

УДК 533.692:532.516.5

© 1994 г. О. Л. ЗАЙЦЕВ, В. В. СЫЧЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Представлены результаты расчетов стационарного отрывного обтекания 12%-ного синусообразного профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости как при наличии разделительной пластины, так и без нее. Уравнения Навье — Стокса, записанные в переменных функция тока — завихренность, аппроксимируются по схеме центральных разностей и решаются совместно при помощи прямого метода. Проводится анализ полученных результатов с точки зрения их соответствия асимптотической теории, основанной на известной трехпалубной схеме.

Исследование отрывных течений за тонкими телами при больших числах Рейнольдса (Re) на основе асимптотического подхода ($Re \rightarrow \infty$), приводящего к известной трехпалубной модели, указывает на ряд особенностей, происхождение которых все еще не вполне ясно. Так, например, при построении течений с замкнутыми зонами отрыва около твердых стенок при некотором значении параметра подобия λ , пропорционального $Re^{1/4}$, всегда возникает особенность (перед присоединением потока), не позволяющая дальнейшее продвижение по этому параметру [1]. Эта особенность заключается в тенденции к неограниченному возрастанию трения и градиента давления в некоторой точке поверхности. Для установления того, в какой мере поведение решения связано с использованием асимптотического подхода, весьма интересно проведение соответствующих расчетов на основе полных уравнений Навье — Стокса, что и предпринято в данной работе.

Принципиальным вопросом, связанным с построением течений в замкнутых зонах отрыва, является предельное состояние потока при $Re \rightarrow \infty$. Предположение о том, что движение жидкости здесь происходит по схеме Прандтля — Бэтчелора с постоянной завихренностью, приводит к известному противоречию ввиду невозможности существования периодического пограничного слоя [2, 3]. Альтернативная ситуация, при которой движение в зоне отрыва в пределе отсутствует (жидкость стремится к покою), связана с неизбежностью возникновения возвратной струи вдоль стенки или плоскости симметрии течения, что также не дает возможности избежать внутренних противоречий [4] и плохо соответствует экспериментальным наблюдениям. Одним из выходов из этих противоречий является невозможность существования стационарного течения в области смыкания зоны отрыва при достижении больших чисел Re [5]. Можно ожидать, что рассмотрение течения на основе полных уравнений Навье — Стокса позволит прояснить и эту ситуацию.

В настоящей работе такое исследование проводится на примере расчета обтекания синусообразного 12%-ного профиля как при наличии разделительной пластины, так и без нее. Рассматривается диапазон чисел Рейнольдса от $5 \cdot 10^3$ до $4 \cdot 10^4$.

В работе приведена улучшенная вычислительная методика (по сравнению с работами, авторы которых занимались решением стационарной задачи об обтекании тела потоком вязкой несжимаемой жидкости [6, 7]), которая включает квазиньютоновский итерационный процесс с хорошим регуляризатором и экономичный аппарат прямых методов решения систем линейных алгебраических

уравнений на текущей итерации по нелинейности, работающий на любых, не слишком плохо обусловленных матрицах и существенно учитывающий структуру разреженности и характер граничных условий.

Алгоритм сгущения узлов на границах внутри расчетной области опирается на идею восполнения полученного дискретного отображения до непрерывного с помощью интерполяционных бикубических сплайнов.

1. Постановка задачи. Двумерные уравнения Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в переменных функциях тока Ψ и завихренность ω записывают в дивергентной форме в произвольной криволинейной системе координат (ξ, η) : $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, где x, y — декартовы координаты, в форме законов сохранения

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = 0$$

Векторы потоков E, G и источника H в криволинейной системе координат связаны с соответствующими декартовыми векторами E, G, H по формулам

$$E = J \left(E \frac{\partial \xi}{\partial x} + G \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad G = J \left(E \frac{\partial \xi}{\partial x} + G \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

$$H = JH, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}, \quad E = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad u\omega - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^T$$

$$G = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v\omega - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^T, \quad H = (\omega, 0)^T$$

Число Рейнольдса $\text{Re} = U_\infty r / \nu$, где r — хорда профиля.

Прямоугольной расчетной области в математических переменных ξ и η соответствует расчетная область обтекания профиля.

На линии симметрии ставятся условия $\omega = 0, \Psi = 0$, на твердой поверхности используются условия прилипания $\partial \Psi / \partial y = 0, \Psi = 0$. В такой постановке не фигурирует завихренность, на поверхности тела она находится из решения всей системы уравнений.

Для уравнения Пуассона для функции тока на границах ξ_{\min} и η_{\max} поставлены условия набегающего потока, а на границе ξ_{\max} — «мягкие» граничные условия на производную от скорости. Для уравнения переноса и диффузии завихренности используются граничные условия, определяемые направлением распространения возмущений и записанные в инвариантах Римана. Они определяются знаком соответствующей компоненты вектора скорости, которая является собственным числом конвективной части оператора $\partial E / \partial Q$, где $Q = |0, \omega|^T$, а инвариантом в данном случае служит сама завихренность.

