МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1994

УДК 532.529.5:541.182.2/3

© 1994 г. Ю. А. БУЕВИЧ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРСНОГО ПОТОКА

На основе кинетического подхода предложена гидродинамическая модель дисперсного потока, учитывающая обмен импульсом и энергией при столкновениях частиц.

Реологические свойства, а следовательно, и особенности макроскопического движения разнообразных дисперсных систем в значительной мере определяются хаотическим псевдотурбулентным движением взвешенных частиц и окружающей жидкости. Принципиальную роль играет при этом влияние случайных пульсаций на формирование в течении системы эффективных напряжений диспергированной фазы. Именно они ответственны в конечном итоге за реальное распределение частиц в течении и обеспечивают существование параметрической области его устойчивости. Фундаментальная роль этих напряжений неоднократно обсуждалась применительно к системам типа псевдоожиженного слоя (см., например, [1—7]). Существенный недостаток большинства таких исследований, не преодоленный вплоть до последнего времени, состоит в чисто феноменологическом характере описания напряжений в диспергированной фазе, не позволяющем выразить их в виде однозначных функций от средних переменных, описывающих течение, и физических параметров фаз. С этим связано и отсутствие конструктивно замкнутых уравнений сохранения для определения указанных переменных.

Свойства пульсаций очень сильно зависят от механизма обмена импульсом и энергией между пульсирующими частицами [8]. В предельном случае очень мелких частиц гидродинамическое торможение и силы давления, возникающие в результате выдавливания тонких жидких прослоек между сближающимися частицами, оказываются достаточными для эффективного предотвращения межчастичных столкновений. В этом случае указанный обмен осуществляется через посредство окружающей жидкости, а устанавливающееся псевдотурбулентное движение существенно анизотропно. Некоторые особенности переноса импульса в таких «бесстолкновительных» системах рассмотрены в [9] на примере разреженной газовзвеси очень мелких частиц при помощи прямого анализа межчастичных взаимодействий. Альтернативный подход, основанный на стохастическом анализе поведения системы частиц в случайных полях скорости и давления жидкости и пригодный в принципе для систем любой концентрации, привел к получению статистических характеристик пульсаций и позволил замкнуть систему уравнений сохранения для среднего движения [10, 11].

Противоположный предельный случай соответствует ситуациям, когда скорость частицы не успевает существенным образом измениться за время, протекающее между ее последовательными столкновениями с другими частицами. В этом случае обмен импульсом и энергией осуществляется за счет столкновений, как это происходит и в молекулярных газах. Доминирующая роль столкновений неизбежно приводит к тому, что устанавливаются изотропные пульсации, подчиняющиеся распределению, близкому к распределению Максвелла. Однако и в таких «столкновительных» системах межфазное взаимодействие оказывается принципиально важным в том смысле, что именно оно обеспечивает подкачку энергии к псевдотурбулентному движению в результате работы несущего потока на случайных флуктуациях концентрации дисперсной системы. Механизм этой подкачки такой же, что и в мелкодисперсных бесстолкновительных суспензиях [11].

Как следует из анализа в [8], столкновительный механизм межчастичного обмена оказывается основным уже в разреженных газовзвесях частиц с малым числом Рейнольдса, если соответствующее число Стокса достаточно велико. Это свидетельствует о том, что указанный механизм должен доминировать в большинстве дисперсных потоков не слишком мелких частиц, за исключением самых разбавленных. В данной работе предлагается новая гидродинамическая модель таких потоков, в определенном смысле дополняющая модель бесстолкновительных течений [10, 11].

1. Физические основания модели. Рассматриваем далее взвесь одинаковых сферических частиц радиуса a и плотности ρ_1 в несжимаемой жидкости с плотностью ρ_0 и вязкостью μ_0. Основное допущение о роли столкновений в обмене импульсом и энергией между частицами сразу же позволяет заключить, что: 1) случайные пульсации частиц приблизительно изотропны независимо от происхождения этих пульсаций и 2) в пренебрежении известным эффектом персистенции скоростей после столкновений [12] частицы можно считать статистически независимыми.

