

УДК 532.525:532.529:533.6.011.5

© 1994 г. Г. И. АФОНИН, В. Г. БУТОВ

## ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЧАСТЕЙ СОПЕЛ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

В рамках модели неравновесного полидисперсного двухфазного течения исследуется структура оптимальной сверхзвуковой части контура осесимметричного сопла Лавала. Основное внимание при постановке вариационной задачи уделяется учету ограничения, позволяющего построить оптимальный контур, на который либо не выпадают конденсированные частицы, либо массовая доля выпадающих частиц не превышает заданной величины.

Исследованию и решению вариационной задачи о построении сверхзвуковой части плоских и осесимметричных сопел при неравновесном монодисперсном двухфазном течении посвящены работы [1—5]. В [4] с использованием общего метода неопределенных множителей Лагранжа в газовой динамике [6] рассмотрена наиболее общая возможная оптимальная конфигурация контура. Показано, что оптимальный контур может содержать ряд внутренних точек излома. Они являются начальными и конечными точками участков одностороннего экстремума или появляются из-за того, что часть оси симметрии входит в границу области определенности оптимального контура.

Приведенные в работах [3, 5] результаты численного построения оптимальных контуров опираются на постановку вариационной задачи, которая не приводит к особенностям в оптимальной конфигурации контура, рассмотренным в [4]. Однако для полидисперсных течений (с диапазоном размеров частиц от долей микрона до десятков микрон) построенные в [3, 5] оптимальные контуры обладают недостатком — на них вследствие инерционности выпадают конденсированные частицы. Учитывая, что даже небольшие массовые потоки нагретых жидких частиц, выпадающих с большими скоростями (2—3 км/с) на стенку сопла, могут привести к существенной эрозии ее, в постановке вариационной задачи должно быть соответствующее ограничение, позволяющее избежать этого нежелательного явления.

В [4] таким ограничением является заданное расстояние между стенкой сопла и предельной траекторией частиц, выше которой их нет. Постановка вариационной задачи из [4] может быть применена и для полидисперсного течения, но численная реализация ее в рамках общего метода множителей Лагранжа становится чрезвычайно сложной.

В [6] из семейства контуров, близких к оптимальным для равновесного двухфазного течения (т. е. без учета скоростного и теплового запаздывания между газом и частицами), выбирался наилучший по реализуемому удельному импульсу, концевая часть которого затем отгибалась, чтобы избежать выпадения частиц. Построенный таким образом контур сопла не является оптимальным, хотя в некоторых случаях (например, при малой весовой доле частиц конденсата) близок к нему.

В работе [7] был построен оптимальный контур для полидисперсного течения.

При учете ограничения на возможное выпадение частиц использовался метод приведенного градиента, обоснованный и в основном применяемый в случае линейных ограничений. Для проведения широких исследований структуры оптимального решения подход работы [7] не эффективен.

Ниже при построении оптимальных контуров учтено условие, обеспечивающее невыпадение на них конденсированных частиц. Это условие сформулировано в виде задания минимально допустимого расстояния между стенкой и предельными линиями тока частиц каждой из фракций. Показано, что это условие существенно влияет на форму оптимального контура.

1. Пусть  $x, y$  — прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, причем ось  $x$  направлена по оси симметрии слева направо. Стационарное полидисперсное двухфазное течение (см., например, [7, 8]) характеризуется:  $\rho$  — плотностью,  $p$  — давлением,  $V = (u, v)$  — вектором скорости газа,  $\rho_i$  — средней плотностью,  $T_i$  — температурой,  $n_i$  — числом частиц в единице объема смеси,  $V_i = (u_i, v_i)$  — вектором скорости «газа» частиц  $i$ -й фракции ( $i = 1, \dots, n$ ). Взаимодействие между газом и частицами определяется силой  $f = (f_x, f_y)$  и тепловым потоком  $q$  между ними, отнесенным к единице массы частицы  $i$ -й фракции.

