МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1994

УДК 532.517.2/4:532.529.5

© 1994 г. А. Б. ВАТАЖИН, А. Ю. КЛИМЕНКО

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКАХ, ОСНОВАННЫЕ НА УРАВНЕНИЯХ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Развита методология континуального описания движения инерционных частиц в гидродинамичесхих потоках, включающая следующие основные элементы: уравнения движения одиночной частицы в заданном поле скорости несущей среды при наличии случайной возмущающей силы типа белого шума; уравнение Фоккера—Планка с диффузионным членом в пространстве скоростей, которое рассматривается как мгновенное уравнение по отношению к крупномасштабному движению; моментные (для уравнения Фоккера—Планка) соотношения, которые рассматриваются как мгновенные континуальные уравнения в физическом пространстве; замыкание континуальных уравнений на основе феноменологических соотношений или с помощью приближенного асимптотического решения уравнения Фоккера—Планка при малом времени динамической релаксации частиц. Непосредственное взаимодействие частиц и их обратное влияние на движение несущей среды не учитываются.

В случае ламинарного движения случайная возмущенная сила обусловлена броуновскими флуктуациями (взаимодействием частиц с молекулами несущей среды), и уравнение Фоккера—Планка для этой ситуации может быть записано естественным образом. При турбулентном движении несущей среды делается предположение, что пульсационное поле можно разбить на мелко- и крупномасштабное движения (по отношению к времени динамической релаксации частиц); в случайную силу помимо броуновских возмущений включаются мелкомасштабные турбулентные флуктуации, а поле скоростей осредняется по мелким масштабам. В этом случае уравнение Фоккера—Планка (и его моментные аналоги) превращаются в мгновенное уравнение по отношению к крупномасштабным турбулентным пульсациям. Анализируются континуальные уравнения и предлагаются простейшие способы их замыкания в случае турбулентного движения. Даются оценки коэффициента мелкомасштабной турбулентной диффузии частиц.

1. Состояние вопроса. Обобщенный анализ моделей для континуального описания движения жидкостей и газов с инерционной дисперсной фазой приведен в монографии [1]. Весьма условно методы замыкания уравнений можно разделить на следующие группы. В первой выражения для межфазных обменных членов и обобщенных потоков находятся с помощью экспериментальных данных. Во второй дополнительные замыкающие соотношения выводятся из рассмотрения детальных процессов в микропространствах с характерными длинами порядка размеров фазовых включений и последующего осреднения полученных микроуравнений с учетом граничных условий на межфазных поверхностях (см., например, [1]). В третьей группе для замыкания уравнений используются методы термодинамики необратимых процессов (см., например, [2—3]).

Особый интерес вызывают задачи о движении частиц с учетом броуновских флуктуаций (см., например, [4—6]). В предположении, что броуновские возмущения являются белым шумом, для плотности вероятности положения частиц в физическом и фазовом (по скоростям) пространстве может быть предложено использование уравнения Фоккера—Планка [7].

В данной работе при анализе ламинарных течений с учетом броуновского движения дисперсных частиц уравнение Фоккера—Планка использовалось для получения моментных соотношений, которые образуют незамкнутую систему континуальных уравнений в физическом пространстве. Предлагаются феноменологические, а также основанные на приближенном решении уравнения Фоккера—Планка, способы замыканий этих уравнений.

Анализ существенно усложняется, когда движение частиц происходит в турбулентном поле скоростей несущей среды. Характерные особенности этой проблемы рассмотрены в монографиях [8—9]. Многочисленные работы в этом направлении условно можно разделить на исследования, в которых замыкание уравнений производится с помощью подбора и умелого использования экспериментальных и полуэмпирических данных и далее решаются практические задачи, и работы, в которых непосредственно изучается движение частиц в случайных турбулентных полях и исследуются общие свойства взаимодействия инерционных частиц со случайными полями (см., например, [10]).

В данной работе при анализе движения частиц в турбулентных потоках используются уравнение Фоккера—Планка для инерционных частиц и идея [10] о возможности разделения турбулентных пульсаций на две группы: мелкомасштабные, со временем, значительно меньшим времени τ динамической релаксации частиц, и крупномасштабные, со временем, значительно превосходящим τ.

Для простоты вначале кратко рассматривается движение инерционных частиц при наличии случайной возмущающей (броуновской) силы в ламинарном потоке, хотя, как указывалось выше, часть результатов в этой области уже известна. Предлагаются замкнутые континуальные системы уравнений различных уровней.