Изотропия пульсаций означает, что все трансляционные степени свободы частиц обладают одной и той же средней кинетической энергией и возможно введение «температуры» пульсаций в виде

$$T = m\langle w_i'^2\rangle = \frac{1}{3}m\langle w'^2\rangle, \quad m = \frac{4}{3}\pi a^3\rho_1 \qquad (1.1)$$

в полном соответствии с определением обычной температуры в энергетических единицах для молекулярных систем. Таким образом, приходим к представлению о псевдогазе частиц с температурой T, на которой действуют как потенциальные внешние силы (например, сила тяжести), так и силы межфазного взаимодействия. С учетом этих сил для псевдогаза может быть записано обычное уравнение Больцмана, а также уравнения для моментов функции распределения частиц по скоростям, эквивалентные уравнениям сохранения массы, импульса и пульсационной энергии псевдогаза [12—14]. Такой подход фактически реализован ранее в ряде работ (см., например, [15]).

В связи с тем что в потоках взвесей крупных частиц значительную роль в генерации псевдотурбулентного движения могут играть случайные подъемные силы Магнуса, действующие на отдельные частицы [3], важен вопрос о степени возбуждения вращательных степеней свободы частиц или, иными словами, о соотношении между средними энергиями вращений и трансляционных пульсаций. В некоторых работах и, в частности, в [3] сделано предположение о равнораспределении энергии по всем степеням свободы, которое определенно не подтверждается на опыте.

На самом деле в процессе ожижения шероховатых ферромагнитных шаров диаметром в несколько миллиметров при помощи переменного магнитного поля обнаружено [16], что случайные линейные и угловые скорости частиц действительно подчиняются распределениям Максвелла, но соответствующим разным температурам. Трансляционная температура не менее чем на порядок ниже вращательной даже в магнитоожиженных слоях самой высокой концентрации, в которых частота столкновений велика. Поскольку в данном случае энергия внешнего поля передается первоначально именно вращениям частиц, эти данные показывают, что столкновений и дипольных взаимодействий между частицами, вполне обеспечивающих равнораспределение энергии по поступательным и вращательным степеням свободы по отдельности, явно недостаточно для возбуждения первых до уровня вторых. Это тем более справедливо для систем более мелких и гладких частиц при меньшей концентрации.

Напротив, при генерации псевдотурбулентных пульсаций энергия относительного потока жидкости подкачивается сначала к поступательным пульсациям, а вращательные степени свободы возбуждаются в результате столкновений. Ситуация, таким образом, в определенном смысле обратна таковой в [16]. Однако общий вывод относительно интенсивности обмена энергией между разными степенями свободы при столкновениях остается, очевидно, в силе. Это дает возможность в первом приближении вообще пренебречь случайными вращениями частиц и соответственно влиянием сил Магнуса — в противоположность гипотезе [3].

На каждую частицу действуют силы, обусловленные ее столкновениями с соседними частицами и взаимодействием с окружающей жидкостью. Сила, вызванная столкновениями, может быть представлена как случайный процесс Пуассона. Она представляет собой сумму векторных составляющих со случайными амплитудами и направлениями, отличных от нуля в течение весьма малых интервалов времени собственно столкновений и возникающих в случайные моменты времени. В некотором приближении эти составляющие можно аппроксимировать как дельта-функции времени со случайными векторными коэффициентами. Соответственно пульсационная скорость $\mathbf{w}'$ любой частицы представляет собой случайную вектор-функцию времени со скачками в моменты столкновений.

Чтобы перейти к анализу непрерывных случайных функций и тем самым значительно упростить задачу, произведем мысленно усреднение по ансамблю возможных состояний всех частиц, окружающих некоторую выделенную, характеризуемую скоростью $\mathbf{w}'$. Ансамблевое среднее значение скорости должно быть, очевидно, непрерывным во времени. Ниже все флуктуации переменных считаются непрерывными функциями, получаемыми в результате указанного усреднения. В этом случае столкновительная сила, действующая на какую-либо частицу, тоже должна рассматриваться как непрерывно изменяющийся случайный вектор, описывающий эффект от столкновений с другими частицами в среднем.