Синусообразный профиль описывается следующим выражением:

$$y = t/4r [1 + \sin 2\pi(x - 0,25)], \quad 0 < x < 1.$$

Во всех результатах расчетов, приведенных в данной работе, отношение t/r равно 0,12. В проведенных исследованиях установлено, что для исследуемых чисел Re задняя кромка разделительной пластины должна быть расположена не ближе $x = 5$, для того чтобы избежать влияния кромочных эффектов на картину течения.

2. Численные методы. Построение конечно-разностной схемы для уравнений, записанных в форме законов сохранения, основано на интегроинтерполяционном методе. Полученная схема является консервативной, т. е. обеспечивает выполнение законов сохранения даже при наличии разрывных решений.

Для аппроксимации в полуцелых узлах векторов потоков как уравнения Пуассона, так и уравнения переноса и диффузии завихренности были использованы центральные разности второго

порядка точности. Производные, входящие в граничные условия, аппроксимировались односторонними разностями со вторым порядком точности.

Нелинейная система разностных уравнений, полученная в результате аппроксимации, решается модифицированным методом Ньютона с использованием итерационного параметра регуляризации, заимствованного из [8] и успешно апробированного в [9].

Формирование матрицы Якоби на итерации осуществляется при помощи процедуры конечных приращений вектора невязки по вектору искомых функций. Численное формирование якобиана снижает скорость сходимости итерационного процесса с квадратичной до сверхлинейной. Однако практически разницы между квадратичной и сверхлинейной скоростями почти не наблюдается.

Решение системы линейных алгебраических уравнений, полученных на итерации по нелинейности, осуществляется при помощи метода исключения Гаусса с предварительной перенумерацией неизвестных по методу «обобщенных вложенных сечений» [9, 10]. Применение такого упорядочивания позволяет понизить число арифметических операций до $O(N^{3/2})$ (по сравнению с $O(N^2)$ для ленточного метода), а также понизить объем требуемой памяти до $O(1/2N \ln(N^{1/2}))$. Необходимо подчеркнуть, что матричные строки, связанные с узлами расчетной сетки на поверхности тела, обрабатываются особым образом, чтобы избежать вырожденности при LU -разложении. Необходимо контролировать, чтобы диагональные блоки в матрице, соответствующие телу, имели левую связь.

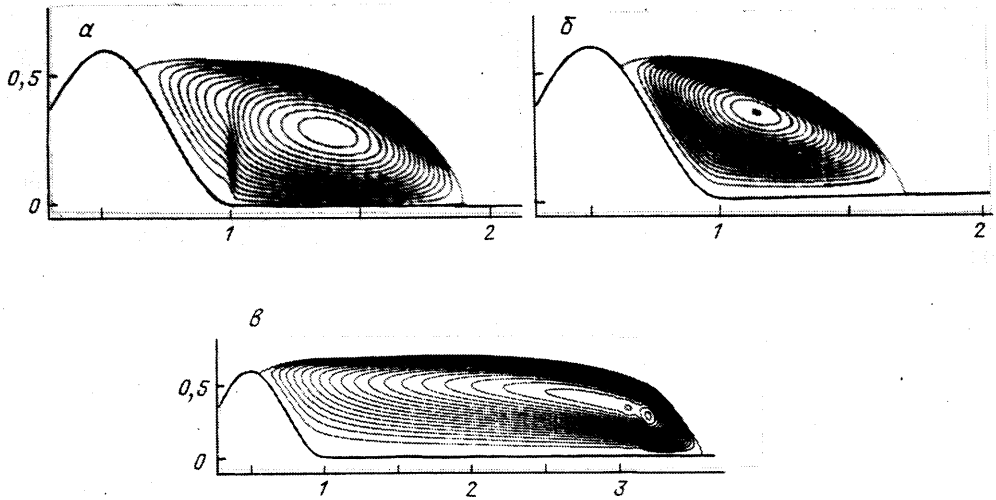
При решении задачи используется ортогональная расчетная сетка 291×91 , построение которой было выполнено на основе преобразования Кристоффеля — Шварца с предварительной расстановкой узлов на границе η_{\min} в физической области. На отрезке $x \in [-10, 20]$ было выделено несколько зон: $[-10, 0]$; $[-0, 1]$, $[-0, 1; 0, 5]$, $[0, 5; 1, 3]$, $[1, 3; x_4]$, $[x_4; x_5]$, $[x_5, 4, 1]$, $[4, 1, 20]$, где x_4 и x_5 выбирались так, чтобы выделить область смыкания нулевой линии тока. В каждом из интервалов находится следующий процент узлов: 5, 6, 27, p_1 , 35, p_2 , 7 соответственно. Выбор процентов p_1 , p_2 основывается на принципе одинакового шага сетки в соответствующих зонах.

