МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1994

УДК 533.95:537.525

 Р. Ш. ИСЛАМОВ

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНОДНОЙ ОБЛАСТИ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА ПОВЫШЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

**В одномерной постановке в рамках диффузионно-дрейфового приближения аналитически исследована структура анодного слоя тлеющего разряда повышенного давления. Рекомбинация заряженных частиц заметно снижает величину анодного падения потенциала и толщину анодной области. При достаточно высоких значениях плотности тока, характерных для токовых пятен, из-за уменьшения толщины анодного слоя становится существенным вклад диффузионных процессов. Получены аналитические оценки анодного падения потенциала и толщины анодного слоя, удовлетворительно описывающие результаты численных расчетов.**

На приэлектродные части тлеющего разряда приходится заметная часть общего энерговклада и объема. Частое наблюдение прорастания шнуров от электродов указывает на важность приэлектродных областей при зарождении неустойчивости. В условиях самостоятельного тлеющего разряда повышенного давления нарушение устойчивости обычно связано с образованием анодных токовых пятен и последующим развитием из них шнуров. Согласно экспериментальным и расчетным данным (см., например, [1]), зависимость анодного падения потенциала от тока оказывается падающей. В аналитических моделях анодной области тлеющего разряда повышенного давления [1—2] пренебрегается рекомбинацией и диффузией заряженных частиц.

**1. Постановка задачи.** Состояние газоразрядной плазмы, состоящей из электронов и положительных ионов, описываем в дрейфовом приближении с сохранением диффузии электронов [3]

$$D_e \frac{dm}{dx} + m\mu_e E + n\mu_i E + (n - m) V = \Gamma \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dx}(n\mu_i E + nV) = m(\varkappa - \eta) \tag{1.2}$$

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e(n - m) \tag{1.3}$$

$$n = 0, \quad m\mu_e E = \Gamma(1 - S)\ (x = 0); \quad n - m = 0\ (x = L) \tag{1.4}$$

где $m$, $n$ — концентрации электронов и положительных ионов соответственно, $\mu$ и $D$ — их коэффициенты подвижности и диффузии, $E$ — напряженность электрического поля, $\varkappa$ — частота ионизации за счет соударений электронов с нейтральными частицами, $\eta = n\beta$, $\beta$ — коэффициент электрон-ионной рекомбинации, $V$ — скорость газа ($V > 0$ при прокачке от анода), $\Gamma$ — сохраняющийся полный поток заряженных частиц, ось $x$ направлена от анода к катоду. Из-за малости ионной температуры диффузия ионов исключена из уравнений (1.1)—(1.2). В условиях, когда энергия электронов за счет дрейфового движения сравнительно невелика по сравнению с энергией теплового движения, значение параметра $S$ может быть задано формулой [4, 5]

$$S = 1 - 2\frac{1+P}{1-P}\frac{\mu_e E_a}{V_T}, \quad V_T = \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e}\right)^{1/2}$$

где $V_T$ — средняя тепловая скорость электронов и $P$ — вероятность отражения электронов от поверхности анода. При выборе параметра $S=0$ игнорируются детали сложного механизма взаимодействия электронов с поверхностью анода.

В уравнениях (1.1)—(1.4) перейдем к безразмерным переменным

$$\varepsilon u' = [1 - u - \xi v - \xi (v - u) V_g] \left(\frac{\mu_e z}{\mu_e^a z_a}\right)^{1/2} + \varepsilon \frac{1+h_e}{2+h_e}\frac{(v-u)u}{z} \tag{1.5}$$

$$v' = u(\nu - \lambda) + U\frac{(v-u)v}{z} \tag{1.6}$$

$$z' = v - u \tag{1.7}$$

$$u|_a + S = 1, \quad v|_a = 0, \quad v - u|_p = 0 \tag{1.8}$$

$$0 \le t = \frac{x}{L} \le 1, \; H' \equiv \frac{dH(t)}{dt}, \; \varepsilon = \frac{D_e}{\mu_e^a E_a L}, \; \xi = \frac{\mu_i}{\mu_e}, \; u = \frac{m\mu_e E}{\Gamma}, \; v = \frac{n\mu_e E}{\Gamma}$$

