

УДК 532.59

© 1994 г. В. А. ГОРОДЦОВ

## ВОЛНЫ-ПРЕДВЕСТНИКИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

При движении источника переменной интенсивности в стратифицированной жидкости возбуждается несколько типов волн, среди которых могут быть волны, обгоняющие источник (волны-предвестники). На основе анализа выражений для средних потерь энергии в единицу времени на излучение внутренних волн продемонстрировано, что в жидкостях с выпуклыми дисперсионными кривыми для волн возможны до четырех типов волн на каждую моду. Один тип, исчезающий в сверхкритических условиях, относится к волнам-предвестникам. Выявлена угловая зависимость таких волн и условия их возбуждения по скорости источника.

1. В линейном приближении слабо переменное движение тел, равномерное в среднем, эквивалентно равномерному движению источников переменной интенсивности. Ограничимся гармонически осциллирующими массовыми источниками

$$m(t, \mathbf{r}, z) = m_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t, z) \cos \omega_0 t = \nabla v \quad (1.1)$$

движущимися горизонтально ( $\mathbf{r}$  — горизонтальный пространственный вектор,  $z$  — вертикальная координата в направлении силы тяжести) со скоростью  $\mathbf{v}_0$  в стратифицированной по плотности несжимаемой идеальной жидкости. Преобразование Фурье для такого источника по времени и горизонтальным переменным пропорционально  $\delta$ -функции, отражающей линейную связь частоты с волновым вектором для движущегося источника

$$m(\omega, \mathbf{k}, z) \equiv \int dt d\mathbf{r} m(t, \mathbf{r}, z) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \pi m_0(\mathbf{k}, z) \delta(\omega - |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0|) \quad (1.2)$$

Для фурье-образов здесь и далее используем те же буквы, отличая их по аргументам (ср.  $m_0(\mathbf{r}, z)$  и  $m_0(\mathbf{k}, z)$ ).

Будем оценивать средние за период колебаний энергетические потери на излучение внутренних (поверхностных, в частности) волн источниками. Для этого не потребуются детализация их вида [1]. Основное внимание уделим волнам, опережающим движущийся осциллирующий источник (волнам-предвестникам).

2. Начнем рассмотрение со случая разрывной стратификации с заданным скачком плотности  $\rho_2 - \rho_1$  на горизонтальной плоскости, разделяющей две однородные неограниченные несжимаемые жидкости. В предположении потенциальности течение определяется решением уравнения Пуассона с массовым источником в правой части и линеаризованными граничными условиями. Затем находятся осредненные за период колебания  $2\pi/\omega_0$  потери энергии в единицу времени как интеграл по объему жидкости от осредненного произведения давления на массовый источник. Получаем представление потерь в виде квадратичной формы по источникам с интегрированием по частотам и волновым векторам. Симметрия задачи позволяет ограничиваться только положительными частотами)

$$\langle W \rangle = \frac{\rho \gamma g (1 \mp \gamma)}{8 (2\pi)^{p-2}} \int_0^\infty d\omega \omega \int dk |\mu|^2 \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|) \delta(\omega^2 - \gamma g k) \quad (2.1)$$

$$\mu \equiv \int_0^\infty dz \int dr m_0(r, z) e^{-kr - kz}, \quad \gamma \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad k = |k|$$

Здесь знак минус (плюс) в множителе  $(1 \mp \gamma)$  и  $\rho = \rho_1$  ( $\rho = \rho_2$ ) соответствует движению выше (ниже) скачка плотности,  $p$  — показатель размерности задачи. Одна  $\delta$ -функция попала сюда из-за вида движущегося источника (1.1), (1.2). Другая отражает дисперсионную связь частоты с волновым вектором для волн на поверхности скачка плотности ( $\gamma = 1$  соответствует волнам на свободной поверхности).