При обычном предположении об относительной малости пульсаций эта сила должна линейно зависеть от $\mathbf{w}'$. Кроме того, ее направление может определяться направлением $\mathbf{w}'$ и двумя векторами: $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{u} \rangle / \langle Ku \rangle$ и $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}/g$, где $\mathbf{u}$ — относительная скорость жидкости, $\mathbf{g}$ — ускорение внешних массовых сил. Именно последние векторы определяют локально выделенные направления в дисперсной системе. Поэтому наиболее общее выражение столкновительной силы может быть представлено так

$$\mathbf{f}_c' = -m\,[A\mathbf{w}' + (B_u(\mathbf{u}_0\mathbf{w}') + B_g(\mathbf{g}_0\mathbf{w}'))\,\mathbf{u}_0 + (C_u(\mathbf{u}_0\mathbf{w}') + C_g(\mathbf{g}_0\mathbf{w}'))\,\mathbf{g}_0\} \qquad (1.2)$$

где введены коэффициенты, не зависящие от характеристик пульсаций. В случае, если $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{g}_0$ коллинеарны (как это имеет место, например, в одномерных вертикальных потоках в поле тяжести), представление (1.2) сильно упрощается и может быть записано в форме

$$\mathbf{f}_c' = -m\,[A\mathbf{w}' + B(\mathbf{u}_0\mathbf{w}')\,\mathbf{u}_0] \qquad (1.3)$$

Обсуждение важной проблемы фактического определения коэффициентов в (1.2) и (1.3) проведено ниже.

Со стороны окружающей жидкости на каждую частицу действует сила, включающая составляющие разной физической природы. Основной вклад в нее вносят составляющие, обусловленные гидродинамическим сопротивлением и плавучестью. Если использовать для первой из них известный полуэмпирический двухчленный закон, то для этой силы в расчете на одну частицу в дисперсной системе без флуктуаций имеем

$$\mathbf{f} = m\,\{[F_1(\varphi) + F_2(\varphi)\,u]\,\mathbf{u} - (\varepsilon\varkappa^{-1} + \varphi)\,\mathbf{g}\} + \boldsymbol{\delta}, \quad \varkappa = \rho_1/\rho_0 \qquad (1.4)$$

где под $\boldsymbol{\delta}$ понимаются остальные составляющие, F_1 и F_2 — некоторые функции локальной объемной концентрации φ частиц и физических параметров, $\varepsilon = 1 - \varphi$ — локальная порозность системы.

В аналогичной системе с флуктуациями сила межфазного взаимодействия тоже флуктуирует. Представляя φ и $\mathbf{u}$ в виде сумм их средних значений и флуктуаций с нулевым средним (отмечаемым штрихом), получаем для среднего значения силы

$$\langle \mathbf{f} \rangle = m \left\{ [\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \langle u \rangle] \langle \mathbf{u} \rangle - (\langle \varepsilon \rangle \varkappa^{-1} + \langle \varphi \rangle) \mathbf{g} \right\} + \langle \delta \rangle \tag{1.5}$$

и для ее флуктуации

$$\mathbf{f}' = m \left\{ F_1 \mathbf{u}' + F_2 [\langle u \rangle \mathbf{u}' + (\mathbf{u}_0 \mathbf{u}') \langle \mathbf{u} \rangle] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{dF_1}{d\langle\varphi\rangle} + \frac{dF_2}{d\langle\varphi\rangle} \langle u \rangle \right) \langle \mathbf{u} \rangle - (1 - \varkappa^{-1}) \mathbf{g} \right] \varphi' \right\} + \delta', \quad \mathbf{u}_0 = \frac{\langle \mathbf{u} \rangle}{\langle u \rangle} \tag{1.6}$$