Далее полученные результаты обобщаются на случай турбулентного движения несущей среды.

2. Уравнение Фоккера—Планка для инерционных частиц при наличии броуновских флуктуаций. Будем считать, что гидродинамическое сопротивление частиц определяется формулой Стокса, столкновениями частиц можно пренебречь, обратное влияние частиц на гидродинамическое течение несущественно, а плотность ρ_a и коэффициент динамической вязкости μ несущей среды постоянны. Все частицы считаются сферическими и одинаковыми с массой m и диаметром d.

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{1}{\tau}(\mathbf{V}_p - \mathbf{u}_p) + \Omega, \quad \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \tag{2.1}$$

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_p(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_p(t), t), \quad \tau = \frac{m}{3\pi\mu d}$$

Здесь $\mathbf{u}_p$ и $\mathbf{x}_p$ — скорость и радиус-вектор одиночной частицы, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — заданное поле скоростей несущей среды, Ω — случайная величина, которая соответствует возмущениям, приводящим к броуновским флуктуациям.

В силу малых времен корреляций процесса, его можно считать белым шумом с корреляционной функцией $\langle \Omega_i(t_1)\, \Omega_j(t_2) \rangle = \frac{1}{2} B_{ij}\delta(t_1 - t_2)$. Индексы i, j здесь и далее обозначают компоненты вектора или тензора. Из-за большого различия характерных временных масштабов процесса Ω и макропроцесса естественно предположить, что величины B_{ij} не зависят от скорости частицы $\mathbf{u}_p$. В этом случае требование инвариантности B_{ij} при вращениях системы координат приводит к условию $B_{ij} = B\delta_{ij}$. При сделанных предположениях уравнения (2.1) описывают диффузионный марковский процесс и поэтому можно использовать уравнение

Фоккера—Планка (прямое уравнение Колмогорова) для $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ — функции плотности вероятности положения частицы в физическом пространстве $\mathbf{x}$ и фазовом пространстве скоростей $\mathbf{u}$ [7]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname*{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}F + \operatorname*{div}_{\mathbf{u}} \left(\frac{\mathbf{V} - \mathbf{u}}{\tau} F \right) = B \Delta_{\mathbf{u}} F \tag{2.2}$$

$$\int\int_{\infty} F d\mathbf{x} d\mathbf{u} = n_p, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3, \quad d\mathbf{u} = du_1 du_2 du_3 \tag{2.3}$$

Функция F является нормированной и для одиночной частицы $n_p = 1$. Операции дивергенции и градиента с индексом $\mathbf{x}$ означают дифференцирование в физическом пространстве, а с индексом $\mathbf{u}$ — в пространстве скоростей. В дальнейшем индекс $\mathbf{x}$ там, где это не приводит к недоразумениям, может опускаться. Функция F является величиной, осредненной по реализациям Ω, но не осредненной по отношению к возможным флуктуациям поля $\mathbf{V}$.

Предположим, что в потоке находится множество невзаимодействующих частиц. Тогда уравнение (2.2) пригодно для описания функции плотности вероятности любой из этих частиц F_k, а в силу линейности (2.2) и их суперпозиции $F = \sum F_k$. Условие нормировки (2.3) изменяется и соответствует суммарному количеству частиц. Введем новую функцию f, нормированную следующим образом:

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{x}, t) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad \rho = \int_{\infty} F d\mathbf{u}, \quad \int_{\infty} f d\mathbf{u} = 1 \tag{2.4}$$

Если количество частиц достаточно велико (в каждом элементарном объеме, подлежащем рассмотрению) и характерный радиус корреляции случайного поля Ω мал по сравнению с характерным масштабом, соответствующим движению частиц, то величина ρ имеет физический смысл плотности частиц. Действительно, в этом случае флуктуации положения частиц, вызванные флуктуациями поля Ω, практически не коррелированы и осреднение по реализациям Ω может быть заменено на осреднение по частицам при фиксированной реализации поля Ω.