$$z = (4\pi e\Gamma L)^{-1}\int_0^E \mu_e E dE = \frac{\mu_e E^2}{4\pi e\Gamma L(2+h_e)}, \quad h_{e,i} = \frac{\partial \ln \mu_{e,i}}{\partial \ln E}, \quad \nu = \frac{\varkappa L}{\mu_i E + V}$$

$$\lambda = \frac{\eta L}{\mu_i E + V}, \quad V_g = \frac{V}{\mu_i E}, \quad U = \frac{1+h_e}{2+h_e}\frac{V+V_h}{\mu_i E + V}, \quad V_h = \frac{h_e - h_i}{1+h_e}\mu_i E$$

где $V_h$ — скорость амбиполярного дрейфа [6]. Индексами $a$ и $p$ помечены соответственно значения величин на аноде ($t=0$) и положительном столбе ($t=1$). В типичных условиях тлеющего разряда повышенного давления величина малого параметра $\varepsilon$ порядка $10^{-3}$. Рассматриваемая задача относится к типу сингулярно возмущенных систем. Наличие малого параметра $\varepsilon$ перед старшей производной в уравнении (1.5) позволяет воспользоваться асимптотическим методом для построения приближенного решения задачи.

**2. Построение асимптотического решения.** Следуя пограничному методу [7], решение задачи будем строить в виде

$$w(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i [w_i(t) + \Pi_i w(\tau) + P_i w(\tau_1)], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \tau_1 = \frac{t-1}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

где $w = \{u, v, z\}$; $w_i$, $\Pi_i w$ и $P_i w$ — регулярная и погранслойные части асимптотики. Подставляя (2.1) в (1.5)—(1.8) и пользуясь техникой работы с погранфункциями [7], могут быть найдены все $w_i$, $\Pi_i w$, $P_i w$. Для главных членов регулярной части асимптотики получим систему уравнений

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 1 + z_0' \tag{2.2}$$

$$z_0'' = \nu_0 - \lambda_0 + (1 + z_0')U\frac{z_0'}{z_0} \tag{2.3}$$

вырожденную по отношению к системе (1.5)—(1.7) (при $\varepsilon = \xi = 0$). Членами порядка $\xi$ ($\simeq 10^{-2}$), существенно загромождающими формулы, пренебрегаем. Анализ показывает, что в рассматриваемом случае, когда отношение $\lambda/v$ ограничено при $v \to \infty$, учет величины $\xi$ в (2.2)—(2.3) вносит регулярное возмущение на промежутке $0 \le t < \infty$ и качественный характер решения при $\xi \to 0$ не меняется. В противном случае (т. е. при $\lambda/v \to \infty$ при $v \to \infty$) решение будет определено (при $\xi \ne 0$) только в некоторой конечной области и ее нельзя продолжить в область $t \to \infty$ [8].

Регулярная часть асимптотики не удовлетворяет, вообще говоря, краевому условию (1.8). Для устранения этого несоответствия и предназначены пограничные функции $\Pi_i w$ и $P_i w$. Для главного члена $\Pi_0 w(\tau) = ü\Pi_0 u(\tau)$, $\Pi_0 v(\tau)$, $\Pi_0 z(\tau)$A пограничной части асимптотики получим систему уравнений и граничных условий

$$\Pi_0' u(\tau) = -\Pi_0 u(\tau) \left\{ \frac{\mu_e [z_0(0) + \Pi_0 z(\tau)]}{\mu_e^a z_0(0)} \right\}^{1/2}, \qquad \Pi_0' v(\tau) = \Pi_0' z(\tau) = 0$$

$$u_0 + \Pi_0 u|_a + S_0 = 1, \qquad v_0 + \Pi_0 v|_a = 0, \qquad S_0 = S(z = z_0 + \Pi_0 z|_a)$$