В поперечном направлении были выделены толщина пограничного слоя и ширина рециркуляционной зоны. Используемые функции сгущения узлов по обоим направлениям являются дважды непрерывно дифференцируемыми.

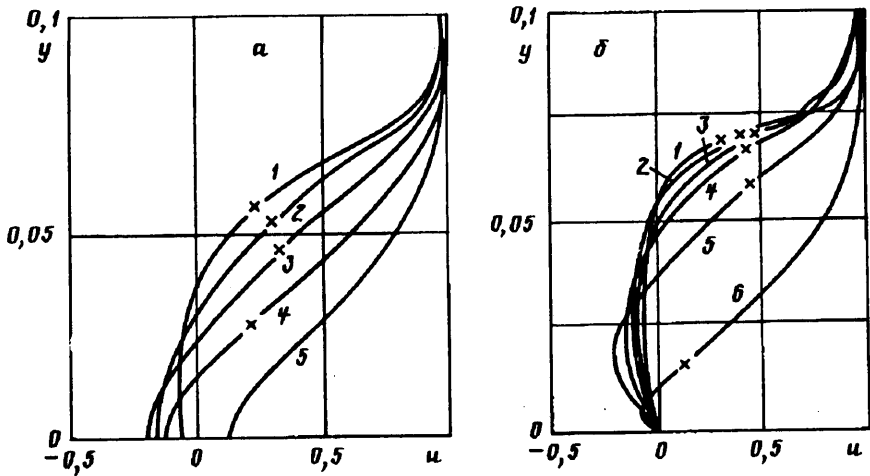
Численные эксперименты и теоретические исследования показали высокую эффективность и надежность используемой методики на сильно неравномерных сетках при решении данных задач.

3. Анализ результатов. Сопоставление результатов расчетов полей течения за профилем с разделительной пластиной и без нее при числе $Re = 10^4$ приведено на фиг. 1, а, б, а результаты расчета течения с разделительной пластиной при $Re = 4 \cdot 10^4$ — на фиг. 1, в. Течение с разделительной пластиной в большей мере обнаруживает тенденцию к схеме с застойной зоной при $Re \rightarrow \infty$. Об этом же свидетельствуют и соответствующие профили скорости, представленные на фиг. 2 (кривые 1—5 на фиг. 2, а соответствуют профилям скорости при $x = 1, 1,25; 1,5; 1,75; 2$, а кривые на фиг. 2, б — профилям в сечении; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5). На этих кривых отмечены точки, соответствующие положению разделительной линии тока $\Psi = 0$. Весьма интересны результаты расчетов распределения завихренности ω (безразмерного трения) и давления ($p = 2(p - p_0)/(\rho u^2)$) вдоль поверхности профиля ($x < 1$) и разделительной пластины ($x > 1$), приведенные на фиг. 3 (номера кривых соответствуют числам $Re = 10^4, 2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4$). Здесь видно интенсивное формирование все более резко выраженного локального экстремума поверхностного трения в обратном потоке в точках, соответствующих максимальному градиенту давления. Эти результаты полностью подтверждают соответствующие особенности, полученные на основании трехпалубной модели асимптотической теории [1, 11]. Локальный вклад в интеграл сил трения на стенке способствует интенсивному поглощению импульса возвратной струи вдоль стенки, приближая течение в зоне отрыва к схеме с зоной застоя.

Дальнейшее увеличение числа Re приводит к неустойчивостям, которые видны на фиг. 3. Природа их появления может быть связана как с физической, так и с численной неустойчивостью. Анализ неустойчивости требует дополнительных исследований, связанных либо с переходом к другим схемам аппроксимации (например, к схемам, используемым в [9]), либо с увеличением числа узлов