3. Моментные уравнения. Умножим уравнение (2.2) на u_i^n $(n = 0, 1, 2)$ и проинтегрируем по пространству скоростей. Предполагая, что функция f достаточно быстро убывает при $|u_i| \to \infty$, после стандартных преобразований получаем следующие моментные соотношения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = \frac{\rho}{\tau} (V_i - v_i) - \frac{\partial \rho \alpha_{ij}}{\partial x_j} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} + \operatorname{div} \rho q \mathbf{v} = 6B\rho - \frac{2\rho q}{\tau} - 2\rho\alpha_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \beta_{iij}) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{v} = \int_{\infty} \mathbf{u} f d\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad q = \int_{\infty} \mathbf{u}'^2 f d\mathbf{u} = \int_{\infty} \mathbf{u}^2 f d\mathbf{u} - \mathbf{v}^2 \tag{3.4}$$

$$\alpha_{ij} = \int_{\infty} u_i' u_j' f d\mathbf{u}, \quad \beta_{iij} = \int_{\infty} u_i' u_i' u_j' f d\mathbf{u} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3.5}$$

В этих формулах по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. Величина $\mathbf{v}$ имеет смысл интегральной скорости частиц и отличается от $\mathbf{u}_p$, $q^{1/2}$ — дисперсия распределения частиц по скоростям.

Система уравнений (3.2)—(3.3) относительно ρ, q и $\mathbf{v}$ является незамкнутой и требует аппроксимации величин α_{ij} и β_{iij}.

Рассмотрим уравнение (2.2) и систему уравнений (3.1)—(3.5) при отсутствии диффузии ($B=0$). Пусть начальные условия заданы так, что $q=0$. Тогда, если использовать уравнение (2.2) (при $B=0$), после пересечения его характеристик (разрывное решение) в области течения может возникнуть зона с $q>0$. Уравнение же (3.3) не допускает такого решения, так как при $B=0$ и начальном условии $q=0$ величина q, согласно (3.3), остается всюду равной нулю. (Отметим, что $\alpha_{ij}=0$, $\beta_{ij}=0$ при $q=0$.) Таким образом, диффузия в фазовом пространстве $\mathbf{u}$ является принципиальной для данного подхода, а коэффициент диффузии B должен быть отличной от нуля (хотя, возможно, и малой) положительной величиной.

4. Квазистационарное решение уравнения (2.2). Будем считать, что временно́й масштаб для поля скоростей $\mathbf{V}$ ($\mathbf{x}$, t) значительно превосходит время динамической релаксации τ. Тогла в главном приближении из (2.2) получаем уравнение

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{V}-\mathbf{u}}{\tau}f\right)=B\Delta f \tag{4.1}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{\partial w_i f}{\partial w_i}+A\frac{\partial^2 f}{\partial w_i\partial w_i}=0 \quad (A=B\tau), \quad \mathbf{u}-\mathbf{V}=\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3), \ f=f(\mathbf{w}) \tag{4.2}$$

Применяя в (4.2) преобразование Фурье и предполагая быстрое убывание функции f и ее производных на бесконечности, получим следующее уравнение для f^* в $\mathbf{k}$-пространстве

$$k_i\frac{\partial f^*}{\partial k_i}+A\mathrm{k}^2 f^*=0, \quad \mathrm{k}^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2 \tag{4.3}$$

$$f^*=f^*(\mathbf{k})=\int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{w})\,f(\mathbf{w})\,d\mathbf{w}$$

$$\mathbf{k}=(k_1, k_2, k_3), \quad d\mathbf{w}=dw_1dw_2dw_3$$

Характеристические соотношения для уравнения (4.3) имеют вид

$$\frac{dk_1}{k_1}=\frac{dk_2}{k_2}=\frac{dk_3}{k_3}=-\frac{df^*}{A\mathrm{k}^2 f^*} \tag{4.4}$$

Здесь dk_i — дифференциалы вдоль характеристических линий, df^* — соответствующее изменение f^*.

Из (4.4) следует, что характеристическими линиями являются прямые, проходящие через начало координат, и вдоль каждой прямой справедливо соотношение

$$f^*=C\exp(-\tfrac{1}{2}A\mathrm{k}^2) \tag{4.5}$$

где постоянные C, вообще говоря, различны для различных прямых. Однако при быстром (экспоненциальном) убывании функции f при $|\mathbf{w}|\to\infty$ трансформанта Фурье не должна иметь особых точек при $|\mathbf{k}|=0$ и, следовательно, величина C одинакова для всех прямых. Поэтому выражение (4.5) является решением уравнения (4.3). Выполняя обратное преобразование Фурье, находим

$$f=(2\pi B\tau)^{-3/2}\exp\left[-\frac{(\mathbf{V}-\mathbf{u})^2}{2\tau B}\right] \tag{4.6}$$

где постоянная перед экспонентой найдена из условия нормировки (2.4) для функции f. Из описанного процесса получения функции f следует, что решение (4.6) является единственным.