Учитывая стандартное требование $\Pi_0 w(+\infty) = 0$ [7], находим решение

$$\Pi_0 u = -S_0 \exp(-\tau), \qquad \Pi_0 v = \Pi_0 z = 0$$

Для погранслойной части асимптотики $P_0 w$ на правом конце сегмента [0, 1] аналогичным образом получаем $P_0 u = P_0 v = P_0 z = 0$. Подставляя значения пограничных функций $\Pi_0 w$ и $P_0 w$ в (1.8), определяем краевые условия для регулярной части асимптотики (2.3)

$$z_0'|_a = -1, \qquad z_0'|_p = 0 \tag{2.4}$$

Для членов асимптотики $w_1(t) = \{u_1(t), v_1(t), z_1(t)\}$ имеем систему линейных уравнений

$$u_1 = -f, \qquad v_1 = -f + z_1', \qquad f = (\mu_e^a z_0^a)^{1/2} [(\mu_e z_0)^{-1/2}]' \tag{2.5}$$

$$z_1'' + \left( \lambda_v' - U \frac{2v_0 - 1}{z_0} \right) z_1' - \left( \nu_z' - \lambda_z' - U v_0 \frac{v_0 - 1}{z_0^2} \right) z_1 = F \tag{2.6}$$

$$F = f' + f \left( \lambda_v' - z_0'' + U \frac{z_0'^2}{z_0} \right)$$

Для погранслойной части асимптотики $\Pi_1 w$ получим систему уравнений и граничных условий

$$\Pi_1' u(\tau) = -\Pi_1 u(\tau) - f_a ü[1 + \Pi_0 u(\tau)]^2 - 1А$$

$$\Pi_1' v(\tau) = \Pi_0 u(\tau) [\nu_0(0) - \lambda_0(0)], \qquad \Pi_1' z(\tau) = -\Pi_0 u(\tau)$$

$$u_1 + \Pi_1 u|_a + S_1 = 0, \qquad v_1 + \Pi_1 v|_a = 0, \qquad S_1 = (z_1 + \Pi_1 z) S_z'|_a$$

Учитывая требование $\Pi_1 w(+\infty) = 0$ [7], находим решение

$$\Pi_1 u(\tau) = [(1 - S_0^2) f_a - S_1 + 2f_a S_0 \tau + f_a S_0^2 \exp(-\tau)] \exp(-\tau)$$

$$\Pi_1 v(\tau) = (\nu_0^a - \lambda_0^a) S_0 \exp(-\tau), \qquad \Pi_1 z(\tau) = -S_0 \exp(-\tau)$$

Для погранслойной части асимптотики $P_1 w$ на правом конце сегмента [0, 1] аналогичным образом получаем $P_1 u = P_1 v = P_1 z = 0$. Подставляя значения пограничных функций $\Pi_1 w$ и $P_1 w$ в (1.8), определяем краевые условия для регулярной части асимптотики (2.6)

$$z_1'|_a = f_a - (\nu_0^a - \lambda_0^a) S_0, \qquad z_1'|_p = 0 \tag{2.7}$$

Поскольку однородное уравнение (2.6) (т. е. при $F=0$) имеет решение $Z = z_0'$, то можно выписать ее общее решение [8]

$$z_1 = c_1 Z + c_2 Z \int \frac{dt}{QZ^2} + Z \int \left( \int QZFdt \right) \frac{dt}{QZ^2}$$

$$Q = \exp \left[ \int \left( \lambda_v' - U \frac{2v_0 - 1}{z_0} \right) dt \right]$$

С учетом граничных условий (2.7) получим

$$z_1 = z_0' \left[ \frac{\int\limits_0^\infty QFz_0'dt}{Q_a z_{0a}' z_{0a}''} + \frac{f_a - (v_0^a - \lambda_0^a) S_0}{z_{0a}''} - \int\limits_0^t \left( \int\limits_t^\infty QFz_0'dt \right) \frac{dt}{Qz_0'^2} \right] \tag{2.8}$$