В сверхзвуковой области течения, где варьируется контур, вследствие существенного уменьшения числа столкновений частиц различных размеров в единице объема можно пренебречь процессами их коагуляции и дробления [7, 8]. В дотранзвуковой области процессы коагуляции и дробления частиц существенны и их нужно учитывать для получения правильных параметров течения на входе в сверхзвуковую область.

Во многих моментах постановка вариационной задачи построения сверхзвуковой части контура сопла в случае полидисперсного двухфазного течения совпадает с аналогичной постановкой для случая монодисперсного течения, рассмотренного в [4]. Введем ограничение на расстояние между предельными траекториями частиц различных фракций и контуром сопла в виде неравенства

$$y(x) - y_i(x) = \Delta y_i > h > 0 \quad (1.1)$$

где  $y, y_i$  — ордината контура сопла и ордината предельной траектории частиц  $i$ -й фракции;  $h$  — заданная константа.

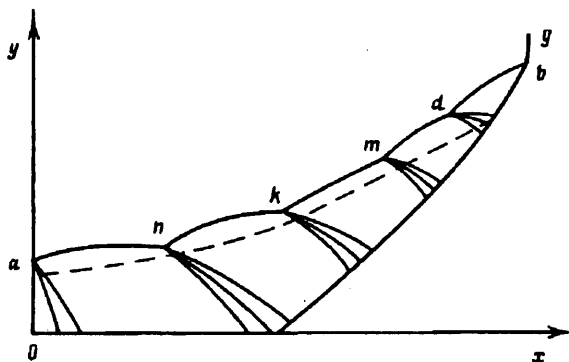
В полидисперсном течении весовая концентрация частиц некоторых фракций может быть незначительной с точки зрения вызываемой ими эрозии стенок сопла, поэтому ограничение (1.1) можно ослабить, отменив его для этих фракций. На фиг. 1 представлена возможная конфигурация искомого контура, доставляющего максимум функционалу

$$F = 2\pi \int_a^b (p - p^+) y y' dx \quad (1.2)$$

где  $p$  — давление,  $y'$  — производная по  $x$  вдоль контура сопла,  $p^+$  — давление окружающей среды.

Элементы структуры оптимального контура, такие, как излом в его начальной точке (или участок максимально допустимой кривизны) и торец, характерные для задач оптимального профилирования для чистого газа, сохраняются и здесь. Однако в отличие от оптимальных решений, имеющих место для чистого газа, здесь возникает новый элемент  $km$  [4], который определяет краевой экстремум, возникающий из-за ограничения (1.1).

Как следует из фиг. 1, оптимальный контур разделен внутренними точками излома на несколько участков. Точка  $n$  появляется в оптимальном контуре, если граница области его определенности содержит участок оси  $oh$ . Точки  $k$  и  $m$  — начало и конец участка краевого экстремума, где предельные траектории частиц отстоят от контура не ближе, чем на заданном расстоянии  $h$ . Точка  $d$  появляется из-за существенной неравномерности течения в зоне расслоения предельных траекторий частиц различных фракций [5]. Аналогичные точки излома имеют



Фиг. 1

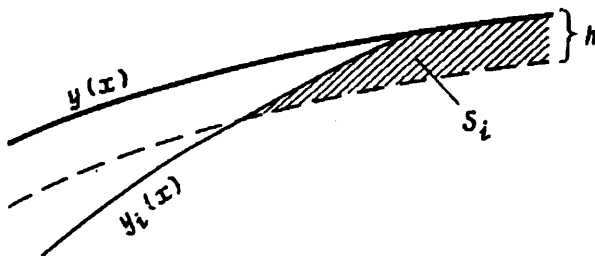
место при оптимальном профилировании в случае существенно неоднородных сверхзвуковых течений [9]. Причины возникновения в оптимальной конфигурации точки излома  $d$  исследованы с помощью линейного анализа двухфазного течения в [7, 10].