В (1.5) и (1.6) F_1, F_2 и их производные представляют собой функции средней объемной концентрации $\langle\varphi\rangle$ диспергированной фазы, а флуктуации относятся непосредственно к удельному объему рассматриваемой частицы. Коэффициенты λ_1 и λ_2 подчеркивают отличие средней силы межфазного взаимодействия в реальной дисперсной системе с флуктуирующими динамическими переменными от такой же силы в дисперсии без флуктуаций при прочих равных условиях. Эти коэффициенты довольно слабо отличаются от единицы и могут быть определены так же, как и в [11].

2. Уравнения движения диспергированной фазы. Псевдогаз частиц можно, очевидно, рассматривать в точности так же, как и реальный газ. В частности, можно применить к решению соответствующего уравнения Больцмана классический метод Энскога [12—14]. Единственное отличие заключается в том, что требуется последующее усреднение по пульсациям, обозначаемое угловыми скобками. Опуская подробности вычисления, приходим к уравнениям сохранения массы частиц

$$\partial\varphi/\partial t + \nabla \langle \varphi \mathbf{w} \rangle = 0 \tag{2.1}$$

их среднего импульса

$$\varphi\rho_1 (\partial/\partial t + \mathbf{w}\nabla) \mathbf{w} = \nabla \mathbf{P}_1 + n \langle \mathbf{f} \rangle + \varphi\rho_1 \mathbf{g} \tag{2.2}$$

и средней энергии их пульсационного движения (температуры псевдогаза)

$$(\partial/\partial t + \mathbf{w}\nabla) T = (2/3n) [\mathbf{P}_1 : (\nabla * \mathbf{w}) - \nabla \mathbf{Q} + n \langle \mathbf{f}'\mathbf{w}' \rangle + n \langle \mathbf{f}_c'\mathbf{w}' \rangle) \tag{2.3}$$

Здесь звездочка означает диадное перемножение векторов, а двоеточие — двойную свертку тензоров второго ранга. Для упрощения записи угловые скобки в обозначениях $\langle\varphi\rangle$ и $\langle\mathbf{w}\rangle$, а также других динамических переменных здесь и ниже опускаем. Смысл разных членов в (2.1)—(2.3) таков же, как и в аналогичных уравнениях для молекулярного газа. Тензор $\mathbf{P}_1$ и вектор $\mathbf{Q}$ представляют собой напряжения и поток пульсационной энергии в диспергированной фазе, обусловленные самими пульсациями, n — средняя числовая концентрация частиц, а $n\langle \mathbf{f}'\mathbf{w}' \rangle$ и $n\langle \mathbf{f}_c'\mathbf{w}' \rangle$ описывают работу силы межфазного взаимодействия и столкновительных сил в единице объема дисперсной системы за единицу времени.

Используя классические результаты, сразу же можно записать

$$\mathbf{P}_1 = -p_1 \mathbf{I} + 2\mu_1 [\mathbf{E}_w - (\mathrm{tr}\, \mathbf{E}_w/3) \mathbf{I}], \quad \mathbf{Q} = -\eta_1 \nabla T \tag{2.4}$$

где p_1 играет роль изотропного давления псевдогаза, $\mathbf{E}_w$ — тензор скоростей деформаций, построенный по среднему полю скорости $\mathbf{w}$ диспергированной фазы, $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Для частоты ν столкновений, коэффициентов динамической вязкости μ_1 псевдогаза и переноса пульсационной энергии η_l в нем (аналог коэффициента теплопроводности в молекулярном газе), а также для коэффициента D самодиффузии частиц в концентрированной дисперсной системе имеем [12—14]

$$\nu = (4\varphi)^{-1} Y\nu^\circ, \quad Y = G(\varphi) - 1 = 4\varphi\chi(\varphi)$$

$$\mu_l = 4\varphi (Y^{-1} + 0{,}8 + 0{,}76\, Y)\mu_l^\circ, \quad \eta_l = 4\varphi (Y^{-1} + 1{,}2 + 0{,}75\, Y)\eta_l^\circ$$

$$D = 4\varphi Y^{-1} D^\circ = \chi^{-1}(\varphi) D^\circ \tag{2.5}$$

где $G(\varphi)$ — поправочная функция, фигурирующая в уравнении состояния

$$p_l = G(\varphi) nT \tag{2.6}$$

псевдогаза, а $\chi(\varphi)$ — фактор Энскога [12—14], описывающий увеличение частоты столкновений в концентрированном газе по сравнению с разбавленным.

