

УДК 532.529.2:532.135

© 1994 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

## СХЛОПЫВАНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Численно решается задача о схлопывании пузырька в нелинейно-вязкой и вязкопластической средах под действием давления на бесконечности. Находятся давление, при котором начинается уменьшение радиуса пузырька, предельный радиус пузырька в вязкопластическом случае и критическое давление схлопывания в случае отсутствия пластической составляющей. Критическое давление оказывается на порядок меньше соответствующего значения для ньютоновской вязкой жидкости.

При схлопывании сферического пузырька в несжимаемой идеальной жидкости скорость поверхности пузырька, направленная к его центру, перед самым схлопыванием неограниченно растет как  $r^{-3/2}$ . Большие приращения местных давлений (порядка сотен атмосфер) считаются возможной причиной возникновения кавитации [1, 2].

В вязкой жидкости при наличии поверхностного натяжения существуют два режима схлопывания [3, 4]: при давлении на бесконечности, меньшем критического, пузырьки схлопываются за неограниченное время; при давлении, большем критического, в некоторый момент происходит быстрое схлопывание, сопровождающееся неограниченной кумуляцией энергии. Численный анализ этих явлений выполнен в [5, 6].

Влияние релаксационных эффектов в вязкоупругих жидкостях в рамках общей модели Максвелла учтено в обзоре [7], а некоторые результаты физических и численных экспериментов приведены в [8—10].

Ниже описана эволюция радиуса пузырька в вязкопластической среде и нелинейно-вязкой жидкости в случаях логарифмического и тригонометрического упрочнений. Проведено сравнение полученных результатов с имеющимися классическими для линейной вязкой жидкости.

1. Физическая модель и уравнение движения. Рассмотрим эволюцию сферического пузырька радиуса  $R(t)$  в несжимаемой нелинейно-вязкопластической среде, параметры которой могут зависеть только от расстояния до центра пузырька. Будем предполагать, что движение среды в сферической системе координат, связанной с центром пузырька, радиальное ( $v_\theta = v_\varphi = 0$ ). Тогда из условия несжимаемости следует, что

$$v_r = -V(t)/r^2 \quad (1.1)$$

Имеем единственное уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\sigma_r - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (1.2)$$

с граничными условиями  $\sigma_r(\infty) = -p^*$ ,  $\sigma_r(R) = 0$ , где  $p^*$  — заданное давление на бесконечности.

Выпишем также определяющие соотношения для нелинейно-вязкопластических тел. Скалярное определяющее соотношение, связывающее максимальное кас-

тельное напряжение  $T$  и максимальную скорость скольжения  $U$ , записывается в общем виде

$$T = \tau + U [1 - F(U)], \quad \tau = \tau_0 R^2 / (\rho v^2) \quad (1.3)$$

где  $\tau$  — безразмерный предел текучести,  $F(U)$  — функция упрочнения, удовлетворяющая определенным условиям монотонности и выпуклости [11]. В общем случае предполагается, что вязкопластическая среда неоднородна и предел текучести  $\tau$  — функция радиуса.

Векторные соотношения

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \frac{2T}{U} \underline{v}$$

связывают между собой девиаторы тензоров напряжений и скоростей деформаций. Подставляя в них (1.1), (1.3), найдем, что ненулевые напряжения связаны с функцией  $V(t)$  следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{2\tau}{\sqrt{3}} + \frac{4(1-F)V}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p - \frac{\tau}{\sqrt{3}} - \frac{2(1-F)V}{r^3} \quad (1.4)$$

Проинтегрируем уравнение движения (1.2) по  $r$  в пределах от  $R(t)$  до бесконечности с учетом выписанных ранее граничных условий

$$-p^\circ + \int_R^\infty \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} dr = -\frac{\dot{V}}{R} - \frac{V^2}{2R^4} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2)–(1.5) и дальнейшие соотношения записаны в безразмерном виде. В качестве базиса обезразмеривания выбрана тройка  $\{R_0, \rho, v\}$ , где  $\rho$  — плотность материала, окружающего пузырек, а  $v$  — его кинематическая вязкость.