Две  $\delta$ -функции позволяют провести два интегрирования в общем случае. Их выполнение подразумевает решение системы уравнений

$$\omega = |\omega_0 + kv_0|, \quad \omega^2 = \gamma g k$$

которая приводится к паре квадратных уравнений для частот волн, возможных при каждом заданном направлении их распространения, т. е. при  $\cos \varphi = kv_0 / (k v_0) = \text{const}$  (плоскую задачу можно считать частным случаем с  $\varphi = 0, \pi$ )

$$\omega_0 + \omega^2 \frac{v_0 \cos \varphi}{\gamma g} = \pm \omega$$

При относительно малых скоростях движения источников (в докритических условиях  $v_0 \cos \varphi < v_* \equiv 0,25 \gamma g / \omega_0$ ) эти уравнения имеют положительные решения

$$\omega^{(\alpha)} = \frac{\gamma g (1 \pm a)}{2v_0 \cos \varphi}, \quad \cos \varphi > 0, \quad \alpha = 1, 2$$

$$\omega^{(\beta)} = \frac{\gamma g (b \mp 1)}{2v_0 |\cos \varphi|}, \quad \cos \varphi < 0, \quad \beta = 3, 4$$

$$a \equiv \sqrt{1 - \frac{v_0}{v_*} \cos \varphi}, \quad b \equiv \sqrt{1 + \frac{v_0}{v_*} |\cos \varphi|}$$

При сверхкритических скоростях  $v_0 \cos \varphi > v_*$  первая пара решений, описывающая бегущие вперед волны ( $\cos \varphi > 0$ ), исчезает.

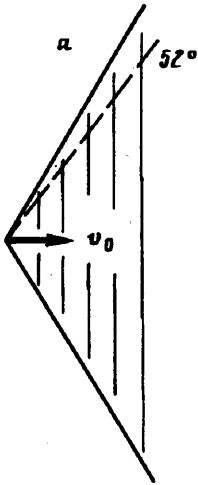
Для волн на поверхности разрыва плотности групповая скорость составляет половину фазовой, совпадая с ней по направлению

$$c_z \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} c = \frac{\omega}{2k^2} k$$

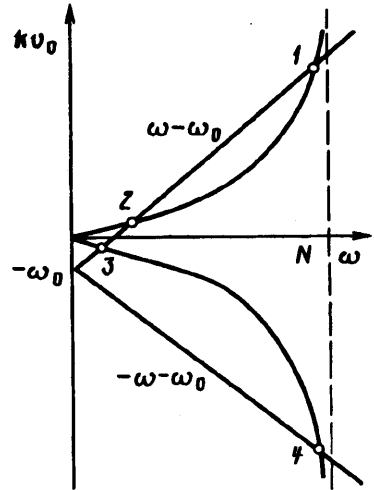
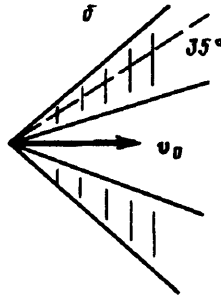
$$c_z^{(\alpha)} = v_* (1 \mp a) = \frac{v_0 \cos \varphi}{1 \pm a}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$c_z^{(\beta)} = v_* (b \pm 1) = \frac{v_0 |\cos \varphi|}{b \mp 1}, \quad \beta = 3, 4$$

Групповые скорости двух типов волн ( $\alpha = 2, \beta = 3$ ) могут превосходить скорость источника по величине. Однако лишь одна из них ( $\alpha = 2$ ) распространяется в направлении движения источника. Такая волна в плоской задаче в условиях ее существования  $v_0 < v_*$  всегда опережает источник. В трехмерной задаче в условиях их существования  $v_0 \cos \varphi < v_*$  лишь часть таких волн, для которых компоненты групповых скоростей в направлении движения



Фиг. 1



Фиг. 2

источника  $c_z^{(2)}v_0/v_0$  превосходят его скорость, будут опережать источник. Тем самым для волн-предвестников должны выполняться условия

$$\cos \varphi \leq \frac{v_*}{v_0}, \quad F(\cos \varphi) \equiv \cos \varphi (2 - \cos^2 \varphi) \geq \frac{v_0}{v_*} \quad (2.2)$$

