МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1994

УДК 532.529.5.013.4

© 1994 г. М. М. ХАСАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ С ЗАРОДЫШАМИ ГАЗА

Исследуется устойчивость стационарных режимов фильтрации жидкости с растворенным в ней газом в области давления насыщения. Показано, что при определенных режимах движения возможно возникновение периодических и стохастических автоколебаний, вызванных накоплением в пористой среде и последующим выносом мельчайших газовых пузырей, образующихся в результате снижения давления. Приведены результаты экспериментов, подтверждающих теоретические результаты.

Экспериментальные и теоретические исследования, проведенные в последнее время с газосодержащими жидкостями, показали, что в предпереходных условиях (т. е. в области давлений, превышающих давление насыщения, но близких к нему) реологические и релаксационные свойства газожидкостных систем во многом определяются наличием «микрозародышей» — мельчайших газовых пузырьков, кооперативное действие которых проявляется при приближении к давлению насыщения [1—4]. Существование подобных образований предполагают также в теории кавитации, чтобы объяснить резкое уменьшение реальной кавитационной прочности по сравнению с теоретической [5, 6]. Некоторые оценки характеристик микрозародышей получены в опытах по измерению скорости и коэффициента поглощения звука [3], кавитационных шумов [6] и дифракции лазерного пучка. Причины, ведущие к образованию зародышей, и механизмы, обеспечивающие их стабильное существование, к настоящему времени до конца не выяснены.

Предпереходные явления могут быть объяснены в рамках теории Я. И. Френкеля, в соответствии с которой вблизи давления насыщения в жидкости имеется динамическая «популяция» зародышей, образованная гетерофазными флуктуациями плотности газа [3]. Другие возможные причины, рассматриваемые в литературе, требуют наделения газожидкостных систем некоторыми дополнительными свойствами. Ряд авторов считают, что существование стабильных зародышей газа связано со следами поверхностно-активных веществ, которые адсорбируются на поверхности пузырька и создают пленку, упругость которой препятствует его схлопыванию [5, 6]. В работе [7] предполагается, что стабилизация пузырьков обеспечивается выделением на их поверхности пленок поверхностно-активных веществ с отрицательным поверхностным натяжением. Однако в рамках этой модели возникает проблема устойчивости поверхности раздела относительно малых отклонений от сферической формы. Стабилизация пузырьков может быть также связана со взаимодействием между ионами, адсорбированными на поверхности пузырька, и свободными ионами, находящимися в объеме жидкости [5].

В настоящей работе выделены уравнения, описывающие нестационарную фильтрацию газожидкостных систем в предпереходных условиях. Показано, что если скорость образования зародышей газа достаточно велика, то стационарные режимы фильтрации могут стать неустойчивыми. При этом возникают периодические автоколебания, усложнение которых может привести к детерминированному хаосу — сложным непредсказуемым движениям в отсутствие источников случайных шумов [8, 9]. Этот результат еще раз подтверждает, что стохастические колебания, возникающие при движении реологически сложных жидкостей со скоростями значительно ниже критических скоростей рейнольдсовой турбулентности, есть проявление детерминированного хаоса. Ранее эта связь отмечалась в работах [10, 11].

1. Уравнения нестационарной фильтрации. Анализ экспериментальных данных [1—4] позволяет предположить, что при движении газожидкостной смеси в направлении уменьшения давления происходит образование и рост микрозародышей газа, часть из которых может быть вынесена фильтрационным потоком, а часть забивает наиболее узкие места пор, уменьшая тем самым проницаемость пористой среды.

Уравнение неразрывности записывается в виде

$$m\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1}$$

где m — пористость, β_0 — сжимаемость пористой среды, v — скорость фильтрации, определяемая законом Дарси

$$v = -\frac{k(s)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Здесь μ — вязкость жидкости, $k(s)$ — коэффициент проницаемости, зависящий от s — концентрации зародышей газа, адсорбировавшихся на стенках пор. Для простоты зависимостью вязкости μ от концентрации зародышей в объеме жидкости пренебрегаем.