Подставим (1.4) в уравнение движения (1.5) и, пользуясь тем, что на границе пузырька  $V(t) = -R^2(t)\dot{R}(t)$ , после некоторых преобразований запишем

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{4\dot{R}}{R} + 2\sqrt{3} \int_R^\infty \frac{\tau(r)}{r} dr + 12R^2\dot{R} \int_R^\infty F\left(\frac{-2\sqrt{3}R^2\dot{R}}{r^3}\right) \frac{dr}{r^4} - p^\circ \quad (1.6)$$

$$R(0) = 1, \quad \dot{R}(0) = 0 \quad (1.7)$$

Задача Коши (1.6), (1.7) описывает эволюцию радиуса пузырька при  $t > 0$ . В случае невязкой жидкости ( $\tau \equiv 0, F \equiv 1$ ) оно аналитически интегрируется

$$t = \left(\frac{3}{2p^\circ}\right)^{1/2} \int_R^1 \left(\frac{x^3}{1-x^3}\right)^{1/2} dx \quad (1.8)$$

Положив  $R=0$ , из (1.8) получим безразмерное время полного схлопывания пузырька (результат Рэлея)

$$t = \left(\frac{3}{2p^\circ}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/3)} \approx \frac{0,915}{(p^\circ)^{1/2}}$$

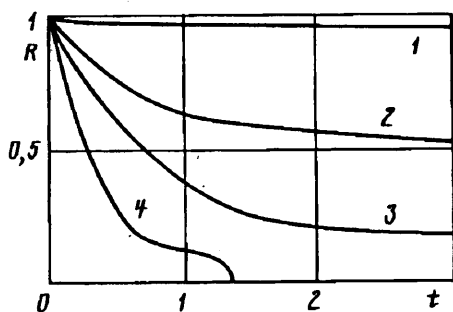
В случае же  $\tau \equiv 0, F \equiv 0$  (ньютоновская вязкая жидкость) имеют место результаты работ [3–6].

В общем виде задача (1.6), (1.7) эквивалентна интегрированию уравнению относительно  $Q(R) = \dot{R}$

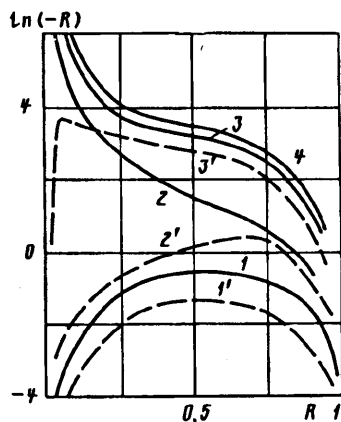
$$RQQ' + \frac{3}{2}Q^2 = -4\frac{Q}{R} + 2\sqrt{3} \int_R^\infty \frac{\tau(r)}{r} dr + 12R^2Q \int_R^\infty F\left(\frac{-2\sqrt{3}R^2Q}{r^3}\right) \frac{dr}{r^4} - p^\circ$$

с граничным условием  $Q(1) = 0$ .

2. Влияние пластической составляющей. Исследуем влияние нелинейности среды на движение границы пузырька. Пусть сначала  $F \equiv 0$ , а  $\tau(r)$  — произвольная кусочно-непрерывная функция, такая, что дробь  $\tau(r)/r$  интегрируема на полу-



Фиг. 1



Фиг. 2

интервале  $R < r < \infty$ . В частности, если вязкопластическая среда однородна и неограниченна, то в правой части (1.6) имеется логарифмическая особенность на бесконечности. Это означает, что при любом конечном  $p^\circ$  вся область  $1 < r < \infty$  в любой момент времени занята жесткой зоной.

Численный анализ, выполненный методами, описанными в [12], обнаружил наличие двух критических давлений  $p_1$  и  $p_2$ . Радиус пузырька начинает уменьшаться, если  $p^\circ > p_1$

$$p_1 = 2\sqrt{3} \min_{0 < R < 1} \int_R^\infty \frac{\tau(r)}{r} dr$$

и при  $p^\circ < p_2$  плавно стремится к положительной константе  $R(\infty)$ , определяемой из уравнения

$$2\sqrt{3} \int_{R(\infty)}^\infty \frac{\tau(r)}{r} dr = p^\circ$$

При  $p^\circ > p_2$  в некоторый момент времени происходит быстрое схлопывание пузырька [13]. Давление  $p_1$  в линейно-вязком случае равно нулю.

На фиг. 1 приведены кривые  $R(t)$  при разных  $p^\circ > p_1$  для зависимости  $\tau(r)$

$$\tau(r) \equiv \tau \text{ const}, \quad R < r < (R^3 + R_1^3 - 1)^{1/3}$$

$$\tau(r) \equiv 0, \quad r \geq (R^3 + R_1^3 - 1)^{1/3}$$

Значения  $R_1$  и  $\tau$  выбраны равными 10 и 1; кривым 1—4 соответствуют давления  $p^\circ = 8; 10; 15$  и 20. Значения  $p_1$  и  $p_2$  в данном случае равны 7,976 и 16,55 соответственно.