Наличие в оптимальном контуре большого числа точек излома делает процесс его построения достаточно сложным. Это прежде всего связано с необходимостью точного расчета течения в окрестности точек излома. Кроме того, точки излома делят оптимальный контур на участки, каждый из которых в соответствии с прямым методом должен аппроксимироваться отрезком разложения по базисным функциям с неизвестными коэффициентами. На первый взгляд может показаться, что в связи с этим функция цели должна зависеть от большого числа переменных. Тем не менее имеется ряд обстоятельств, о которых будет сказано ниже, позволяющих сделать упрощения, делающие эффективной реализацию прямого метода. Получаемые при этом контуры близки к оптимальным.

Вначале остановимся на выяснении влияния величины внутренних изломов на тягу, реализуемую искомым контуром. В практически важных случаях точки излома  $k$ ,  $m$  и  $d$  находятся на участке выравнивания течения, где давление газа сильно падает. Изломы в этих точках не могут быть большими. Это связано с тем, что возникающие при их обтекании пучки волн разрежения большой интенсивности могут существенно увеличить непараллельность и неоднородность потока, а также увеличить скоростное и температурное запаздывание частиц газа. Так, излом образующей на  $5^\circ$  в сечении со степенью расширения  $Y=5,4$  приводит к увеличению потерь на рассеяние в сечении с  $Y=8,5$  на  $0,8\%$ . Такая оценка получена с помощью методики расчета течения в окрестности угловой точки, предложенной в [11]. Кроме того, за такими точками излома могут быть зоны, где давление растет [11, 12]. Чтобы этого избежать, необходимо уменьшить величину излома.

Существенным по сравнению с точками  $k$ ,  $m$  и  $d$  может быть излом в точке  $n$ . Оптимальные контуры с таким изломом характерны для длинных сопел при неравновесном двухфазном течении, когда с ростом длины, если не учитывать трение, всегда есть прирост тяги сопла. Тем не менее в соответствии с высказанными выше соображениями величина излома в точке  $n$ , а также в начальной точке  $a$  не могут быть большими. Кроме того, в случае равновесного течения отказ от излома в начальной точке слабо влияет на величину тяги, реализуемой оптимальным контуром [11, 12]. По тем же причинам это в большей степени должно выполняться для неравновесного двухфазного течения.

Учитывая сказанное выше и присоединяясь к соображениям о роли изломов в оптимальных конфигурациях, приведенным в [11—14], можно ограничиться при оптимизации классом гладких контуров, допуская при этом разрыв кривизны



Фиг. 2

контура в точках  $n$ ,  $k$ ,  $m$  и  $d$ . В соответствии с положением этих точек при аппроксимации искомого контура может понадобиться разбиение его на участки.

Форма оптимального контура достаточно проста, наличие частиц в потоке как бы «распрямляет» его. Это объясняется тем, что предельные линии тока частиц должны следовать близко к контуру, чтобы уменьшить неоднородность потока. Поэтому наклон их мало отличается от наклона контура (линии тока газа) и его образующая близка к прямолинейной [7]. Поэтому следует ожидать, что при реализации прямого метода в аппроксимации каждого из участков контура не потребуется разложений с большим числом базисных функций.

2. В соответствии с прямым методом [15] искомый оптимальный контур или его участок аппроксимируется отрезком разложения по базисным функциям с неизвестными коэффициентами

$$y(x) = \sum_{k=0}^{M_i} c_k T_k \left( \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (2.1)$$

где  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  — абсциссы начала и конца  $i$ -го участка искомого контура,  $T_k$  — полиномы Чебышева, ортогональные на промежутке  $[-1, 1]$ ,  $c_k$  — неизвестные коэффициенты.

Условие стыковки участков накладывает некоторые связи на коэффициенты  $c_k$ . После подстановки (2.1) в (1.2) функционал перейдет в функцию оставшихся свободных коэффициентов  $c_k$  и  $x_i$  абсцисс точек стыковки, которые также являются свободными параметрами. Таким образом, необходимо найти максимум функции  $F = F(\mathbf{q})$ , где  $\mathbf{q} = (x_1, \dots, x_j, c_{k1}, \dots, c_{kr})$ .