Изменение числа микрозародышей определяется уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha s + q \tag{1.2}$$

где α — коэффициент, определяющий скорость выноса микрозародышей, q — скорость их воспроизводства.

Будем считать, что уже существующие зародыши являются центрами, на которых со скоростью, пропорциональной скорости уменьшения давления, образуются новые зародыши. Учитывая также время τ, необходимое для роста и перераспределения микрозародышей, получим соотношение

$$q(x, t) = -as(x, t-\tau)\frac{dp(x, t-\tau)}{dt} \tag{1.3}$$

где a — коэффициент пропорциональности, dp/dt — скорость изменения давления, определяемая выражением

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v}{m}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.4}$$

Первый член суммы (1.4) обычно мал [12], поэтому будем в дальнейшем им пренебрегать.

Из (1.1)—(1.4) следует, что фильтрация газожидкостных систем с микрозародышами газа описывается системой уравнений

$$m\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k(s)}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right] \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \alpha s = \left[\varphi(s)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right]_\tau \tag{1.6}$$

$$\varphi(s) = \frac{ask(s)}{m\mu}, \quad [g]_\tau \equiv g(t-\tau)$$

Рассмотрим стационарные решения системы (1.5)—(1.6), удовлетворяющие граничным условиям

$$p|_{x=0} = p_1, \quad p|_{x=l} = 0 \tag{1.7}$$

и устойчивость этих стационарных решений.

Положив $\partial p/\partial t = 0$, $\partial s/\partial t = 0$, получим из (1.5) и (1.6)

$$\frac{k(s)}{\mu}\frac{dp}{dx} = -v_0 = \text{const}, \quad \alpha s = \varphi(s)\left(\frac{dp}{dx}\right)^2$$

Эта система имеет очевидное решение $s = 0$, $p = p_0(x) = p_1(1 - x/l)$, которому соответствует значение скорости фильтрации $v_0 = k(0)p_1/l\mu$. Стационарные значения s, отличные от нуля, определяются из уравнения

$$k(s) = a\mu v_0^2/\alpha \tag{1.8}$$

Если уравнение (1.8) имеет решение, то стационарные решения системы (1.5)—(1.6) не единственны. Они представляют собой пространственные структуры, состоящие из «доменов» — областей с различными значениями $s = s_i = \text{const}$, характеризующихся постоянным градиентом давления $\nabla p_i = -\sqrt{\alpha s_i/\varphi(s_i)}$. Такие структуры рассматривались ранее в работах [13, 14]. Граничные условия (1.7) выполняются, если

$$-\sum_i \nabla p_i l_i = p_1, \quad \left(\sum_i l_i = l\right)$$

где l_i — суммарная протяженность «доменов» со значениями $s = s_i$.

Конкретизируем вид функции $k(s)$, приняв

$$k(s) = k_0[\exp(-\gamma s^n) + G]$$

где γ, n, G, k_0 — положительные константы. Легко видеть, что при этом уравнение (1.8) может иметь только одно решение, которое мы будем обозначать через s_1.

Проведем линейный анализ устойчивости стационарных режимов фильтрации с однородным по x распределением микрозародышей. Пусть $s' = s - s_i$, $p' = p - p_0(x)$ — малые отклонения от стационарных значений ($i = 0$ или 1). Переходя к безразмерным переменным, получим из (1.5)—(1.7)

$$\Lambda\frac{\partial p'}{\partial t} = k_1(s_i)\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - k_1'(s_i)\frac{\partial s'}{\partial x} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + s' = A_1\left[\varphi_1'(s_i)s' - 2\varphi_1(s_i)\frac{\partial p'}{\partial x}\right]_\tau \tag{1.10}$$