Остальными членами $w_s$, $\Pi_s w$ и $P_s w$ для $s=2, 3, \ldots$ интересоваться не будем. Оценка остаточного члена (2.1) решения системы уравнений типа (1.5)—(1.8) в общем виде выполнена в [7]. Таким образом, при известном решении уравнения (2.3) с граничными условиями (2.4) может быть определено $z_1$ из уравнения (2.8) и решение задачи запишется в виде

$$u = 1 - S_0 \exp(-\tau) - \varepsilon \,\ddot{\text{U}}f - [f_a [1 - S_0^2 + 2S_0\tau + S_0^2 \exp(-\tau)] - S_1] \exp(-\tau)\text{A}$$

$$v = 1 + z_0' - \varepsilon [f - z_1' - (v_0^a - \lambda_0^a) S_0 \exp(-\tau)] \tag{2.9}$$

$$z = z_0 + \varepsilon [z_1 - S_0 \exp(-\tau)]$$

При $h_e = -1$ $F=f=0$ и диффузионные эффекты определяются исключительно механизмом замыкания электронного тока на анод.

**3. Влияние диффузии электронов на интегральные характеристики анодного слоя в отсутствие переноса возмущений ($V = 0, h_e = h_i = 0$).** Поскольку обычно рекомбинационная длина $X_\beta = \mu_i E/\beta m$ в условиях тлеющего разряда значительно превосходит характерный размер нарушения квазинейтральности $X_\rho$, при вычислении интегралов в (2.8) можно полагать $Q \simeq 1$. Тогда, учитывая, что

$$\int\limits_t^\infty Fz_0'dt \simeq f(-z_0'/2 + z_0'^2/3)$$

из (2.8) получим

$$z_1 \simeq z_0' \left( \frac{f_a}{6z_a''} - S_0 + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \frac{fdt}{z_0'} - \frac{1}{3} \int\limits_0^t fdt \right) \tag{3.1}$$

Решение (2.9) с учетом (3.1) в размерных переменных имеет вид

$$m = \frac{\Gamma}{\mu_e E_0} \left( 1 - S_0 \exp\left( -\frac{x}{X_u} \right) + \right.$$

$$+ \frac{D_e E_0'}{\mu_e E_0^2} \left\{ 1 - \left[ 1 + 2S_0 \frac{x}{X_u} - S_0^2 + S_0^2 \exp\left( -\frac{x}{X_u} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + S_E' \frac{\mu_i}{3\mu_e} \cdot \frac{2\pi e \Gamma}{\varkappa_a - \eta_a} \right] \exp\left( -\frac{x}{X_u} \right) \right\} \right) \tag{3.2}$$

$$n = \frac{\Gamma}{\mu_e E_0} \left( 1 + \frac{\mu_e E_0 E_0'}{4\pi e \Gamma} - \frac{D_e E_a'}{\mu_e E_a E_0} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{\varkappa_0 - \eta_0}{\varkappa_a - \eta_a} - \frac{E_a E_0'}{2E_0 E_a'} + \frac{E_0'^2}{3E_a'^2} + \right. \right.$$

$$+\frac{\varkappa_0-\eta_0}{\mu_i E_a'}\left[S_0+\frac{1}{3}\left(\frac{E_a}{E_0}-1\right)-\frac{E_a^2E_0'}{2}\int\limits_0^x\frac{dx}{E_0^3}-S_0\exp\left(-\frac{x}{X_u}\right)\right]\Big\}\Big) \tag{3.3}$$

$$E=E_0+\frac{D_eE_0'}{\mu_eE_a}\left[\frac{E_a^2E_a'}{2}\int\limits_0^x\frac{dx}{E_0^3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\mu_iE_a'}{\varkappa_a-\eta_a}-\right.$$

$$\left.-S_0-\frac{1}{3}\left(\frac{E_a}{E_0}-1\right)+S_0\exp\left(-\frac{x}{X_u}\right)\right] \tag{3.4}$$

$$(E_0E_0')'=\frac{4\pi e\Gamma(\varkappa_0-\eta_0)}{\mu_e\mu_iE_0},\qquad E_0'|_a=-\frac{4\pi e\Gamma}{\mu_eE_0^a},\qquad E_0'|_p=0 \tag{3.5}$$