Учтем условие (1.1) с помощью штрафной функции вида

$$\Phi = \left[ \sum_i \int_a^b \varphi_i(x) dx \right]^2 \quad (2.2)$$

$$\varphi_i(x) = h - \Delta y_i, \Delta y_i < h; \quad \varphi_i(x) = 0, \Delta y_i \geq h$$

Суммирование идет по всем фракциям частиц. Геометрический смысл интеграла для каждой фракции в выражении (2.2) ясен из рассмотрения фиг. 2. На нем  $S_i$  — площадь, ограниченная контуром сопла  $y = y(x)$  и линией, отстоящей на расстоянии  $h$  от него, слева — предельной траекторией  $i$ -й фракции  $y = y_i(x)$  и справа — срезом сопла, равна значению интеграла в (2.2).

Таким образом, задача поиска оптимального контура сводится к определению точки  $\mathbf{q} = (x_1, \dots, x_j, c_{k1}, \dots, c_{kr})$ , для которой имеет максимум функция

$$I = F(\mathbf{q}) - K\Phi(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

где  $K > 0$  — коэффициент штрафа.

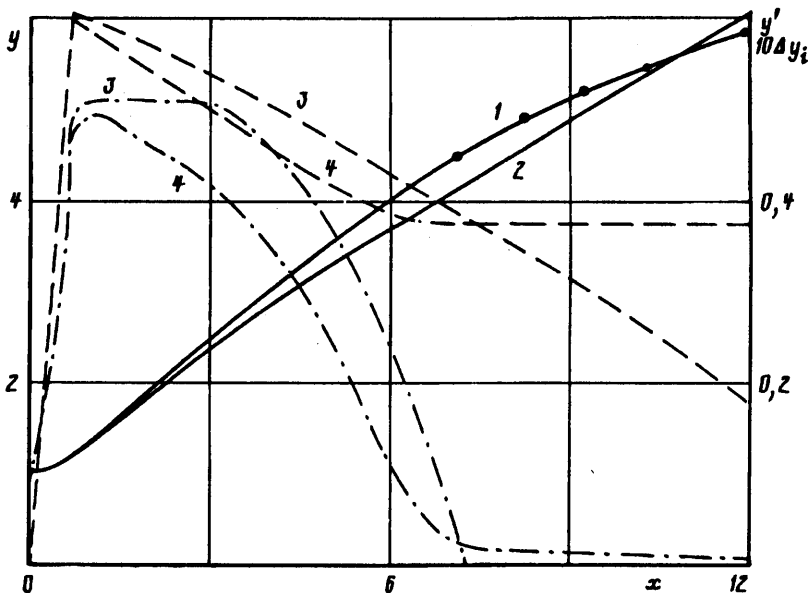
Несмотря на сделанные упрощения исходной вариационной задачи, будем называть оптимальные контуры, построенные прямым методом, имея при этом в виду оптимальность их в выбранном классе функций.

3. Для исследования структуры оптимального контура были проведены расчеты, в которых искомый контур аппроксимировался в зависимости от разбиений его на участки.

Построение оптимальных контуров проводилось при следующих исходных данных: показатель адиабаты равновесный  $\kappa = 1,17$ , давление  $P_0 = 5$  МПа и

Таблица 1

$n$	$N$	$x_a$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$y_b$	$y_b'$	$R_n$
1	3	0,6489	3,8681	2,3575	-0,3068	-0,0109	0	0	5,9079	0,1819	5,30388
2	3	0,6465	3,7997	2,3964	-0,1284	0,0617	0	0	6,1294	0,4295	5,28263
3	4	0,6415	3,7889	2,3926	-0,1367	0,0440	-0,0054	0	6,0834	0,3795	5,28648
4	5	0,6409	3,7840	2,3865	-0,1381	0,0446	-0,0052	-0,0003	6,0715	0,3775	5,28661
5	4	0,6407	2,5903	1,3040	-0,0756	0,0099	0	0	6,0702	0,3760	5,28702



Фиг. 3

температура торможения  $T_0 = 3500$  К. Весовая доля  $z = 0,32$ . Радиус минимального сечения сопла  $r_* = 0,1$  м. На входе в сопло частицы распределены в соответствии с логарифмически нормальным законом [8] с параметрами  $\sigma = 1,5$  и  $r_0 = 1,1$  мкм, при этом среднемассовый радиус  $r_{43} = 1,96$  мкм.