5. Замыкание моментных уравнений. Используя (4.6) для аппроксимации величин α_{ij} и β_{ijl}, находим

$$\alpha_{ij} = 1/3\, q\delta_{ij}, \quad \beta_{uj} = 0 \qquad (5.1)$$

Замкнутая система уравнений (3.1)—(3.3), (5.1) является системой «мгновенных» уравнений по отношению к крупномасштабным ($t \gg \tau$) движениям несущей среды. Указанной системе уравнений можно придать и более общий характер, если рассматривать выражения (5.1) как феноменологические соотношения (имеющие достаточно понятный физический смысл), не прибегая к функции распределения (4.6).

Уравнение (3.3) с помощью (3.1) и (5.1) может быть записано в следующем виде:

$$\rho \frac{dq}{dt} - \frac{2}{3} q \frac{d\rho}{dt} = 6B\rho - \frac{2q\rho}{\tau} \qquad (5.2)$$

Из уравнений (3.1)—(3.3), (5.1) можно получить более простые (и менее точные) системы уравнений. Так, используя квазистационарное решение $q = 3B\tau$ уравнения (5.2), находим следующую систему уравнений относительно ρ и $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\rho}{\tau}(\mathbf{V} - \mathbf{v}) - B\tau\nabla\rho \qquad (5.3)$$

При записи уравнения (5.3) было предположено, что величина B изменяется по координатам слабее, чем ρ.

Аппроксимируя величину $d\mathbf{v}/dt$ в (5.3) конвективным членом $d\mathbf{v}_a/dt$ для несущей среды, получаем следующее диффузионное уравнение (индекс a относится к несущей среде):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} - \operatorname{div}(D\nabla\rho) = -\operatorname{div} \rho\tau\mathbf{Q} \qquad (5.4)$$

$$D = D_\tau = B\tau^2, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\rho_a}\nabla p_a \quad \left(\rho_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\nabla p_a\right)$$

Уравнение (5.4) содержит члены, соответствующие процессам диффузии и бародиффузии. Уравнение импульсов для несущей среды записано в простейшей форме.

Совершая в (5.4) предельный переход $\tau \to 0$, $B\tau^2 \to 0$, получаем простейшую систему уравнений

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0 \qquad (5.5)$$

соответствующую условию «вмороженности» частиц в несущую среду и отсутствию диффузии.

6. Некоторые свойства полученных уравнений. Система уравнений (3.1)—(3.3), (5.1) при $\mathbf{V} \equiv 0$ имеет стационарное решение

$$\mathbf{v} \equiv 0, \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad q = q_0 = 3B\tau = \text{const} \qquad (6.1)$$

Коэффициент B в дальнейшем будем считать постоянной величиной.

Линеаризованная относительно этого решения система уравнения (3.1)—(3.3), (5.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \rho^\circ}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} - B\tau\Delta\rho^\circ - B\tau\Delta q^\circ = 0 \qquad (6.2)$$

$$\frac{\partial q^\circ}{\partial t} + \frac{2q^\circ}{\tau} = \frac{2}{3}\frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} \qquad (6.3)$$

Здесь ρ° и q° представляют собой возмущения величин ρ и q, отнесенные к ρ_0 и q_0.

Для решения уравнений (6.2), (6.3) в общем случае необходимо задать пространственные распределения ρ°, q° и $\partial\rho^\circ/\partial t$ в начальный момент времени и граничные значения ρ° и q° при $t > 0$.

Рассмотрим распространение возмущений в виде плоских волн

$$q^\circ = q_* \exp Z, \quad \rho^\circ = \rho_* \exp Z, \quad Z = i(kx - \omega t) \tag{6.4}$$

где q_*, ρ_*, k и ω — амплитуды, волновое число и частота возмущений, распространяющихся вдоль оси x.

Для определенности будем считать, что на плоскости $x = 0$ заданы гармонические возмущения q° и ρ° (описываемые формулами (6.4) при $x = 0$ и заданной действительной величине ω), а плоские волны (6.4) распространяются в полупространствах $x > 0$ и $x < 0$.