$$p'|_{x=0} = p'|_{x=1} = 0 \tag{1.11}$$

$$x \to \frac{x}{l}, \quad t \to \frac{t}{t_*}, \quad \tau \to \frac{\tau}{t_*}, \quad t_* = \frac{1}{\alpha}$$

$$s' \to \frac{s'}{s_*}, \quad s_* = \gamma^{-1/n}, \quad p' \to \frac{p'}{p_1}$$

$$k_1(s) = \exp(-s^n) + G, \quad \varphi_1(s) = sk_1(s)$$

$$A_1 = \frac{ak_0p_1^2}{\alpha m\mu l^2}, \quad \lambda = \frac{m\mu\beta_0 l^2}{k_0 t_*}$$

где λ — безразмерное время пьезопроводности.

Разложив функции s' и p' в ряде Фурье

$$p' = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(t) \sin(\mu_j - x), \quad s' = Y_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(t) \cos(\mu_j x)$$

где $\mu_j = j\pi$ получим из (1.9) и (1.10)

$$\frac{dY_0(t)}{dt} + Y_0(t) = rY_0(t - \tau) \tag{1.12}$$

$$\lambda_j \frac{dZ_j(t)}{dt} + Z_j(t) = k_1'(s_l) Y_j(t) \tag{1.13}$$

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + Y_j(t) = rY_j(t - \tau) - A_1 s_1 Z_j(t - \tau) \tag{1.14}$$

$$Z_j = \mu_j k_1(s_l) X_j, \quad \lambda_j = \frac{\lambda}{k_1(s_l)\mu_j^2}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

$$r = A_1 \varphi_1'(s_l)$$

Характеристическое уравнение, полученное из (1.12) подстановкой $Y_0 \sim e^{\varkappa t}$, имеет вид

$$\varkappa + 1 - r\exp(-\varkappa\tau) = 0$$

Анализ этого уравнения показывает, что точка равновесия $Y_0 = 0$ устойчива, если $|r| < 1$, апериодически неустойчива при $r > 1$ и колебательно-неустойчива при $r < -1$ и достаточно больших τ [15]. Характеристическое уравнение, соответствующее системе (1.13), (1.14), записывается в виде

$$\lambda_j\varkappa^2 + (\lambda_j + 1)\varkappa + 1 - e^{-\varkappa\tau}[r(\lambda_j\varkappa + 1) - F] = 0 \tag{1.15}$$

$$F = 2A_1k_1's_l$$

Для его исследования воспользуемся методом D-разбиений [15], который заключается в выделении на плоскости параметров областей с различным порядком устойчивости. Области, в которых характеристическое уравнение k корней с положительной действительной частью, обозначаются символом $D(k)$. Поскольку границы этих областей соответствуют переходу корней через мнимую ось, то в параметрическом виде они могут быть определены, если в (1.15) положить $\varkappa = i\omega$. При этом получается система

$$r(\cos\omega\tau + \lambda_j\omega\sin\omega\tau) - F\cos\omega\tau = 1 - \lambda_j\omega^2$$

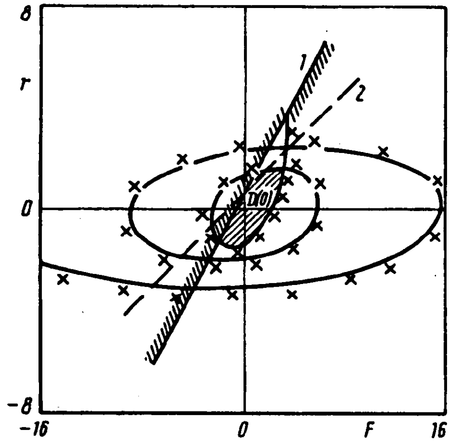
$$r(\lambda_j\omega\cos\omega\tau - \sin\omega\tau) + F\sin\omega\tau = (\lambda_j + 1)\omega \tag{1.16}$$

определитель которой $\Delta = \lambda_j\omega$ равен нулю при $\omega = 0$. Этому значению ω соответствует особая прямая $r = F + 1$. При $\omega \neq 0$ границы D-областей задаются уравнениями