Для величин, относящихся к разреженному газу, имеем [12—14]

$$\nu^\circ = 16\, n^2 a^2 \left(\frac{\pi T}{m}\right)^{1/2}, \quad \mu_l^\circ = \frac{5}{64\, a^2}\left(\frac{mT}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$\eta_l^\circ = \frac{75}{256\, a^2}\left(\frac{T}{\pi m}\right)^{1/2}, \quad D^\circ = \frac{3}{32\, na^2}\left(\frac{T}{\pi m}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Строго говоря, соотношения (2.5) получены в рамках теории плотных газов Энскога [13, 14], соответствующей сглаживанию свободного объема частиц, когда

$$G(\varphi) = \frac{1}{1 - (\varphi/\varphi_*)^{1/3}}, \quad \chi(\varphi) = \frac{(\varphi/\varphi_*)^{1/3}}{4\varphi\,[1 - (\varphi/\varphi_*)^{1/3}]}, \quad \varphi_* \approx 0{,}6 \tag{2.8}$$

Эта теория пригодна лишь для газов или дисперсных систем высокой концентрации ($\varphi \approx 0{,}4$—$0{,}6$). Однако зависимости (2.5) можно применять без большой ошибки и для систем меньшей концентрации, если использовать иные представления для $G(\varphi)$ и $\chi(\varphi)$. В частности, приближенной модели Карнахэна — Старлинга, примененной в [11], отвечают

$$G(\varphi) = \frac{1 + \varphi + \varphi^2 - \varphi^3}{(1-\varphi)^3}, \quad \chi(\varphi) = \frac{1 - \varphi/2}{(1-\varphi)^3} \tag{2.9}$$

При выражении этих функций для систем малой концентрации можно использовать также обычную технику вириальных разложений.

Для окончательного замыкания уравнений (2.1)—(2.3) нужны также представления средних по пульсациям. Прежде всего

$$\langle\varphi \mathbf{w}\rangle = \varphi \mathbf{w} + \langle\varphi' \mathbf{w}'\rangle \approx \varphi \mathbf{w} \tag{2.10}$$

Далее, $n\langle \mathbf{f}_c' \mathbf{w}'\rangle$ описывает мощность, диссипируемую в единичном объеме дисперсной системы в результате столкновений. Имеются разные механизмы такой диссипации. Они обусловлены неупругостью столкновений за счет внутренней вязкости материала частиц, поверхностного трения, а также за счет вязкой диссипации в окружающей жидкости при скачкообразных изменениях скоростей при столкновениях. Если ввести эмпирический коэффициент k_c, описывающий среднюю долю кинетической энергии сталкивающихся частиц, поглощаемую при одном столкновении, то с учетом (2.5) и (2.7) можно записать

$$-n\langle \mathbf{f}_c' \mathbf{w}'\rangle = q_c = k_c \nu T = \alpha_c T^{3/2}, \quad \alpha_c = 16\, k_c \left(\frac{a\rho_l}{m}\right)^2 \left(\frac{\pi}{m}\right)^{1/2} \varphi^2 \chi \tag{2.11}$$