Дозвуковая часть выбиралась в виде трех прямолинейных участков: начального, являющегося образующей цилиндрической трубы с радиусом, равным  $1,8 r_*$ , конфузора и диффузора с полууглами  $45$  и  $15^\circ$  соответственно. Прямолинейные участки последовательно плавно соединялись дугами окружности радиуса  $r_*$ .

При расчетах все линейные размеры были отнесены к размерному радиусу  $r_*$ . Тяга сопла отнесена к  $r_*^2 P_0$ .

В табл. 1 представлены основные характеристики контуров, которые не разбивались на участки. Здесь  $n$  — номер контура,  $N$  — число независимых коэффициентов в аппроксимации (2.1);  $x_n$  — абсцисса начала контура;  $y_n$ ,  $y'_n$  — ордината и угловой наклон контура в конечной точке;  $R_n$  — полный импульс сопла (безразмерный). Расчеты проводились при следующих исходных данных:  $X = 12$ ,  $p^* = 0$ ,  $h = 0,001$ . В этой таблице для сравнения представлен контур  $n = 1$ , который был построен без учета ограничения (1.1). Считалось, что выпадающие на него частицы полностью прилипают, а поток частиц теряет соответствующую часть импульса и энергии. На фиг. 3 он представлен кривой 1. Точками на этом контуре помечено начало выпадений частиц различных фракций с размерами от 1 до 5 мкм. Причем, как и следовало ожидать, с ростом размера частиц начало их выпадения на контур сдвигается к срезу сопла. По своей форме он похож на оптимальные контуры для равновесных течений.

Таблица 1, где представлены решения для  $N = 3, 4$  и  $5$  ( $n = 2, 3$  и  $4$ ), свидетельствует о достаточно быстрой сходимости последовательности  $\{R_n\}$ , а также о монотонном убывании абсолютной величины коэффициентов  $c_k$  с ростом  $k$ . Контуры с  $N = 4$  и  $5$  ( $n = 3$  и  $4$ ) различаются по реализуемому ими полному импульсу на  $0,02\%$ .

На фиг. 3 кривая 2 — это контур, построенный при аппроксимации (2.1) с  $N = 5$  и учетом ограничения (1.1). Практически по всей длине этот контур проходит ниже контура 1, что приводит к уменьшению поперечного движения частиц и

Таблица 2

$X$	$h$	$p^+$	$x_a$	$x_s$	$y_b$	$y_b'$	$F$	$R_n$
7	0,001	0,01	0,6219	4,7696	3,4544	0,2903	1,0634	4,8134
7	0,010	0,01	0,6164	3,8208	3,4579	0,3058	1,0615	4,8115
7	0,020	0,01	0,6001	3,0163	3,4706	0,3128	1,0600	4,8100
12	0,001	0	0,6407	6,1985	6,0702	0,3780	1,5370	5,2870
12	0,010	0	0,6256	5,4120	6,0846	0,3846	1,5341	5,2841
12	0,020	0	0,6087	4,4193	6,1321	0,3927	1,5312	5,2812
17	0,001	0	0,6389	6,2068	7,9927	0,3781	1,8782	5,4282
17	0,010	0	0,6261	5,4374	8,0272	0,3855	1,8768	5,4268
17	0,020	0	0,6059	4,3926	8,1003	0,3937	1,8748	5,4248