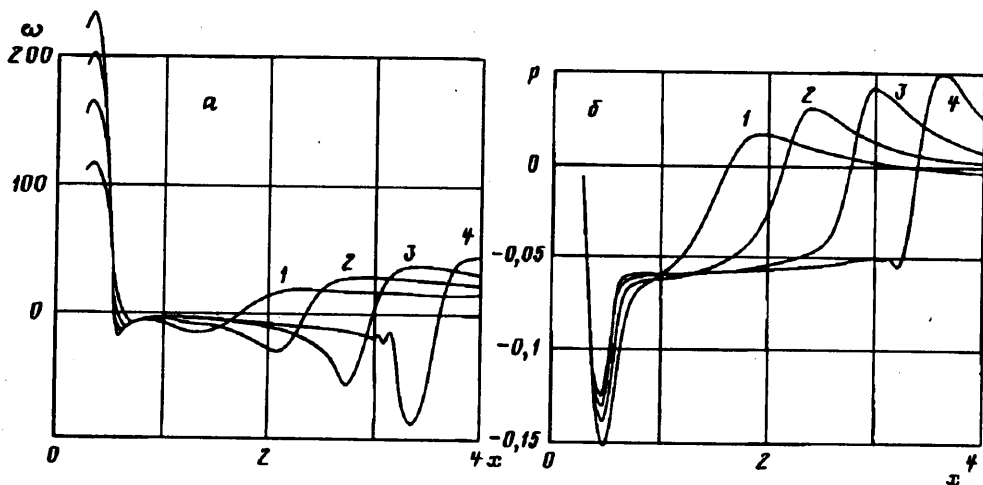
Фиг. 1



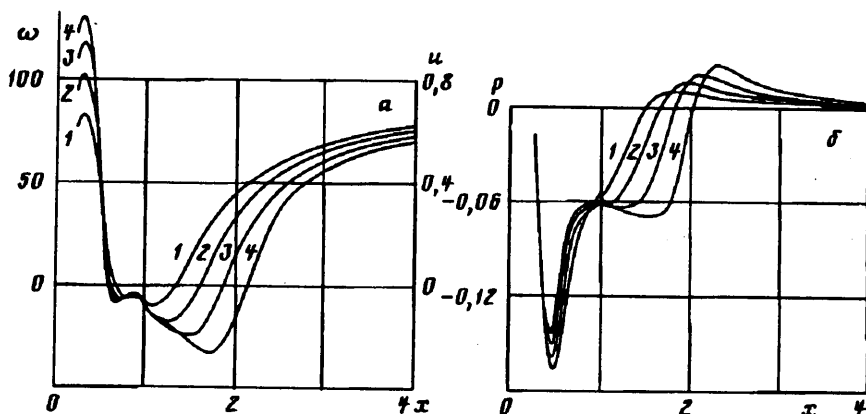
Фиг. 2

расчетной сетки. И первое и второе требует ЭВМ с очень высоким быстродействием и большой памятью. Использование более грубых сеток независимо от схемы аппроксимации приводит даже при значительно меньших числах Re к нефизическому решению. Это выражается в появлении вторичного отрыва при таких числах Re , когда он еще не должен возникать, и его уничтожении при измельчении расчетной сетки.

В случае отсутствия разделительной пластины (распределения завихренности и давления на теле и оси симметрии показаны на фиг. 4, где номера кривых соответствуют числам $Re = 5 \cdot 10^3, 7,5 \cdot 10^3, 10^4, 1,25 \cdot 10^4$) механизм поглощения импульса возвратной струи отсутствует. Возможно, этим объясняется более ранее (по числу Re) появление неустойчивости решения, свидетельствующее о неста-



Фиг. 3



Фиг. 4

ционарности течения. Оно выражается в невозможности получения решения при $Re > 12500$ на данной и более мелкой сетке независимо от начального приближения. Точность решения линейной системы на каждой нелинейной итерации контролировалась и составляла 10^{-10} . На расчетных сетках, содержащих меньшее число узлов в направлении ξ , могут быть достигнуты числа $Re = 3 \cdot 10^4$; по-видимому, это связано с наличием нелинейной неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith F. T. A reversed-flow singularity in interacting boundary layers//Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1988. V. 420. № 1858. P. 21—52.
2. Чернышенко С. И. Расчет отрывных течений маловязких жидкостей с помощью модели Бэтчелора//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 40—45.
3. Чернышенко С. И. Отрывное обтекание уступа, высота которого много больше толщины нижнего подслоя области взаимодействия//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 25—30.
4. Messiter A. F. Laminar separation — a local flow description for constant pressure downstream//AGARD Conf. proc. № 168. on flow separation. Gottingen, 1975. P. 4/1—4/10.

5. Сычев В. В. Асимптотическая теория отрывных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 2. С. 20—30.
6. Ramakrishnan S. V., Rubin S. G. Numerical solution of unsteady compressible reduced Navier-Stokes equations//AIAA Pap. 1986. № 205. 9 p.
7. Bender E. E., Khosla P. K. Solution of the two-dimensional Navier — Stokes equations using sparse matrix solvers//AIAA Pap. 1987. № 603. 9 p.
8. Каримов Т. Х. О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве//Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 5. С. 1038—1042.
9. Егоров И. В., Зайцев О. Л. Об одном подходе к численному решению двумерных уравнений Навье — Стокса методом сквозного счета//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 2. С. 286—299.
10. Lipton R. J., Rose D. J., Tarjan R. E. Generalized nested dissection//SIAM J. Numer. Analys. 1979. V. 16. № 2. P. 346—358.
11. Королев Г. Л. К асимптотической теории ламинарного отрыва жидкости при обтекании угла малого излома//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 180—182.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1992