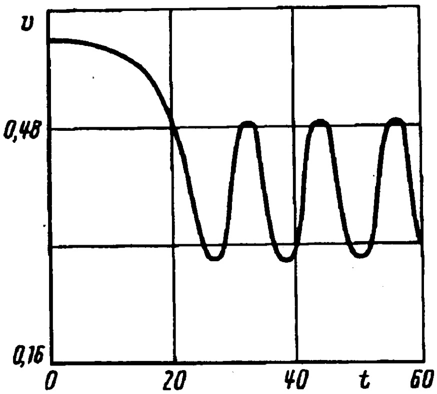
$$F = (1 + \lambda_j^2\omega)(\omega\cos\omega\tau + \sin\omega\tau)\Delta^{-1}$$

$$r = [(1 - \lambda_j\omega^2)\sin\omega\tau + (\lambda_j + 1)\omega\cos\omega\tau]\Delta^{-1}$$

$$\lim_{\omega\to 0} F = F_0 = \tau + 1, \quad \lim_{\omega\to 0} r = F_0 + 1$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для примера на фиг. 1 показано D-разбиение, полученное при $\tau = 5$ для значения $\lambda = 2$. Здесь прямые *1* и *2* представляет собой графики функций $r = 1 + F$ и $r = 1 + F/2$ соответственно. При нахождении области устойчивости $D(0)$ использовано то обстоятельство, что точка $F = 0$, $r = 0$ принадлежит ей, поскольку при этих значениях F и r оба корня уравнения (1.15) отрицательны.

При малых перепадах давления система (1.6)—(1.7) имеет единственное устойчивое стационарное решение, соответствующее значению $s = 0$. Увеличение перепада давления приводит к потере устойчивости этого решения. Поскольку при $s = 0$ $F = 0$, то это происходит при $r = A(1 + G)$. Одновременно появляется еще одно стационарное значение $s = s_1$, определяемое из уравнения

$$A_1 [\exp(-s_1^n) + G] = 1 \qquad (1.17)$$

Это значение существует до тех пор, пока величина A_1 не становится больше $1/G$. (Легко видеть, что при $A_1 G > 1$ уравнение (1.17) не имеет решения.) В точке $s = s_1$

$$r = A_1 (s_1 k_1 (s_1))' = A_1 [k_1(s_1) + s_1 k_1'(s_1)] = 1 + F/2$$

и $F < 0$, поэтому это состояние всегда неустойчиво (см. фиг. 1). Таким образом, при $A_1 > 1/(1 + G)$ система (1.5)—(1.7) не имеет устойчивых стационарных решений.

2. Численный анализ системы. Для того чтобы проанализировать особенности процессов фильтрации в области неустойчивости, вновь рассмотрим систему уравнений (1.5)—(1.6), которую можно переписать, используя ранее введенные переменные, в виде

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_1(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s = A_1 \left[\varphi_1(s) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \right]_\tau \qquad (2.2)$$

$$p|_{x=0} = 1, \quad p|_{x=1} = 0 \qquad (2.3)$$

Для простоты пренебрежем в уравнении (2.1) величиной λ. Это упрощение позволяет представить нестационарные процессы, описываемые моделью (2.1)—(2.3), в виде эволюции пространственных структур из доменов, в пределах каждого из которых концентрация микрозародышей и градиент давления постоянны.

Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ — интервал, занятый i-м доменом, s_i и ∇p_i — концентрация микрозародышей и градиент давления в этом домене, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$.