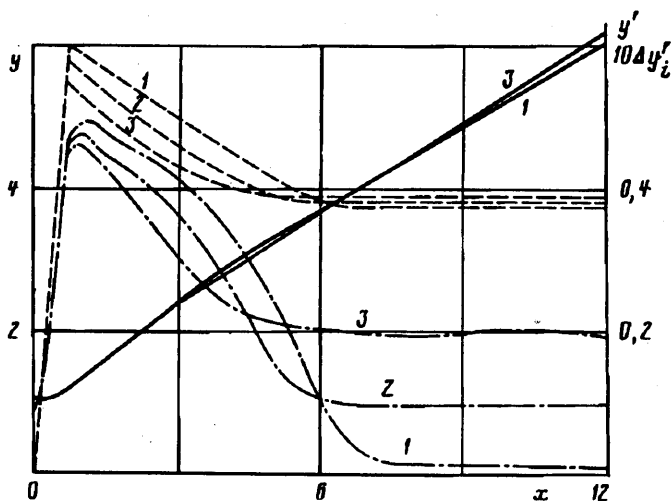
позволяет выполнить ограничения (1.1). Различие ординат выходного сечения этих контуров составляет 2,8%, в то же время угловые наклоны различаются там почти в 2 раза.

О структуре оптимального контура можно судить по кривым 3 и 4 на фиг. 3, характеризующим распределение углового наклона и разницы ординат контура и предельной траектории первой фракции частиц. Здесь штриховыми линиями проведены кривые, относящиеся к контуру 1, а штрихпунктирными — к контуру 2. Как видно на фиг. 3, оптимальный контур можно условно разбить на два характерных гладко сопряженных участка. Это участок с плавным изменением наклона от максимального в точке  $x_s$ , до минимального в некоторой точке, где он переходит во второй участок, близкий к коническому. Учитывая это, был построен оптимальный контур, состоящий из профилированного и конического участков. Первый из них аппроксимируется в соответствии с (2.1). Угловой наклон конического участка выбирается равным угловому наклону первого участка в точке стыковки. Абсцисса точки стыковки  $x_s$  находилась в процессе поиска максимума функции  $I$ .

Результаты построения этого контура представлены в последней строке ( $n = 5$ ) в табл. 1. Полученный контур имеет небольшой (0,01%) выигрыш по сравнению с гладким контуром варианта  $n = 4$ . Так как контур на конечном участке отстоит от предельной траектории первой фракции на близком расстоянии, то, как указывалось ранее, он должен быть близок к коническому. Усложнение аппроксимации этого участка (путем добавления новых членов в разложение (2.1)), как показывает расчет, ничего не дает.

Для выяснения влияния величины  $h$  на структуру оптимального контура и реализуемые им интегральные характеристики были проведены расчеты для различных  $X$ ,  $h$  и  $p^+$ , результаты которых собраны в табл. 2.

Здесь  $F$  — интеграл давления (1.2),  $x_s$  — абсцисса точки стыковки профилированного участка с коническим конечным участком. Такая аппроксимация принята при построении всех контуров, представленных в табл. 2. На фиг. 4 представлен контур, построенный для  $X = 12$ , где сплошными линиями 1 и 3 изображены контуром с  $h = 0,001$  и 0,02; штриховые линии 1—3 — линии распределения  $y'$  вдоль контуров с  $h = 0,001$ , 0,01, 0,02; штрихпунктирные — распределения  $y(x) - y_i(x)$  для контуров с  $h = 0,001$ , 0,002, 0,02.



Фиг. 4

Как видно из табл. 2, для каждого значения длины  $X$  увеличение  $h$  от 0,001 до 0,02 приводит к уменьшению профилированного участка почти на 1,8  $r_*$ , угла на входе — на 1,2—1,7°, удельного импульса — на величину, не превышающую 0,11%.

Таким образом, контур, спрофилированный с условием  $h=0,02$ , при незначительном с точки зрения практики снижении удельного импульса обеспечивает большую гарантию невыпадения на него частиц. Другими словами, возможность использования при профилировании большего  $h$  позволяет компенсировать погрешности и ограниченность выбранной в расчетах модели течения.

Как следует из расчетов и данных табл. 2, контуры, построенные для длин  $X=12$  и 17, практически совпадают до сечения с абсциссой  $X=12$ . Разница в удельном импульсе контура, построенного для длины  $X=17$ , и контура, полученного удлинением конического участка контура с  $X=12$  до  $X=17$ , составляет 0,05%. То же получается при сравнении этих контуров с контуром, спрофилированным для  $X=7$ , но  $p^+=0$ .