Подставляя (6.4) в (6.2) и (6.3), получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{B\tau^3 k^2}{3} = \frac{8s^2 + 5s^4 + i(9s^3 + 12s)}{36 + 25s^2}, \quad s = \omega\tau \tag{6.5}$$

Связи между амплитудами возмущений даются выражениями

$$q_* = \frac{2}{3}\rho_* \frac{s^2 - 2is}{4 + s^2}, \quad |q_*| = \frac{2s}{3\sqrt{4 + s^2}}|\rho_*| \tag{6.6}$$

Из (6.5) следует, что два значения волнового числа k_1 и $k_2 = -k_1$ лежат в первом и третьем квадрантах плоскости комплексного переменного и соответствуют распространяющимся в полупространствах $x > 0$ и $x < 0$ возмущениям, которые затухают при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ соответственно.

В предельных случаях больших и малых значений параметра s находим

$$s \to 0{:}\ B\tau^3 k^2 = is, \quad a = \pm(2\omega D)^{1/2}, \ \operatorname{Im} k = \pm(\omega/2D)^{1/2}, \ D = B\tau^2 \tag{6.7}$$

$$s \to \infty{:}\ a^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{5D}{3\tau} \tag{6.8}$$

В (6.7) верхний и нижний знаки соответствуют возмущениям, распространяющимся в полупространствах $x > 0$ и $x < 0$, a — фазовая скорость распространения возмущений. Для ситуации (6.7) исходное уравнение (6.2) преобразуется в классическое уравнение теплопроводности относительно ρ°, а для ситуации (6.8) — в гиперболическое уравнение.

За исключением малых значений s, амплитуды возмущений ρ и q, согласно (6.6), имеют одинаковый порядок величины.

7. Инерционные частицы в турбулентном потоке. Пусть движение частиц происходит в турбулентном поле скорости $\mathbf{V}_a(\mathbf{x}, t)$ несущей среды. Будем, как и в [10], считать, что турбулентный поток содержит лишь мелкомасштабные ($t \ll \tau$) и крупномасштабные ($t \gg \tau$) флуктуации. Механизм влияния этих флуктуаций на частицы различен и требует раздельного рассмотрения. Разделим поле скорости жидкости $\mathbf{V}_a$ на две составляющие: крупномасштабную $\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_a \rangle_\tau$ и мелкомасштабную $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}$. Здесь осреднение с нижним индексом τ является осреднением по масштабам, не превышающим τ. Эта процедура, не являясь строгой (в турбулентном потоке всегда присутствуют флуктуации с характерным масштабом τ), тем не менее приближенно позволяет учесть влияние как крупномасштабных, так и мелкомасштабных турбулентных флуктуаций. Влияние флуктуаций с характерным масштабом τ будет обсуждаться в дальнейшем.

Исходя из сказанного, под величиной $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ в уравнениях (2.1), (2.2) в дальнейшем будет пониматься осредненная по мелкомасштабным турбулентным флуктуациям несущей среды скорость $\langle \mathbf{V}_a \rangle_\tau$. Мелкомасштабная же составляющая

$\mathbf{V}'$ будет включаться в возмущающую силу Ω, которая теперь представляется в виде $\Omega = \Omega_0 + \mathbf{V}'/\tau$, где Ω_0 соответствует броуновским флуктуациям.

Процесс Ω будем по-прежнему считать белым шумом, так как его характерное время корреляции τ_w много меньше τ — характерного времени релаксации динамической системы (2.1). (Здесь предполагается, что существует аналогия между броуновским и мелкомасштабным ($t \ll \tau$) турбулентным движением частиц.) В этом случае уравнение Фоккера—Планка (2.2) и система интегральных соотношений остаются неизменными, но значение величины B определяется уже не столько броуновскими, сколько мелкомасштабными турбулентными флуктуациями. Уравнение (2.2) представляет теперь «мгновенное» уравнение по отношению к крупномасштабному движению.

Так как время τ значительно меньше характерного времени крупномасштабного движения (в соответствии с предположением о возможности разбиения на две части турбулентного спектра для несущей среды), то можно использовать асимптотическое решение (4.6) уравнения Фоккера—Планка и с его помощью провести такое же, как и раньше, замыкание (5.1) моментных уравнений. Все соотношения (3.1)—(3.3), (5.1) и упрощенные соотношения (5.3), (5.4) остаются в силе, за исключением того, что величина $\mathbf{Q}$ теперь записывается в виде

$$Q_i = \frac{1}{\rho_a}\left[\frac{\partial \langle p_a\rangle_\tau}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_a \langle V_i' V_j'\rangle_\tau\right] \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7.1}$$

Подчеркнем еще раз, что величины $\mathbf{V}$ и B в данном случае имеют другой смысл, чем при ламинарном движении несущей среды.