где $X_u=D_e/\mu_eE_a$ — длина установления, характеризующая пространственный масштаб возмущения из-за диффузионного стока электронов на анод. Нелинейное дифференциальное уравнение (3.5) имеет первый интеграл

$$G(E_0)=\int\limits_{E_p}^{E_0}(\varkappa-\eta)\,dE=\frac{\mu_e\mu_iE_0^2E_0'^2}{8\pi e\Gamma} \tag{3.6}$$

и, следовательно, интегрируется в квадратурах. Используя (3.4), вычислим напряженность электрического поля на аноде и интегральные характеристики: анодное падение потенциала $U_a$, размер нарушения квазинейтральности $X_p$ и среднее значение толщины анодного слоя $X_E$. Для этих целей явный вид функции $E_0$, как будет видно из дальнейшего, не потребуется. Согласно (3.4)

$$E|_a=E_a+E_a^d,\quad E|_p=E_p,\quad E_a=E_0|_a,\quad E_a^d=-\frac{D_e\mu_i(4\pi e\Gamma)^2}{6\mu_e^3E_a^3(\varkappa_a-\eta_a)},\quad \varkappa(E_p)=\frac{\beta\Gamma}{\mu_eE_p}$$

С учетом граничного условия из соотношения (3.6) следует известное выражение для нахождения поля на аноде [1]

$$\int\limits_{E_p}^{E_a}(\varkappa-\eta)\,dE=\frac{\mu_i}{\mu_e}2\pi e\Gamma \tag{3.7}$$

Для величины анодного падения потенциала $U_a$, используя (3.4), получим

$$U_a=\int\limits_0^\infty(E-E_p)\,dx=\int\limits_0^\infty(E_0-E_p)\,dx+\frac{D_e}{\mu_e}\Big\{\frac{2\pi e\Gamma}{\mu_e}\int\limits_0^\infty\frac{E_0-E_p}{E_0^3}\,dx+$$

$$+\left[S_0-\frac{\mu_i2\pi e\Gamma}{3\mu_eE_a(\varkappa_a-\eta_a)}\right]\left(1-\frac{E_p}{E_a}\right)\Big\} \tag{3.8}$$

Анализ показывает, что при неизменном знаке заряда в анодной области максимальные значения подынтегральных выражений в правой части (3.8) достигаются соответственно в начальной ($x=0$) и внутренней ($x=x_*$) точках на пути интегрирования. Вкладом последнего слагаемого можно пренебречь из-за резкой зависимости $\varkappa$ от $E$ в соотношении (3.7). В соответствии с асимптотическими методами из [9] (стр. 89 и 128) в рассматриваемом случае можем записать

$$U_a=\frac{E_a-E_p}{p_a'}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma(s+1)\,\alpha_s+\frac{D_e4\pi e\Gamma(E_*-E_p)}{\mu_e^2E_*^3(2q_*'')^{1/2}}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\beta_{2s}+\frac{D_e}{\mu_e}S_0\Delta$$

$$p=-\ln\left(\frac{E}{E_p}-1\right),\quad q=-\ln\left(\frac{E}{E_p}-1\right)+3\ln\left(\frac{E}{E_p}\right),$$

$$q_* = q(E_*), \quad E_* = \frac{3}{2} E_p, \; \Delta = 1 - \frac{E_p}{E_a}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция и, в частности

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{p_a''}{p_a'^2}, \quad \alpha_2 = \frac{3p_a''^2 - p_a' p_a^{(3)}}{2p_a'^4}$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_2 = 2\left(\frac{5}{3} q_*^{(3)} q_*^{(3)} - q_*'' q_*^{(4)}\right)(2q_*'')^{-3}, \quad H^{(k)} = \frac{d^k H}{dx^k}$$