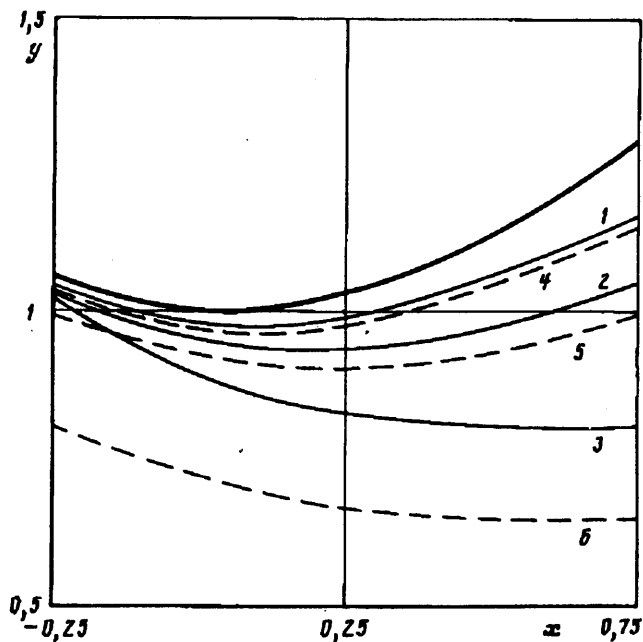
Такое подобие оптимальных контуров упрощает их практическое построение. Построенные оптимальные контуры имеют простую форму, что объясняется большой инерционностью частиц (даже малых размеров) из-за существенного уменьшения силы взаимодействия газа и частиц в сверхзвуковой части сопла.

Полученные результаты профилирования не изменяются (в пределах точности расчетов) при переходе к более сложным аппроксимациям искомого контура. Это относится к аппроксимации концевой участка разложением с большим числом членов и к аппроксимации искомого контура, разбитого на три участка.

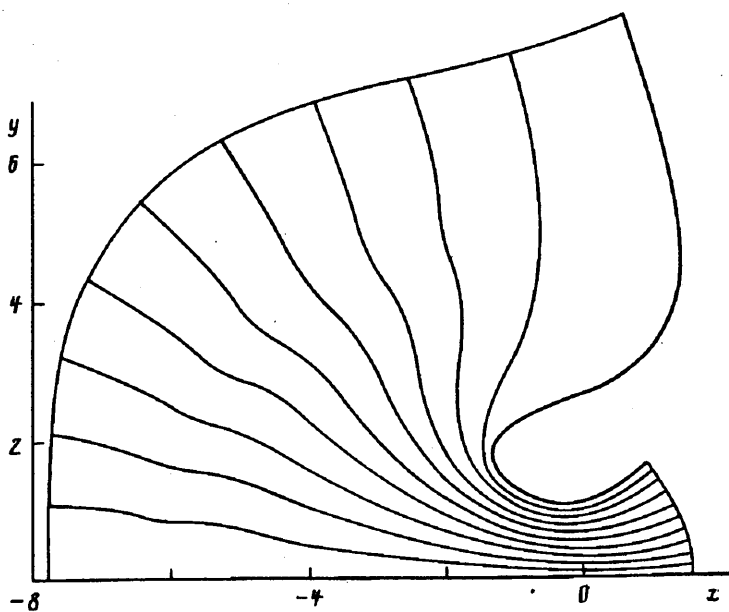
При построении оптимального контура требуется использовать несколько значений коэффициента штрафа  $K$  в (2.3), составляющих возрастающую последовательность, зависящую от контура начального приближения, величины  $h$  в (1.1) и длины  $X$ . Так, при построении оптимального контура для  $X=12$  и  $h=0,001$  такой последовательностью является  $K=10^2, 10^3, 10^4$ .

