

УДК 532.516.013.4

© 1994 г. Р. Ф. ГАНИЕВ, Ю. Б. МАЛЫХ

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ НА ЛИНЕЙНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Рассматривается линейная устойчивость баротропного течения жидкости в круглой абсолютно жесткой трубе. Исследовано поведение возмущений в виде моногармонических волн, обусловленных как вязкостью, так и сжимаемостью жидкости. Показано, что сжимаемость жидкости весьма слабо влияет на первый тип возмущений и существенно влияет на возмущения второго типа, причем последние могут быть более опасными в смысле возникновения неустойчивости даже для слабо сжимаемых течений.

1. Постановка задачи. Рассматривается баротропное течение вязкой жидкости по неограниченной абсолютно жесткой трубе круглого сечения. Течение описывается уравнениями Навье—Стокса и состояния в безразмерном виде:

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{Fr} F + \frac{1}{Re} \left[\Delta V + \left(\eta - \frac{2}{3} \right) \nabla (\nabla V) \right]$$

$$C \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0$$

$$P = P(\rho), \quad C = \frac{RU}{T}, \quad Fr = U^{-2}RF, \quad Re = \frac{UR}{v} \quad (1.1)$$

где R — радиус трубы (масштаб длины); U — невозмущенная скорость жидкости на оси трубы (масштаб скорости); v, η, ρ_0 — вязкость, вторая вязкость и невозмущенное значение плотности жидкости соответственно; F — внешняя массовая сила (с масштабом F); t, V, P и ρ — безразмерные время, скорость, давление и плотность жидкости с масштабами $R/U, U, \rho U^2$ и ρ_0 соответственно.

В качестве граничных условий выбираются условие прилипания жидкости к внутренней поверхности трубы, а также ограниченности и непрерывной дифференцируемости неизвестных величин в декартовой системе координат. Для удобства же используется цилиндрическая система координат $r\theta z$ с базисом $\{e_r, e_\theta, e_z\}$, ось z которой совпадает с осью трубы. Предполагается, что труба неподвижно закреплена, а внешние массовые силы F , приложенные к жидкости, имеют такое значение, которое допускает стационарное решение системы (1.1), с указанными граничными условиями следующего вида:

$$V = V_0 = V_{0z}(r) e_z, \quad P = P_0 = \text{const}$$

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad V_{0z} = 1 - r^2 \quad (1.2)$$

Это решение соответствует течению Гагена — Пуазейля в круглой трубе.

Для исследования устойчивости этого течения рассмотрим бесконечно малые его возмущения

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}, \quad P = P_0 + p, \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (1.3)$$

где \mathbf{v} , p , ρ — возмущения скорости, давления и плотности жидкости соответственно.

Разлагая зависимость $p(\rho)$ в ряд Тейлора около ρ_0 , получим

$$p = \frac{1}{M_s^2} \rho, \quad M_s = \frac{U}{a_0}, \quad a_0 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

где a_0 — размерная скорость звука в жидкости, а M_s — число Маха жидкости.

Подставляя соотношения (1.2)–(1.4) в систему (1.1) и граничные условия исходной краевой задачи, пренебрегая нелинейными величинами (а также исключая из системы (1.1) возмущение плотности жидкости), получим линейную краевую задачу. Исключив из системы (1.1), решение будем искать в виде бегущих моногармонических волн

$$\mathbf{v}(r, \theta, z, t) = \operatorname{Real} [\omega(r) \exp(ik)], \quad p(r, \theta, z, t) = \operatorname{Real} [p(r) \exp(ik)]$$

$$\omega(r) = \omega_r e_r + \omega_\theta e_\theta + \omega_z e_z \quad (1.5)$$

где $k = \alpha(z - t) + m\theta$, $\omega(r)$ и $p(r)$ — амплитуды возмущений скорости и давления жидкости, α и m — продольное и азимутальное волновые числа, i — мнимая единица.

Подставляя соотношения (1.5) в систему уравнений линейной краевой задачи получим для амплитуд возмущений скорости и давления жидкости