Функция  $F(x)$  в интервале  $0 < x < 1$  растет от  $F(0) = 0$  до максимального значения  $F(\sqrt{2/3}) \approx 1,1$  и снова несколько убывает до  $F(1) = 1$ . Так что ограничение на скорость источника для существования волны-предвестника в пространственной задаче  $v_0 \lesssim 1,1v_*$  оказывается близким к ограничению в плоской задаче  $v_0 \leq v_*$ . Для углов ограничительным при  $v_0 \leq v_*$  является только второе неравенство из (2.2) и имеется клин возможных направлений волн-предвестников, сужающийся с ростом скорости от  $\pm 90^\circ$  до  $\pm 52^\circ$  при  $v_0 = v_*$ . При еще больших скоростях в игру вступает и другое ограничение из (2.2). Волны-предвестники оказываются тогда в угловых секторах, симметрично расположенных относительно направления движения и сжимающихся в лучи  $\pm 35^\circ$  при  $v_0 \approx 1,1v_*$ . Наглядно ситуации с  $v_0 < v_*$  (а) и  $v_0 > v_*$  (б) отражены на фиг. 1.

Следует подчеркнуть, что при низкочастотных колебаниях интенсивности источников критические скорости отнюдь не малы (так, при  $\omega_0 \sim 10^{-2}$  1/с имеем  $v_* \sim g/\omega_0 \sim 10^3$  м/с, и  $v_* \sim \gamma g/\omega_0 \sim 10$  м/с при  $\gamma \sim 10^{-2}$ ) и волны-предвестники могут быть реально значимы.

Произведение  $\delta$ -функций в (2.1) можно преобразовать к сумме по обсуждаемым четырем волновым решениям

$$\begin{aligned} & \delta(\omega^2 - \gamma g k) \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|) = \\ & = \frac{1}{\gamma g a} P(\cos \varphi) \delta(\omega - \sqrt{\gamma g k}) \sum_{i=1}^4 \delta(k - k^{(i)}) \end{aligned}$$

$$P(x) \equiv H(x) H(v_* - v_0 x) + H(-x), \quad \gamma g k^{(i)} = |\omega^{(i)}|^2$$

Через  $H(x)$  обозначена единичная функция Хевисайда, отличная от нуля только при  $x > 0$ . После этого (2.1) интегрируется по частотам и волновым числам тривиально

$$\langle W \rangle = \frac{\rho (1 \mp \gamma)}{8 (2\pi)^{p-2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{a} P(\cos \varphi) \sum_{i=1}^4 \omega^{(i)} |\mu^{(i)}|^2 \quad (2.3)$$

Следует подчеркнуть, что для первых двух волн только при  $v_0 < v_*$  ведется интегрирование по полуинтервалу углов от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , а при  $v_0 > v_*$  интегрирование ведется по меньшим интервалам  $(-\pi/2, -\arccos v_0/v_*)$ ,  $(\arccos v_0/v_*, \pi/2)$ . Для другой пары корней интегрируется от  $\pi/2$  до  $3\pi/2$  независимо от величины скорости. Все это отражает проекционная функция  $P(\cos \varphi)$ .

В плоской задаче нет интегрирования по углам (формально можно положить в (2.3)  $\varphi = 0$  и  $\pi$  для направлений вперед-назад и  $p = 2$ ), так что средние потери энергии просто представляются суммой четырех (двух при  $v_* > v_0$ ) волновых вкладов

$$\langle W \rangle = \frac{\rho (1 \mp \gamma) H(v_* - v_0)}{8a_0} \sum_{\alpha=1}^2 \omega^{(\alpha)} |\mu^{(\alpha)}|^2 + \frac{\rho (1 \mp \gamma)}{8b_0} \sum_{\beta=3}^4 \omega^{(\beta)} |\mu^{(\beta)}|^2 \quad (2.4)$$

$$a_0 \equiv \sqrt{1 - \frac{v_0}{v_*}}, \quad b_0 \equiv \sqrt{1 + \frac{v_0}{v_*}}$$

Для некоторых распределений источников формфактор источника  $|\mu(\mathbf{k}, k)|^2$  имеет простой вид. Например, для точечного массового диполя

$$m_0(\mathbf{r}, z) = -d_0 \nabla \delta(\mathbf{r}) \delta(z - z_0) \quad (2.5)$$

$$|\mu(\mathbf{k}, k)|^2 = (kd_0)^2 e^{-2kz_0}$$

он выражается через произведение степенной и экспоненциальной функций.