Следовательно

$$U_a = \frac{\mu_e E_a (E_a - E_p)^2}{4\pi e\Gamma}(1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots) + \frac{D_e}{\mu_e}\left[S_0\Delta + W\left(1 + \frac{\beta_2}{2} + \ldots\right)\right] \tag{3.9}$$

$$W = \left[\frac{\pi G(E_a)}{108 G(E_*)}\right]^{1/2}$$

Характерный размер нарушения квазинейтральности в анодной области и толщина анодного слоя задаются формулами

$$X_\rho = \int_0^\infty \rho x dx \left(\int_0^\infty \rho dx\right)^{-1} = \frac{U_a}{E_a + E_a^d - E_p} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mu_e E_a (E_a - E_p)}{4\pi e\Gamma}(1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots) + \frac{D_e}{\mu_e E_a}\left[S_0 + \left(1 + \frac{\beta_2}{2} + \ldots\right)\frac{W}{\Delta}\right] \tag{3.10}$$

$$X_E = \int_0^\infty (E - E_p) x dx \left(\int_0^\infty (E - E_p) dx\right)^{-1} \simeq \frac{1}{U_a}\int_0^\infty U_0 dx +$$

$$+ \frac{D_e 2\pi e\Gamma}{\mu_e^2 U_a}\left[\int_0^\infty dx \int_x^\infty U_0 \left(\frac{1}{E_0^3}\right)' dx + 2\int_0^\infty \frac{U_0}{E_0^3} dx\right], \quad U_0 = \int_x^\infty (E_0 - E_p) dx$$

Оценивая интегралы аналогично предыдущему и ограничиваясь только существенными членами, получим

$$X_E \simeq \frac{\mu_e E_a (E_a - E_p)}{4\pi e\Gamma}(1 + 2\alpha_1 + \ldots) + \tag{3.11}$$

$$+ \frac{D_e}{\mu_e E_a}\left\{\frac{[W(2 + \beta_2) - (1 + \alpha_1 + 2\alpha_2)\Delta^2]^2}{6(1 + \alpha_1 + 2\alpha_2)^2 \Delta^4} +\right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 3^{5/2} W^2 (1 - 1/\Delta)^2}{\pi^{1/2}(1 + \alpha_1 + 2\alpha_2)(\varkappa_* E_*/G_* - 4)^{1/2}} - (1 + \alpha_1)\left[S_0 + \left(1 + \frac{\beta_2}{2}\right)\frac{W}{\Delta}\right]\right\}$$

Если в формулах (3.9) и (3.11) пренебречь диффузионными членами и коэффициентами $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots$, учитывающими влияние ионизации, то получим оценки (3.33) из [1]. Приведенные результаты, полученные асимптотическим разложением по степеням малого параметра $\varepsilon$, относятся к случаю, когда из-за диффузии электронов появляется тонкий пограничный слой, но профиль параметров плазмы внутри сравнительно более толстого анодного слоя определяется в основном нарушением нейтральности. Из сопоставления $X_\rho^0$ и $X_u$ получаем, что это соответствует условию

$$\Gamma \le \mu_e^2 E_a^3 \Delta / (D_e 4\pi e)$$

Асимптотическое разложение решения задачи (1.1)—(1.3) для случая, когда появление тонкого пограничного слоя обусловлено нарушением нейтральности, что характерно для разрядов низкого давления, построено в [10].

4. **Сравнение с расчетными данными.** В соответствии с наиболее распространенными аппроксимациями зависимость $\varkappa$ и $\beta$ от электрического поля $E$ можно представить в виде

$$\varkappa = \mathrm{const}\, E^r \exp(-B/E), \quad \beta = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

Тогда, полагая существенной роль рекомбинации только в области квазинейтральности, получим

$$G(E) \simeq \varkappa_p E_p e^{\sigma} \sigma^{1+r} \left[ \Gamma\left(-1-r, \sigma \frac{E_p}{E}\right) - \Gamma(-1-r, \sigma) \right] \tag{4.2}$$

$$\sigma = B/E_p, \quad \Gamma(\alpha, z) = \int\limits_z^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