Для зависимости  $\tau(r) = 1/r$ ,  $r > R$  кривые  $R(t)$  имеют аналогичный вид ( $p_1 = 3,464$ ,  $p_2 = 39,63$ ).

3. Влияние упрочнения. Пусть теперь  $\tau(r) = 0$  и физическая нелинейность среды связана с наличием  $F(U)$ . Исследуем численно поведение пузырька для логарифмического и тригонометрического упрочнений [14]

$$F(U) = 1 - F_1 \frac{\ln(1+U)}{U}, \quad F_1 > 0 \quad (3.1)$$

$$F(U) = 1 - \frac{2F_2}{\pi} \frac{\text{arctg } U}{U}, \quad F_2 > 0 \quad (3.2)$$

На фиг. 2 в фазовой плоскости  $(R, \ln(-\dot{R}))$  изображены решения задачи

(1.6), (1.7) с функцией  $F$  в виде (3.1) при  $F_1 = 1$  для  $p^\circ$ , равных 1, 5, 50 и 100 (кривые 1—4 соответственно). Для первых трех значений  $p^\circ$  штриховой линией отмечены соответствующие кривые (1'—3') в случае ньютоновской жидкости. Значение критического давления  $p^\circ$  для ньютоновской жидкости, при котором эти кривые начинают стремиться в  $+\infty$  при  $R \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ), равно 70,6 [4]. Этот результат подтверждается и настоящим численным анализом ( $p^\circ \approx 71,4$ ). Наличие логарифмического упрочнения (3.1) очень сильно понижает критическое значение  $p^\circ$  по сравнению с линейно-вязким случаем:  $p_{in}^\circ \approx 1,75$ .

Тригонометрическое упрочнение (3.2) означает, что максимальное касательное напряжение ограничено сверху величиной  $F_2$  при сколь угодно большом  $U$  и данная модель близка к идеально пластической модели Сен-Венана.

Решения задачи (1.6), (1.7) с функцией  $F$  в виде (3.2) при  $F_2 = \pi/2$  и различных  $p^\circ$  качественно не отличаются от решений, приведенных на фиг. 2. Значение критического давления  $p_{ig}^\circ$  в данном случае равно 2,66, что также во много раз ниже соответствующего значения для линейной вязкой жидкости.

Введение физической нелинейности окружающей кавитационный пузырек жидкости, как видно, существенно влияет на безразмерное критическое давление на бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—16529).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
2. Аскарлов М. А. Кавитационное разрушение металлов и полимеров. Тбилиси: Сабчота сакартвело, 1973. 140 с.
3. Poritsky H. The collapse or growth of a spherical bubble in a viscous fluid//Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951. Ann Arbor, Mich., 1952. P. 813—821.
4. Забабахин Е. И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости//ПММ. 1960. Т. 24. № 6. С. 1129—1131.
5. Айвени, Хэммит. Численный анализ явления захлопывания кавитационного пузырька в вязкой сжимаемой жидкости//Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теор. основы инж. расчетов. 1965. Т. 87. № 4. С. 140—150.
6. Богородская В. И., Куропатенко В. Ф. О захлопывании пузырьков в вязкой сжимаемой жидкости//Тр. IV Всесоюз. семинара по числ. методам мех. вязкой жидкости, Рига, 1972. Новосибирск, 1973. С. 162—169.
7. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Гидродинамика неньютоновских жидкостей//Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3—98.
8. Fogler H. S., Goddard J. D. Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids//Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 5. P. 1135—1141.
9. Benjamin T. B., Ellis A. T. Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles//J. Fluid. Mech. 1990. V. 212. P. 65—80.
10. Ryskin G. Dynamics and sound emission of a spherical cavitation bubble in a dilute polymer solution//J. Fluid. Mech. 1990. V. 218. P. 239—263.
11. Георгиевский Д. В. Линеаризованная задача устойчивости вязкопластических тел с произвольным скалярным соотношением//Вестн. МГУ. Сер. Мат., мех. 1992. № 6. С. 65—67.
12. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
13. Григорьев В. Г., Дунин С. З., Сурков В. В. Захлопывание сферической поры в вязкопластическом материале//Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 1. С. 199—201.
14. Ильющин А. А. Некоторые вопросы теории пластического течения//Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 2. С. 64—86.