$$\begin{aligned} \omega_r' &= -\frac{1}{r} - \frac{im}{r} \omega_\theta - i\alpha \omega_z - i\alpha M_s^2 (V_{0z} - C) p \\ \omega_\theta'' &= -\frac{2im}{r^2} w_r + \left(a + \frac{1}{r^2} \right) \omega_\theta - \frac{1}{r} \omega_\theta' + \frac{i\alpha}{r} \left[\frac{m}{\alpha} + i M_s^2 \left(\eta - \frac{2}{3} \right) (V_{0z} - C) m \right] p \\ \omega_z'' &= \operatorname{Re} V_{0z}' w_r + a \omega_z - \frac{1}{r} \omega_z' + i\alpha \left[\operatorname{Re} + i\alpha M_s^2 \left(\eta - \frac{2}{3} \right) (V_{0z} - C) \right] p \quad (1.6) \\ i\alpha \operatorname{Re} p'' &= -\frac{i\alpha a}{1+b} \omega_r + \frac{ma}{r^2(1+b)} \omega_\theta + \frac{\alpha^2}{1+b} \omega_z' + \\ &+ \frac{\alpha m}{r(1+b)} \omega_\theta' + \alpha^2 M_s^2 V_{0z}' \left(\eta + \frac{1}{3} \right) p \\ a &= i\alpha \operatorname{Re} (V_{0z} - C) + \frac{m^2}{r^2} + \alpha^2, \quad b = \frac{i\alpha M_s^2 (\eta + 1/3) (V_{0z} - C)}{\operatorname{Re}} \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по r .

Граничные условия дают следующие соотношения для амплитуды возмущения скорости:

$$\omega_r(1) = \omega_\theta(1) = \omega_z(1) = 0 \quad (1.7)$$

$$\omega_r(0) = \omega_\theta(0) = \omega_z'(0) = 0 \quad (m = 0) \quad (1.8)$$

$$\omega_r(0) \pm i\omega_\theta(0) = \omega_z(0) = \omega_\theta'(0) = 0 \quad (m = 1)$$

$$\omega_r(0) = \omega_\theta(0) = \omega_z(0) = 0 \quad (m \geq 2)$$

Уравнения (1.6) и граничные условия (1.7)–(1.8) образуют линейную краевую задачу относительно амплитуд возмущений скорости и давления, причем в качестве искомых собственных значений выбирается комплексная величина $C = C_r + iC_i$. Тогда исследование устойчивости течения Гагена — Пузейля заключается в определении значений C для заданных значений параметров α , m , Re и M_s . Отрицательные значения C_i соответствуют устойчивости, а положительные — неустойчивости.

2. Методика исследования. Собственные значения С краевой задачи (1.6)–(1.8) определялись численно по методике, подробно изложенной в работе [4], где рассматривалась устойчивость течения несжимаемой вязкой жидкости в круглой вязкоупругой трубе. Заметим, что краевая задача (1.6)–(1.8) при $M_s = 0$ совпадает с приведенной в работе [4] для случая абсолютно жесткой трубы.

При нахождении собственных значений для случая ожидаемой жидкости ($M_s \neq 0$) используются два подхода. Первый заключается в следующем. В качестве начального приближения выбираются собственные значения из спектра, соответствующего случаю вязкой несжимаемой жидкости ($M_s = 0$) и который для краткости будем называть «вязким». Путем непрерывного продолжения этих собственных значений по параметру M_s от 0 до некоторого значения $M_s^* \neq 0$ и дальнейшего продолжения при $M_s = M_s^*$ по одному из выбранных параметров (α или Re) определялись спектральные зависимости $C(\alpha)$ и $C(Re)$ для заданного значения числа Маха.

Второй подход заключается в выборе начального приближения из спектра собственных значений, порожденного сжимаемостью жидкости (будем называть его «акустическим»). Так как при $M_s = 0$ этот спектр вырождается, возникает необходимость получить начальное приближение при ненулевом значении числа Маха. В настоящей работе собственные значения, принадлежащие акустическому спектру, определялись путем непрерывного продолжения собственных значений вспомогательной краевой задачи, полученной из (1.6)–(1.8) путем следующей замены переменных:

$$\omega^t(r) = k_1 \omega_r(r), \quad \omega_\theta^t(r) = k_2 \omega_\theta(r), \quad \omega_z^t(r) = k_3 \omega_z(r), \quad k_1, k_2, k_3 \in (0, 1) \quad (2.1)$$

При $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ вновь полученная краевая задача совпадает с задачей (1.6)–(1.8). Поочередно приравнивая нулю произвольную пару коэффициентов k_i , аналитически определяем спектр полученной одномерной краевой задачи, а затем непрерывным продолжением обнуленных коэффициентов от 0 до 1 получаем собственное значение задачи (1.6)–(1.8) для выбранных значений параметров α , Re и M_s . Ниже приведены выражения для определения начальных приближений, полученные соответственно для продольных ($k_3 \neq 0$) и поперечных ($k_1 \neq 0$) осесимметричных ($m = 0$) возмущений

$$C_n = -\frac{iU_n^2}{2\alpha Re} \pm \sqrt{\frac{U_n^4}{4\alpha^2 Re^2} + \frac{1}{M_s^2}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.2)$$

$$C_n = -\frac{iU_n^2(\eta + 1/3)}{2\alpha Re} \pm \frac{U_n}{\alpha} \sqrt{-\frac{U_n^2(\eta + 1/3)^2}{4Re^2} + \frac{1}{M_s^2}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.3)$$