Приближению к критической точке, как видно из (2.4), соответствует резонансное усиление вкладов волн, бегущих вперед. Тогда сближаются их групповые скорости и скорость источника и энергия не отводится волнами от последнего.

Этим завершается определение потерь энергии в плоской задаче. В трехмерной задаче еще остается интегрирование по углам, которое может быть затруднительным. Тогда целесообразно использовать асимптотические упрощения при малых и больших значениях безразмерного параметра  $\gamma g z_0 / v_0^2$ , входящего в экспоненциальную функцию.

Различные особенности излучаемых движущимся осциллирующим источником волн в условиях плоской задачи в большинстве случаев для волн на свободной поверхности жидкости неоднократно анализировались ранее [2—12].

3. Перейдем к рассмотрению другой достаточно общей ситуации стратифицированной несжимаемой жидкости в волноводном слое, заключенном между горизонтальными плоскостями. Малые возмущения, создаваемые массовым источником (1.1), описываются в приближении Буссинеска [13] дифференциальными уравнениями

$$Lw = \frac{\partial^3 m}{\partial t^2 \partial z}, \quad L \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2(z) \right) \nabla^2 + \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{N^2(z)}{g} w, \quad \nabla^2 p = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - \frac{\partial m}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p$$

Здесь  $w$ ,  $\mathbf{v}$  — вертикальная компонента и вектор горизонтальных составляющих скорости,  $\nabla^2$  — сумма вторых производных по горизонтальным координатам,  $N(z)$  — распределение частот плавучести.

Уравнения можно разрешить с помощью запаздывающей функции Грина этого оператора, принимая во внимание условия непроникания жидкости через

горизонтальные границы. Функцию Грина удобно представлять в виде интегрального разложения Фурье по частотам и горизонтальным волновым векторам и ряда по собственным модам вертикального направления

$$LG(t, r; z, z') = \delta(t) \delta(r) \delta(z - z')$$

$$G(t, r; z, z') = \frac{1}{(2\pi)^p} \int d\omega dk G_{\omega k}(z, z') e^{ikr - i\omega t}$$

$$G_{\omega k}(z, z') = \sum_n \frac{\omega_n^2 \psi_n(k, z) \psi_n(k, z')}{(\omega + i\varepsilon)^2 - \omega_n^2}$$

$$\text{Im } G_{\omega k}(z, z') = -\pi \omega^2 \text{sgn } \omega \sum_n \psi_n(k, z) \psi_n(k, z') \delta(\omega^2 - \omega_n^2)$$

При этом собственные значения  $\omega_n = \omega_n(k)$  и собственные функции  $\psi_n = \psi_n(k, z)$  определяются соотношениями

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 + \frac{N^2(z) k^2}{\omega_n^2} \right) \psi_n = 0$$

$$\psi_n|_{z=h_1} = \psi_n|_{z=h_2} = 0, \quad \int dz k^2 N^2(z) \psi_n^2 = 1 \quad (3.1)$$

Можно убедиться, что выражение для осредненных потерь энергии на излучение внутренних волн, подсчитываемое по работе массового источника против вызываемых им сил давления, включает в себя только мнимую часть фурье-образа функции Грина. Тем самым в его интегральное представление по частотам и волновым векторам входит  $\delta$ -функция, сосредоточенная на дисперсионных волновых поверхностях всех собственных мод. Появление другой  $\delta$ -функции обязано особенностям движения источника (см. (1.2))

$$\langle W \rangle = \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^{p-2}} \sum_n \int_0^\infty d\omega \int dk \frac{\omega^4}{k^2} |\mu_n|^2 \delta(\omega - \omega_n) \delta(\omega - |\omega_0 + kv_0|) \quad (3.2)$$

$$\mu_n \equiv \int dr \int dz m_0(r, z) \frac{\partial \psi_n(k, z)}{\partial z} e^{-ikr}$$