Из (2.1) при $\lambda = 0$ получим цепочку равенств

$$k_1(s_1)\nabla p_1 = k_1(s_2)\nabla p_2 = \ldots = k_1(s_m)\nabla p_m$$

или

$$k_1^*(s_1)(1-p_1) = k_1^*(s_2)(p_1-p_2) = \ldots = k_1^*(s_m)\,p_{m-1} \tag{2.4}$$

$$p_i = p|_{x=x_i},\quad k_1^*(s_i) = \frac{k_1(s_i)}{(x_i - x_{i-1})}$$

Решив систему (2.4) относительно p_i ($i = 1, \ldots, m-1$), можно представить ∇p_i в виде функций величин $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Подставив эти значения ∇p_i в (3.2), получим систему уравнений

$$\frac{ds_i}{dt} + s_i = A_1\varphi_1(s_i(t-\tau))\,\nabla p_i^2(s_1(t-\tau), \ldots, s_m(t-\tau)),\quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2.5}$$

которая является дискретным аналогом системы (2.1)—(2.3) в предположении малости времени пьезопроводности.

Для того чтобы выявить особенности поведения системы в области неустойчивости стационарных режимов фильтрации, были проведены численные расчеты при $m = 2$. Рассматривалась система двух уравнений

$$\frac{ds_1}{dt} + s_1 = A\,[s_1k_1(s_1)(1-p)^2]_\tau,\quad \frac{ds_2}{dt} + s_2 = A\,[s_2k_1(s_2)\,p^2]_\tau \tag{2.6}$$

$$p = \left(\frac{k_1(s_2)}{k_1(s_1)} + 1\right)^{-1},\quad A = 4A_1$$

при следующих значениях параметров: $n = 10$, $G = 0{,}2$, $\tau = 5$.

Расчеты показали, что при $A < A^{(1)} = 4/(1+G) = 3{,}33\ldots$ система (2.6) имеет устойчивую точку равновесия $s_1 = s_2 = 0$, которая соответствует стационарной фильтрации со скоростью фильтрации $v = k_0p_1/\mu l$.

При $A > A^{(1)}$, как показано выше, однородные по x распределения микрозародышей являются неустойчивыми. До тех пор пока величина A не достигнет некоторого критического значения $A^{(2)} > A^{(1)}$, система (2.6) имеет две устойчивые точки равновесия: $s_1 = s_c$, $s_2 = 0$ и $s_1 = 0$, $s_2 = s_c$. То, какая из этих точек реализуется, зависит от начальных условий: к нулю стремится та величина s_i, которая в начальный момент времени меньше.

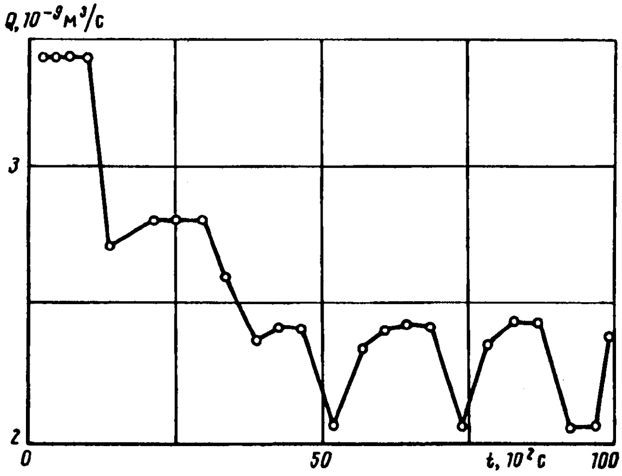
Таким образом, при $A^{(1)} < A < A^{(2)}$ устанавливается стационарный режим фильтрации с неоднородным распределением микрозародышей.

При $A > A^{(2)}$ рождаются два устойчивых предельных цикла, для которых одна из величин s_i равна нулю, а вторая периодически изменяется. На фиг. 2 приведен график зависимости скорости фильтрации от времени $v = v(t)$, полученный при $A = 3{,}9$.

При $A = A^{(3)} > A^{(2)}$ начинается каскад бифуркаций удвоения периода, заканчивающийся при $A \approx 4{,}3$ переходом к хаотическому движению.