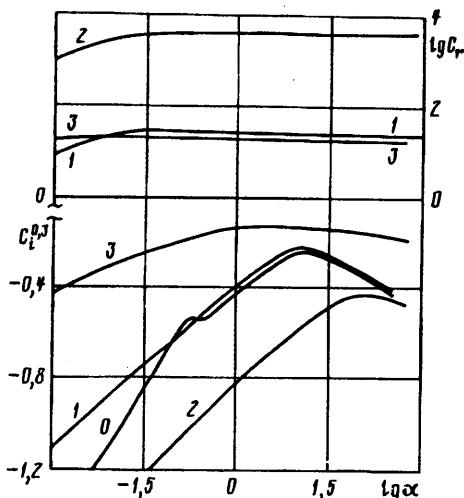
Полученное таким образом собственное значение используется в качестве начального приближения для построения спектральных кривых $C(\alpha)$, $C(Re)$ и $C(M_s)$ при $M_s \neq 0$. Таким способом удалось обнаружить начальные приближения только для случая $m = 0$.

Вычисления проводились с двойной точностью на 32-разрядном персональном компьютере с математическим сопроцессором типа Weitec-3167. При этом время вычисления характеристической функции для α Re $M_s \approx 10^6$ составляло несколько секунд.

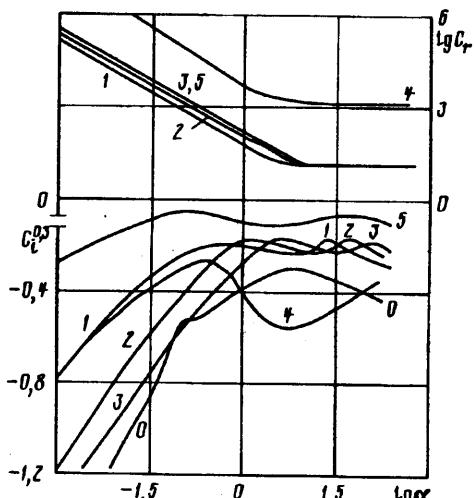
Численное исследование проводилось в широком диапазоне значений параметров задачи: $0 \leq \alpha \leq 400$, $0 \leq Re \leq 10^6$, $0 \leq m \leq 5$, $0 \leq M_s \leq 0.5$.

Изменение абсолютной величины собственных значений из вязкого спектра не превышали 5–10%. Это хорошо согласуется с результатами, полученными в (1.2). В связи с этим подробно описываются лишь результаты для собственных значений из акустического спектра.

Спектральные кривые, соответствующие продольным возмущениям, получены непрерывным продолжением начального приближения, определенного по соотношению (2.2). Нумерация собственных значений совпадает с номером n начального приближения. Непрерывное продолжение начальных



Фиг. 1



Фиг. 2

приближений по коэффициентам k_1 и k_2 от 0 до 1 удалось осуществить только для $n = 1$. Непрерывное продолжение остальных начальных приближений приводило к их неограниченному росту при приближении значений коэффициентов k_1 и k_2 к единице.

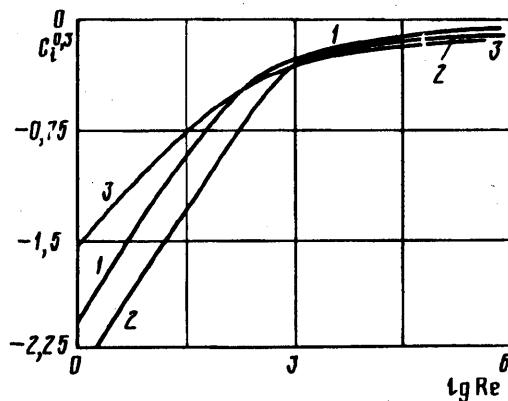
3. Результаты. Спектральные кривые для продольного акустического возмущения приведены на фиг. 1, где кривая 0 соответствует самому опасному вязкому возмущению при значениях числа Рейнольдса Re , равном $5 \cdot 10^3$ и числа Маха M_x , равном $7 \cdot 10^{-2}$, кривые 1, 2 и 3 — акустическим возмущениям для: $Re = 5 \cdot 10^3$ и $M_x = 7 \cdot 10^{-2}$; $Re = 5 \cdot 10^3$ и $M_x = 7 \cdot 10^{-4}$; $Re = 10^6$ и $M_x = 7 \cdot 10^{-2}$ соответственно. Характерный вид зависимостей $C_l(\alpha)$ как вязких, так и акустических возмущений совпадает, причем при числе Маха, равном $7 \cdot 10^{-2}$, оба возмущения затухают практически одинаково. Уменьшение сжимаемости жидкости приводит к усилению затухания акустических возмущений, в то время как степень затухания вязких возмущений практически не меняется.

Увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению абсолютного значения C_l и, следовательно, к меньшему затуханию акустических возмущений (вязкие возмущения при изменении числа Рейнольдса ведут себя аналогично [3, 4]).

Более существенные различия поведения вязких и продольных акустических возмущений проявляются в их фазовой скорости C_r . Фазовая скорость вязких возмущений не может быть больше максимальной скорости течения Гагена — Пуазеля [3, 4], а фазовая скорость акустического может ее значительно превышать. Причем безразмерная фазовая скорость последних близка к M_x^{-1} , т. е. к безразмерной скорости распространения звука в жидкости, что дает основание связать продольное акустическое возмущение с хорошо известными плоскими звуковыми волнами в трубопроводе.

На фиг. 1 видно, что фазовая скорость продольного акустического возмущения незначительно уменьшается при уменьшении волнового числа, т. е. имеет место незначительная дисперсия.

Значительное различие имеется в поведении вязких и поперечных акустических возмущений. Каждое из определенных по соотношению (2.3) начальных приближений имеет непрерывное продолжение при $k_1 = 1$. Полученные для них спектральные кривые приведены на фиг. 2, где кривая 0 соответствует кривой 0 на фиг. 1, а кривые 1, 2, 3 и 10 соответствуют первым трем и 10-му собственным значениям для $Re = 5 \cdot 10^3$ и $M_x = 7 \cdot 10^{-2}$ (в порядке увеличения U_n). В отличие от рассмотренных выше случаев эти спектральные кривые имеют два ярко выраженных максимума в коротковолновой ($\alpha \approx 10 - 100$) и



Фиг. 3

длинноволновой ($\alpha \approx 1$) областях, причем значения C_l , соответствующие максимумам, близки и значительно больше максимальных значений для вязких и продольного акустических возмущений. Это свидетельствует о том, что поперечные акустические возмущения наиболее опасные из известных.

Оба максимума на кривых 1, 2 и 3 (фиг. 2) при увеличении номера n смещаются в коротковолновую область практически без уменьшения значения C_l , следовательно, одновременно могут представлять опасность (в смысле возникновения неустойчивости течения Гагена — Пуазейля) возмущения с различными длинами волн и различными фазовыми скоростями. Кроме того, уменьшение числа Маха жидкости до очень малых значений, например до $7 \cdot 10^{-4}$ (это соответствует сжимаемости воды при скоростях течения приблизительно 1 м/с), не приводит к столь существенному увеличению степени затухания, как в случае продольного возмущения. Спектральная кривая, соответствующая $M_x = 7 \cdot 10^{-4}$ и $Re = 5 \cdot 10^3$, изображена на фиг. 2 кривой 5.

Зависимость собственных значений поперечных акустических возмущений от значений числа Рейнольдса типична — степень их затухания уменьшается при его увеличении. Это видно как из формы кривой 4 на фиг. 2, соответствующей третьему собственному значению при значении числа Рейнольдса $Re = 10^6$ и числа Маха $M_x = 7 \cdot 10^{-2}$, так и из кривых на фиг. 3, где кривыми 1, 2 и 3 изображены соответственно зависимости $C_l(Re)$ для продольного, первого и третьего поперечных акустических возмущений. Кривые на фиг. 3 получены непрерывным продолжением собственных значений, соответствующих первым максимумам на кривых 3 и 5 фиг. 2 и кривой 1 фиг. 1 соответственно. Фазовая скорость этих возмущений при изменении числа Рейнольдса практически не меняется.

Другой отличительной особенностью поперечных акустических возмущений является существенная зависимость их фазовой скорости от длины волны возмущения. Сильная их дисперсия наблюдается в длинноволновой части спектра (см. фиг. 2, a), при $\alpha < 1$, причем величина фазовой скорости в этой области весьма велика и уменьшается до значений, совпадающих с фазовой скоростью продольного возмущения при значениях α , близких к 10. В то же время можно заметить, что произведение αC , сильно диспергирующих возмущений практически постоянно, т. е. частота соответствующих поперечных акустических возмущений неизменна и равна минимально возможной. При дальнейшем увеличении α частота возмущений увеличивается. Таким образом, для каждого из исследованных поперечных акустических возмущений существует нижний предел значений их частоты, причем можно заметить тенденцию к сужению частотной области при увеличении порядковых номеров соответствующих собственных значений.

В результате исследования поведения лишь некоторых возмущений, соответствующих собственным значениям из акустического спектра, можно сделать вывод об их существенном влиянии на устойчивость течения Гагена — Пуазейля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линь Цзяцзяо*. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
4. *Ганцев Р. Ф., Малых Ю. Б., Украинский Л. Е.* Линейная устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой вязкоупругой трубе//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 126—134.

Москва

Поступила в редакцию
8.X.1991