Для достаточно представительного класса стратификаций (в дальнейшем ограничимся таким классом) с выпуклыми дисперсионными кривыми  $\omega = \omega_n(k)$  ( $\partial^2 \omega_n / \partial k^2 < 0$ ,  $\partial \omega_n / \partial k > 0$ ) здесь будет полная аналогия в дальнейших преобразованиях волн для каждой отдельной моды и волн на скачке плотности, описанными в предыдущем пункте. В этот класс попадает, в частности, однородная стратификация ( $N = \text{const}$ )

$$\omega_n(k) = \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + \pi^2 n^2 / H^2}}, \quad c_n \equiv \frac{\omega_n}{k}, \quad c_{n0} \equiv \frac{\partial \omega_n}{\partial k} = \frac{c_n^3}{c_{n0}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial k^2} = 3 \left( \frac{c_n}{c_{n0}} \right)^2 \frac{\partial c_n}{\partial k} < 0, \quad c_{n0} \equiv \lim_{k \rightarrow 0} c_n = \frac{NH}{\pi n}$$

Интегрирование по частотам и волновым числам в выражении потерь энергии (3.2), содержащем произведение двух указанных  $\delta$ -функций, подразумевает для каждой моды решение системы уравнений

$$\omega = \omega_n(k), \quad \omega = |\omega_0 + kv_0|$$

Даже в простейшем случае однородной стратификации она приводится к уравнениям четвертой степени для частоты (или волнового числа) с громоздким алгоритмом аналитического решения. Вместе с тем графический способ решения

этой системы остается столь же простым, как и в случае разрывной стратификации. Согласно фиг. 2, для каждой фиксированной моды, как и прежде, имеются четыре (два) типа волн в докритическом (сверхкритическом) режиме движения  $v_0 \cos \varphi < v_{*n}$  ( $v_0 \cos \varphi > v_{*n}$ ). Возможные частоты (и волновые вектора) находятся по точкам пересечений двух ветвей функции  $k_n(\omega) v_0 \cos \varphi$  с  $\cos \varphi > 0$  и  $\cos \varphi < 0$  (верхняя и нижняя кривые соответственно) и линейных функций  $\omega - \omega_0$  и  $-\omega - \omega_0$  ( $k = k_n(\omega)$  — функция, обратная  $\omega = \omega_n(k)$ ). Критические скорости определяются из условия касания прямой  $\omega = \omega_0 + kv_0$  дисперсионных кривых  $\omega = \omega_n(k)$

$$\omega_n(k) = \omega_0 + kv_{*n}, \quad \frac{\partial \omega_n(k)}{\partial k} = v_{*n}$$

В примере с однородной стратификацией получают следующие явные выражения  $v_{*n}$  и соответствующих волновых чисел и частот через частоту плавучести, частоту колебаний источника и глубину стратифицированного слоя:

$$v_{*n} = \frac{NH}{\pi n} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{N} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (3.3)$$

$$\omega_* = N \left( \frac{\omega_0}{N} \right)^{1/3}, \quad k_* = \frac{\pi n}{H} \left( \frac{\omega_0}{N} \right)^{1/3} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{N} \right)^{2/3} \right]^{-1/2}$$

Как и в случае разрывной стратификации, две из четырех волн в докритическом режиме бегут вперед, но лишь групповая скорость одной из них может превосходить по величине скорость движения излучающего источника. Чтобы такая волна обгоняла источник, необходимо выполнение более сильного неравенства  $c_{gn} \cos \varphi > v_0$ , т. е. проекция групповой скорости волн на направление движения источника должна превосходить его скорость. Тем самым для существования волн-предвестников нужно (при этом следует помнить, что  $c_{gn}$  зависит от  $\cos \varphi$ )