Дальнейшее увеличение величины A через последовательность обратных бифуркаций Фейгенбаума приводит к переходу от странного аттрактора к предельному циклу, а затем вновь через последовательность удвоений периода — к хаотическому режиму колебаний, после чего притягивающей точкой становится бесконечность: $s_1, s_2 \to \infty$. Проявление последней цепочки бифуркаций, ведущей к хаосу, связано, видимо, с тем, что при $AG(1-p)^2 > 1$ вновь существует только одно стационарное значение $s = s_0 = 0$.

4. Выводы. При малых перепадах давления скорость выноса микрозародышей газа превосходит скорость их воспроизводства, поэтому концентрация микрозародышей равна нулю. Увеличение перепада давления приводит к тому, что в пористой среде накапливаются микрозародыши, забивающие наиболее узкие места поровых каналов, что приводит к уменьшению расхода. При этом состоянии с однородным по пространству распределением микрозародышей



Фиг. 3

становятся неустойчивыми — происходит самопроизвольное разбиение на домены с различающимися значениями концентрации микрозародышей. Дальнейшее увеличение перепада давления приводит к возникновению автоколебаний, которые по сценарию М. Фейгенбаума переходят в динамический хаос.

Теоретические результаты, полученные выше, подтверждаются экспериментами, проведенными Г. Х. Меликовым (Азербайджанская гос. нефтяная академия), который исследовал колебания расхода жидкости Q, возникающие при фильтрации трансформаторного масла с растворенным в нем природным газом в предпереходных условиях. Для примера на фиг. 3 приведена кривая $Q = Q(t)$, полученная при значениях давления на входе и выходе модели пласта, равных 7 и 4,5 МПа (давление насыщения 3,7 МПа). Отметим качественную схожесть этой кривой с расчетной кривой, показанной на фиг. 2.

Автор выражает глубокую благодарность А. Х. Мирзаджанзаде за плодотворные идеи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирзаджанзаде А. Х., Максудов Ф. Г., Нигматулин Р. И. и др.* Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче. Баку: Элм, 1985. 220 с.
2. *Мамед-заде А. М., Мамед-заде Р. Б., Меликов Г. Х., Салаватов Т. Ш.* Об эффекте зародышеобразования в геторогенных средах и применение его в нефтедобыче//Оптимизация процессов нефтегазодобычи. Баку: АЗИНЕФТЕХИМ, 1987. С. 11—18.
3. *Болотов А. А., Мирзаджанзаде А. Х., Нестеров И. И.* Реологические свойства растворов газов в жидкости в области давления насыщения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 172—175.
4. *Меликов Г. Х., Азизов М. Г.* Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах//Изв. вузов. Нефть и газ. 1988. № 10. С. 35—38.
5. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хаммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
6. *Сиротюк М. Г.* Упругость и прочность стабильных газовых пузырьков в воде//Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 4. С. 567—569.
7. *Буевич Ю. А.* О докритическом образовании зародышей в жидкости с поверхностно-активным веществом (ПАВ)//Инж.-физ. журн. 1987. Т. 52. № 3. С. 394—402.
8. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987. 423 с.
9. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 311 с.
10. *Хасанов М. М., Ягубов И. Н.* О колебаниях расхода при фильтрации полимерных растворов//Инж.-физ. журн. 1990. Т. 59. № 2. С. 211—215.

11. *Ахатов И. Ш., Хасанов М. М., Хусаинов И. Г.* Авто- и стохастические колебания в гидродинамике неньютоновских жидкостей//ПММ. 1993. Т. 57. № 1. С. 71—76.
12. *Петрушевский Е. И., Разамат М. С.* О влиянии неравновесности на процесс выделения конденсата из газа//Изв. вузов. Нефть и газ. 1963. № 11. С. 61—66.
13. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при сверханомалии вязкости//Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 5. С. 1180—1184.
14. *Джумагазиева С. Х.* Численное исследование одного уравнения с частными производными//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 23. № 4. С. 839—847.
15. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.

Уфа

Поступила в редакцию
12.I.1993