8. Особенности движения инерционных частиц в турбулентном потоке. Влияние крупномасштабных ($t \gg \tau$) и мелкомасштабных ($t \ll \tau$) турбулентных флуктуаций на движение инерционных частиц различно. Крупномасштабные флуктуации приводят к флуктуациям концентрации частиц, которые аналогичны флуктуациям концентрации безынерционной примеси. Мелкомасштабные флуктуации вызывают разброс скоростей частиц (дисперсия функции распределения f в фазовом пространстве скоростей $\mathbf{u}$), но к существенным флуктуациям плотности не приводят, так как инерционные частицы не вовлекаются в мелкомасштабные движения и происходят лишь диффузия частиц. Этот процесс может быть описан уравнением (5.4) с нулевой правой частью ($\mathbf{Q} = 0$), которое при этом есть аналог мгновенного уравнения переноса безынерционной примеси. Мелкомасштабные флуктуации приводят к появлению в уравнении (5.4) нового эффективного коэффициента диффузии $D_\tau = B\tau^2$, который при не слишком малых τ может существенно превосходить коэффициент диффузии броуновского движения. (Если τ значительно меньше колмогоровского времени t_η, то B определяется броуновскими флуктуациями, а D_τ — формулой Эйнштейна.) Если τ принадлежит инерционному интервалу $t_\eta \ll \tau \ll t_m$, где t_m — временной турбулентный макромасштаб, то определяющими параметрами являются τ и величина ε_d — среднее значение диссипации турбулентной энергии. Значения B и D_τ могут быть оценены из соображений размерности следующим образом:

$$B = C_b\varepsilon_d, \quad D_\tau = C_b\tau^2\varepsilon_d \tag{8.1}$$

Здесь C_b — некоторая универсальная константа порядка единицы. Диффузия с коэффициентом D_τ в физическом пространстве приводит к сглаживанию всех неоднородностей с характерным временным масштабом $t \ll \tau$.

Однако в отличие от безынерционной примеси уравнение (5.4) при $\mathbf{Q} = 0$ является приближенным. Действительно, турбулентный поток содержит флуктуации с характерным масштабом $t \sim \tau$, которые не были учтены ни в мелкомасштабной ($\mathbf{V}' = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}$), ни в крупномасштабной ($\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_a\rangle_\tau$)

составляющих. Влияние флуктуаций $t \sim \tau$ может привести к достаточно большим значениям $|Q|$ в (5.4), вызывающим существенные флуктуации плотности ρ с характерным масштабом $t \sim \tau$. Эти флуктуации удобнее всего выделить в ситуации, когда в начальный момент времени $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Концентрация безынерционной примеси, так же, как и плотность ρ, удовлетворяющая уравнению (5.4) при $Q = 0$, останется постоянной и в последующие моменты времени. Однако поправочный член $Q \neq 0$ приведет к флуктуациям концентрации ρ с характерным временным масштабом $\sim\tau$. Если τ принадлежит инерционному интервалу, то интенсивность этих флуктуаций ρ'/ρ_0 должна выражаться через диссипацию энергии ε_d и характерное время τ, из которых нельзя составить безразмерную величину. Поэтому

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = C_\rho = \text{const} \tag{8.2}$$

Здесь C_ρ — универсальная константа. Таким образом, интенсивность флуктуаций при $t_\eta \ll \tau \ll t_m$ не зависит ни от ε_d, ни от τ и является универсальной константой. Соотношение (8.2) ранее получено в [10]. Эти же вопросы на основе численного решения нестационарных уравнений Навье—Стокса при наличии инерционной примеси рассматривались в [11].

9. Проблема полного осреднения уравнений. Полученные выше уравнения для инерционной примеси (3.1)—(3.3), (5.1) и упрощенные выражения (5.3)—(5.4), (7.1), в которых величина **V** представляет собой осредненную по мелкомасштабному движению ($t \ll \tau$) скорость несущей среды, как указывалось выше, представляют собой мгновенные уравнения по отношению к крупномасштабному движению несущей среды. Для практического использования этих уравнений необходимо произвести их дальнейшее осреднение. Осуществим эту процедуру для уравнений (5.4), (7.1). При этом будем пренебрегать корреляцией мелкомасштабных пульсаций скоростей в правой части (7.1), которая мала при малых τ.