Как показывают приведенные результаты, форма построенных оптимальных контуров в основном зависит от положения предельной линии тока частиц фракции минимального размера. В частности, оно определяет угловой наклон концевой конической части оптимального контура. Отмена действия ограничения (1.1) для этой фракции не приводит к существенному улучшению характеристик оптимального контура. Это связано со слабым расслоением предельных линий тока частиц разных фракций. На фиг. 5 представлена трансзвуковая часть сопла





Фиг. 5



Фиг. 6

и предельные линии тока (линии 1—3) трех фракций с радиусами 1, 2,5 и 12 мкм, относящихся к соплу, параметры дотранзвуковой части которого приведены выше. Результаты, собранные в табл. 1, 2, относятся к этому соплу. Кроме того, здесь приведены предельные линии тока частиц фракций с теми же радиусами (линии 4—6), но рассчитанные для сопла, изображенного на фиг. 6.

На фиг. 6 кроме контура представлены линии тока газа. Расслоение предельных линий тока частиц здесь более существенно. Это связано с более ранним отрывом

траекторий частиц от сильно выпуклой стенки дозвуковой части контура. Для исходных данных, полученных расчетом течения в этом сопле методом [16], была построена оптимальная сверхзвуковая часть контура, причем ограничение (1.1) для первой фракции частиц было отменено. Полученный контур реализует практически тот же удельный импульс, что и контур 1, изображенный на фиг. 3, а его характеристики приведены в табл. 1 ( $n = 1$ ). В отличие от последнего на полученный контур не выпадают фракции частиц с размерами более 1 мкм.

Этот пример показывает, что при оптимизации с учетом дозвуковой части можно построить контуры с существенно лучшими характеристиками. Постановка соответствующей вариационной задачи выходит за рамки данной статьи. Можно лишь отметить, что в ней должны быть рассмотрены геометрические условия, связанные с формой дотранзвуковой части сопла, условиями на входе в предсопловый объем и учтено ограничение на величину эрозии контура.

Авторы выражают глубокую благодарность И. М. Васенину и А. Н. Крайко за внимание к работе, а также С. Б. Халимову за помощь в расчетах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoffman J. D., Thompson H. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contours for gas-particle flows // AIAA Pap. 1966. № 538.
2. Hoffman J. D., Thompson H. D. Optimum thrust-nozzle contours for gas-particle flows // AIAA Journal. 1967. V. 5. № 10. P. 1886—1887.
3. Elsbernd A. A., Hoffman J. D. Maximum thrust nozzles for gas-particle flows // AIAA Pap. 1972. № 1189; (Рус. перев.: Вопросы ракетной техники. 1973. № 10. С. 45—60).
4. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 596—605.
5. Бутов В. Г., Васенин И. М. О численном решении одной вариационной задачи газовой динамики // Числ. методы мех. сплош. среды. Новосибирск. 1975. Т. 6. № 2. С. 5—14.
6. Дритов Г. В., Тишин А. П. О профилировании сопел, работающих на газе с частицами конденсата // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 1. С. 170—175.
7. Васенин И. М., Архипов В. А., Бутов В. Г. и др. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
8. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 211 с.
9. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. К построению контура минимального волнового сопротивления в неоднородном сверхзвуковом потоке // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 469—487.
10. Бутов В. Г., Васенин И. М. Взаимодействие простой волны с границей раздела газа и двухфазного течения // Аэрогазодинамика. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1979. С. 113—117.
11. Афонин Г. И., Бутов В. Г. О влиянии закрутки потока идеального газа по форме оптимальной сверхзвуковой части контура осесимметричного сопла с изломом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 3. С. 155—160.
12. Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Щербаков С. А. Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лавалея с «плавным» и с «внезапным» сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129—137.
13. Крайко А. Н., Щеломовский В. В. Головные части тел вращения с потоком, близкие к телам минимального волнового сопротивления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 138—145.
14. Крайко А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 312—320.
15. Бутов В. Г., Васенин И. М., Шелуха А. И. Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 59—64.
16. Бутов В. Г., Халимов С. Б. Расчет непотенциальных течений идеального газа в осесимметричных соплах методом приближенной факторизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1861—1867.