущений, сравнима с шагом сетки. Неустойчивость может компенсироваться привнесенными схемой производными более высокого порядка.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за обсуждения и ценные замечания о необходимости исследования условий эволюционности и проверки схемных эффектов, а также за замечания по тексту статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
2. Yue D. K. P., Mei C. C. Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge//J. Fluid Mech. 1980. V. 99. № 1.
3. Akylas T. R., Kung T.-J. On nonlinear wave envelopes of permanent form near a caustic//J. Fluid Mech. 1990. V. 214. P. 489—502.
4. Oikawa M. Nonlinear behaviour of capillary-gravity waves near the inflection point of the dispersion curve//Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Japan 1991. V. 38. № 108. P. 61—81.
5. Куликовский А. Г., Реутов В. А. Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 53—61.
6. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний//ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148—153.
7. Марченко А. В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230—234.
8. Ильичев А. Т., Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88—95.
9. Бахолдин И. Б. Усредненные уравнения и разрывы, описывающие распространение волн Стокса с медленно меняющимися параметрами//Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 113—121.
10. Бахолдин И. Б. Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 87—93.
11. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле//Докл. АН СССР. 1968. Т. 178. С. 55—58.
12. Бахолдин И. Б. Трехволновой резонанс и усредненные уравнения взаимодействия двух волн в средах, описываемых кубическим уравнением Шредингера//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 107—116.
13. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
14. Akylas T. R. Unsteady and nonlinear effects near the cusp lines of the Kelvin ship-wave pattern//J. Fluid Mech. 1987. V. 175. P. 333—342.
15. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны//ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590—604.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VI.1993