Введем следующие величины и корреляции:

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{V}'', \quad \rho = \langle \rho \rangle + \rho''(\mathbf{V} = \langle \mathbf{V}_a \rangle_\tau) \tag{9.1}$$

$$\langle p_a \rangle_\tau = \langle p_a \rangle + p_a'', \quad \langle \mathbf{V}'' \rho'' \rangle = -D_t \nabla \langle \rho \rangle$$

Здесь знак осреднения соответствует осреднению по крупномасштабному движению, величины с двумя штрихами — крупномасштабные (по отношению ко времени τ) пульсации. Последнее соотношение в (9.1) — традиционная диффузионная аппроксимация, D_t — соответствующий коэффициент турбулентной диффузии. Величины $\langle \mathbf{V} \rangle$ и $\langle p_a \rangle$ представляют собой полностью осредненные скорость и давление несущей среды.

Подставляя (9.1) в (5.4) и (7.1), с учетом сделанных предположений находим уравнение

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}(\langle \rho \rangle \langle \mathbf{V} \rangle) - \operatorname{div}(D \nabla \langle \rho \rangle) = -\operatorname{div}\left(\tau \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_a} \nabla \langle p_a \rangle\right)$$

$$D = D_t + D_\tau, \quad D_\tau = \tau^2 B \tag{9.2}$$

Составляющие коэффициента диффузии D_t и D_τ соответствуют влиянию крупномасштабных и мелкомасштабных пульсаций соответственно. При выводе (9.2) пренебрегалось корреляцией между ρ'' и $\nabla p_a''$.

Если $\tau \ll t_\eta$, то значение D_τ определяется броуновской диффузией. Если же τ превышает турбулентный макромасштаб t_m, то соответствующие уравнения не требуют дополнительного осреднения по турбулентным пульсациям, так как все величины в этих уравнениях уже осреднены (осреднение по τ совпадает с полным осреднением и $D_t = 0$). При умеренных значениях τ влияние инерционности примеси заключается в появлении в (9.2) дополнительного члена, связанного с градиентом давления.

Более сложным способом может быть проведено полное осреднение уравнений (3.1)—(3.3), (5.1) или уравнений (5.3).

В заключение отметим, что эффекты инерционности примеси необходимо учитывать в развиваемой в последнее время теории условного осреднения [12—13]. Наряду с отличиями, отмеченными выше, здесь могут оказаться существенными поправки, связанные с постановкой граничных условий на границе завихренного и потенциального течений (явление перемежаемости). Безынерционная примесь, находясь в турбулентной области, не может ее покинуть и оказаться в области потенциального течения. Напротив, в силу инерционных эффектов частицы могут переместиться из турбулентной области в нетурбулентную (по крайней мере на некоторое непродолжительное время порядка τ). Это обстоятельство может изменить условие для условно осредненной концентрации примеси на границе турбулентной и нетурбулентной областей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—17944).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Groot S. R., de, Mazur P.* Non-equilibrium thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962. 510 p.
3. *Регирер С. А.* К вопросу о континуальных моделях суспензий // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 679—688.
4. *Foister R. T., Van de Vea T. G.* Diffusion of Brownian particles in shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. № 1. P. 105—132.
5. *Ramshaw J. D.* Brownian motion in a flowing fluid revisited // Phys. Fluids. 1981. V. 24. № 6. P. 1210—1211.
6. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. М.: Мир, 1980. 244 с. (Механика. Новое в зарубежной науке. № 22.)
7. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайнонеоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
8. *Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П.* Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наук. думка, 1987. 239 с.
9. *Медников Е. П.* Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.
10. *Кузнецов В. Р.* Влияние турбулентности на смешение газа и совокупности частиц // Проблемы турбулентных течений / Тр. ЦИАМ. 1991. № 1287. С. 113—117.
11. *Squires K. D., Eaton J. K.* Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence // Phys. Fluids. A. 1990. V. 2. № 7. P. 1191—1203.
12. *Клименко А. Ю.* Совместная диффузия различных примесей в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 3—10.
13. *Bilger R. W.* Conditional moment closure for turbulent reacting flow // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. № 1. P. 1—9.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.1993