где $\Gamma(\alpha, z)$ — дополнительная неполная гамма-функция. Для рассматриваемого случая больших значений $z + 1 - \alpha$ воспользуемся разложением [11]

$$\Gamma(\alpha, z) = \frac{e^{-z} z^{\alpha}}{z + 1 - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(z)}{(z + 1 - \alpha)^{2k}}$$

$$g_{k+1}(z) = (1 - \alpha - 2kz)\, g_k(z) + z(z + 1 - \alpha)\, g_k'(z), \quad g_0 = 1$$

Ограничиваясь в (4.2) главным членом асимптотического разложения, с хорошей точностью имеем

$$G(E) \simeq \frac{\varkappa E}{2 + r + B/E} - \frac{\varkappa_p E_p}{2 + r + B/E_p}$$

Тогда уравнение (3.7), позволяющее определить значение $E_a$, запишется в виде

$$\varkappa_a \simeq \left(2 + r + \frac{B}{E_a}\right) \left( \frac{\mu_i}{\mu_e} \cdot \frac{2\pi e\Gamma}{E_a} + \frac{\varkappa_p E_p}{E_a} \cdot \frac{1}{2 + r + B/E_p} \right)$$

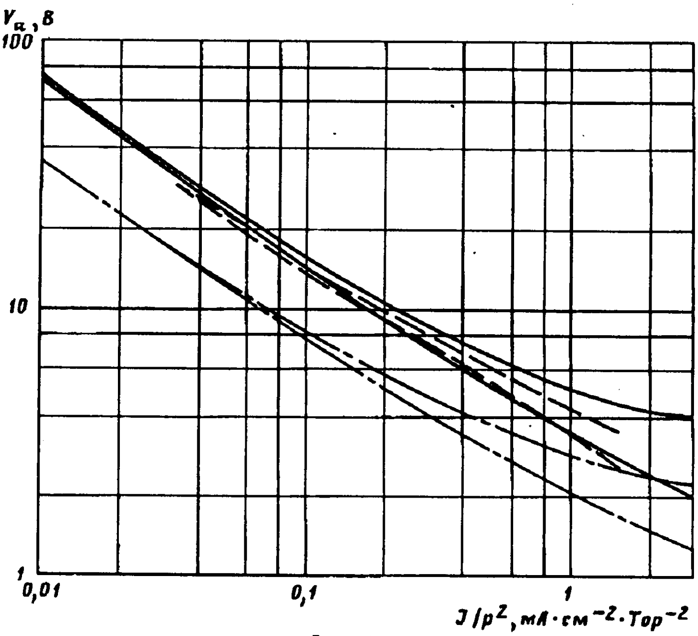
Следовательно, поправка к полю на аноде за счет диффузии сравнительно невелика

$$E_a^d = -\frac{D_e 4\pi e\Gamma}{3\mu_e^2 E_a^2 (2 + r + B/E_a)}$$

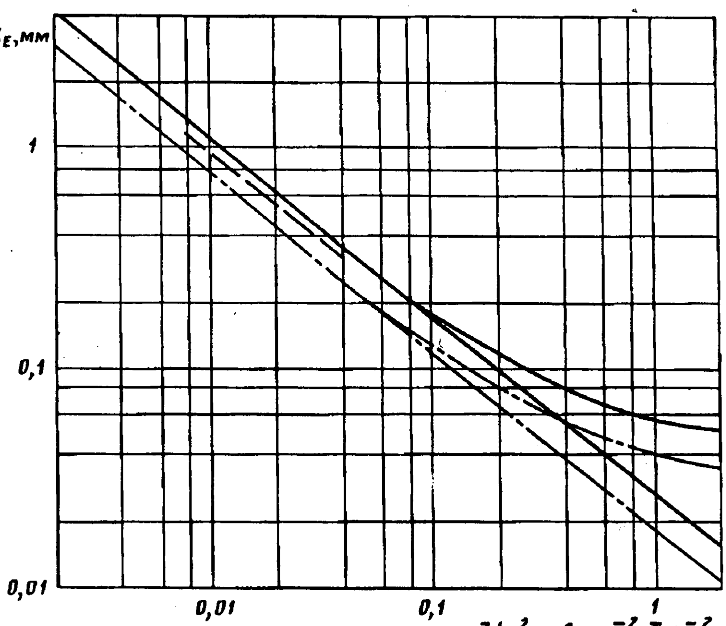
и при условии (4.1) коэффициенты асимптотического разложения и параметр $W$ в (3.9)—(3.11) будут задаваться формулами