$$c_{gn} \cos \varphi > v_0, \quad v_0 \cos \varphi < v_{*n} \quad (3.4)$$

Отсюда следуют ограничения сверху и снизу углов распространения волн-предвестников при заданной скорости источника. Вместе с тем эти неравенства дают ограничения на скорости источников, излучающих такие волны. Как и при разрывной стратификации, они не могут быть значительно большими критической  $v_{*n}$ . Используя то, что для рассматриваемой спектральной задачи (3.1) имеет место упорядоченность групповых и фазовых скоростей волн  $c_{gn} < c_n \leq c_{n0}$ , получим из (3.4) закругленную более простую оценку

$$\frac{v_0}{c_{n0}} < \cos \varphi < \frac{v_{*n}}{v_0}$$

из которой, в частности, следует

$$v_0 < \sqrt{c_{n0} v_{*n}}$$

При однородной стратификации последнее неравенство сводится к

$$v_0 < c_{n0} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{N} \right)^{2/3} \right]^{3/4}$$

Таким образом, при движении осциллирующего источника в волноводе, характеризуемом выпуклыми дисперсионными кривыми, возможны четыре типа волн для каждой моды. Две волны, бегущие в сторону движения источника, исчезают в сверхкритических условиях  $v_0 \cos \varphi > v_{*n}$ . Критические скорости  $v_{*n}$

быстро уменьшаются с ростом номера мод (см., например, (3.3)). Одна из этих двух волн может быть волной-предвестником, опережающей источник. Две  $\delta$ -функции аналогично тому, как это было в примере с разрывной стратификацией, позволяют выполнить два интегрирования в выражении потерь энергии (3.2) и представить его суммой четырех вкладов.

Требование выпуклости дисперсионных кривых, конечно, заметно сужает рамки применимости полученных выводов. В частности, этому требованию не удовлетворяет стратификация с несколькими максимумами в распределении частот плавучести [13]. Более того, выпуклость дисперсионных кривых может нарушаться и для некоторых типов стратификаций с одним максимумом частоты плавучести [14]. В подобных ситуациях число волн-предвестников может оказаться еще большим и условия критичности более сложными, что требует отдельного анализа с большей степенью конкретизации вида стратификации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Городцов В. А.* Высокоскоростная асимптотика сопротивления тел в волноводном слое неоднородных жидкостей//ПММ. 1992. Т. 56. № 2. С. 260—267.
2. *Хаскинд М. Д.* О волновых движениях тяжелой жидкости//ПММ. 1954. Т. 18. № 1. С. 15—26.
3. *Becker E.* Die pulsierende Quelle unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe//Ing. Arch. 1956. B. 24. № 2. P. 69—76.
4. *Kaplan P.* The waves generated by the forward motion of oscillatory pressure distributions//Proc. 5th Midwest Conf. Fluid Mech. Ann. Arbor: Univ. Mich. Press, 1957. P. 316—329.
5. *Debnath L., Rosenblat S.* The ultimate approach to the steady state in the generation of waves on a running stream//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1969. V. 22. № 2. P. 221—233.
6. *Черкесов Л. В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247 с.
7. *Pramanik A. K.* Waves due to a moving oscillatory surface pressure in a stratified fluid//Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1974. V. 41. № 3. P. 571—574.
8. *Magnuson A. H.* The disturbance produced by an oscillatory pressure distribution in iniform translation on the surface of a liquid//J. Eng. Math. 1977. V. 11. № 2. P. 121—137.
9. *Pramanik A. K.* Capillary-gravity waves produced by a moving pressure distribution//ZAMP. 1980. V. 31. № 1. P. 174—180.
10. *Pramanik A. K.* Generation of internal gravity waves in a stratified ocean//Bull. Cal. Math. Soc. 1983. V. 75. № 1. P. 27—39.
11. *Pramanik A. K., Majumdar S. R.* Small-amplitude free-surface waves generated by moving oscillatory disturbances//J. Fluid Mech. 1984. V. 145. P. 405—415.
12. *Pramanik A. K., Majumdar M.* The gravity waves created by a moving source in a fluid of finite depth//Quart. Appl. Math. 1992. V. 50. № 3. P. 437—449.
13. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
14. *Завольский Н. А.* Особенности распространения линейных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. P. 106—110.

Москва

Поступила в редакцию  
12.И.1993