$$\alpha_1 \simeq \frac{\Delta}{2}\left(\frac{B}{E_a} + r\right) - 1, \quad a_2 \simeq \frac{1}{2}\,[a_1^2 + (1 + \alpha_1)(2\Delta - 1) + \Delta^2]$$
$$\beta_2 \simeq \frac{1}{48}\left[\left(\frac{B}{E_a} + r - 7\right)^2 - 21\right], \quad W \simeq \left[\frac{\pi\varkappa_a E_a (2 + r + B/E_*)}{108\varkappa_* E_* (2 + r + B/E_a)}\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

Сравним полученные приближенные формулы с расчетами. Необходимые значения параметров взяты из [12]. На фиг. 1 приводятся зависимости величины анодного падения потенциала $U_a$ от плотности тока $J$ ($J \equiv e\Gamma$) для азота при давлении $p = 25$ тор, вычисленные по формуле (3.9) с коэффициентами (4.3) (сплошная кривая) и полученные в численных расчетах [12] (штриховая кривая). На фиг. 2 сравниваются зависимости толщины анодного слоя $X_E$ от плотности тока при давлении $p = 50$ тор, вычисленные по формуле (3.11) (сплошная кривая) и полученные в численных расчетах [2] (штриховая кривая). При увеличении коэффициента рекомбинации $\beta$ из-за роста напряженности поля $E_p$ анодное падение потенциала $U_a$ и толщина анодного слоя $X_E$ уменьшаются (штрихпунктирные кривые — $\beta$ увеличено с $0{,}75 \cdot 10^{-7}$ до $6 \cdot 10^{-6}$ см$^3$/с). Верхние кривые соответствуют значению $D_e/\mu_e = 1$ эВ, нижние кривые — экстраполяция данных для $D_e/\mu_e \to 0$. Видно, что влияние диффузии растет с увеличением плотности тока и становится




Фиг. 1




Фиг. 2

существенным при достаточно высоких значениях тока, характерных для токовых пятен. Отметим возникновение пограничного пристеночного слоя в концентрации электронов (3.2) из-за диффузии.

Таким образом, рассмотренный метод асимптотического решения уравнений диффузионно-дрейфовой модели анодной области тлеющего разряда повышенного давления оказывается достаточно продуктивным для наглядного анализа как физической картины, так и для простых и быстрых оценок характеристик анодного слоя в широком диапазоне условий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Голубев В. С., Пашкин С. В.* Тлеющий разряд повышенного давления. М.: Наука, 1990. 334 с.
2. *Акишев Ю. С., Высикайло Ф. И., Напартович А. П., Пономаренко В. В.* Исследование квазистационарного разряда в азоте//Теплофиз. высоких температур. 1980. Т. 18. Вып. 2. С. 266—272.
3. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газе. Т. 1. Общие вопросы электродинамики газов. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.
4. *Исламов Р. Ш.* О разрешимости диффузионно-дрейфового приближения в теории газового разряда: Препринт № 81. Троицк: Науч.-исслед. центр по технол. лазерам РАН, 1991. 32 с.
5. *Исламов Р. Ш.* Моделирование формирования анодного пятна в самостоятельном тлеющем разряде//Журн. техн. физики. 1991. Т. 61. № 7. С. 12—15.
6. *Высикайло Ф. И., Цендин Л. Д.* Резко неоднородные профили концентрации плазмы в разряде при повышенных давлениях//Физика плазмы. 1986. Т. 12. № 10. С. 1206—1210.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 207 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
10. *Воронов А. Я.* О структуре приэлектродных пограничных слоев газоразрядной плазмы//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 43—51.
11. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
12. *Исламов Р. Ш.* Расчетные характеристики анодной области продольного разряда с учетом диффузии//ПМТФ. 1990. № 5. С. 3—5.


Москва

Поступила в редакцию
3.II.1993