Величина $n\langle \mathbf{f}' \mathbf{w}'\rangle$ описывает и подкачку энергии к псевдотурбулентному движению от среднего относительного потока, и диссипацию энергии пульсаций в единице объема за единицу времени. Обозначая указанные величины через

q_+ и q_- соответственно, имеем $n\langle \mathbf{f}'\mathbf{w}'\rangle = q_+ - q_-$. Диссипация обусловлена, очевидно, гидродинамическим сопротивлением пульсационному движению частиц. Подставляя в (1.6) $\mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{w}'$ и выделяя члены, содержащие w', получаем с учетом (1.1)

$$q_- = \alpha_- T, \quad \alpha_- = \frac{\varphi}{m}(3F_1 + 4F_2 u) \tag{2.12}$$

Аналогичным образом можно выразить и величину q_+ через средние вида $\langle \varphi'\mathbf{w}'\rangle$, $\langle \mathbf{v}'\mathbf{w}'\rangle$ и $\langle \delta'\mathbf{w}'\rangle$. Отсюда видно, что представление этой величины в виде функции от средних переменных, характеризующих макроскопическое движение дисперсной системы, требует построения соответствующей теории псевдотурбулентного движения. То же можно сказать и о малом члене $\langle \varphi'\mathbf{w}'\rangle$ в (2.10). Хотя в принципе такая теория может быть построена при помощи тех же методов, что и использованные в [11], представляет интерес упрощение проблемы за счет сведения ее к определению единственной величины, характеризующей интенсивность пульсаций частиц.

Для этой цели рассмотрим однородное состояние дисперсной системы, в котором ее усредненные характеристики не зависят от координат. Это состояние представляет собой единственный аналог равновесных состояний молекулярных систем. Отмечая величины, относящиеся к такому состоянию, звездочкой сверху, из (2.3) получаем

$$q_+^* = q_-^* + q_c^* = \alpha_- T^* + \alpha_c T^{*3/2} \tag{2.13}$$

Рассмотрим теперь состояние, в котором характеристики пульсаций в начальный момент отличаются от таковых для локально-однородного состояния. Очевидно, должны протекать процессы релаксации этих характеристик к значениям, относящимся к однородному состоянию. При этом характерные времена релаксации пульсаций $\mathbf{v}'$ и φ' скорости жидкости и концентрации в пределах удельного объема отдельной частицы определяются процессами распространения возмущений давления в жидкости и диффузионного перемещения частиц на расстояние порядка их размера. Если частицы не слишком мелкие, то эти времена должны быть намного меньше времени гидродинамической релаксации самой частицы. В результате приходим к представлению о неравновесной системе, в которой пульсации скорости жидкости и концентрации практически не отличаются от таковых в локально-однородной (равновесной) системе, а пульсации скорости частиц релаксируют к характерным для последней системы. Из формального представления для q_+, следующего из (1.6), вытекает, что q_+ линейно зависит от $\mathbf{w}'$. Поэтому и с учетом (2.11)—(2.13) получаем

$$q_+ = \alpha_+ \sqrt{T}, \quad \alpha_+ = \alpha_- \sqrt{T^*} + \alpha_c T^* \tag{2.14}$$

что окончательно замыкает уравнение (2.3), если рассматривать температуру фиктивного однородного состояния дисперсной системы, характеризуемого локальными средними значениями динамических переменных, известной функцией этих переменных. Таким образом, в рамках предложенной схемы оказывается достаточным определить лишь T в пренебрежении градиентами средних динамических переменных.

На основании приведенных выше соотношений для источникового члена в уравнении (2.3) сохранения пульсационной энергии частиц имеем

$$n\langle \mathbf{f}'\mathbf{w}'\rangle + n\langle \mathbf{f}_c'\mathbf{w}'\rangle = q_+ - q_- - q_c = \alpha_- \sqrt{T}\,(\sqrt{T^*} - \sqrt{T}) + \alpha_c \sqrt{T}\,(T^* - T) \tag{2.15}$$

причем коэффициенты α_- и α_c определены в (2.12) и (2.14) соответственно.

Указанный упрощенный способ замыкания уравнения (2.3) ранее предложен на основании несколько иных соображений в [17].

3. Уравнения движения непрерывной фазы. Уравнения сохранения массы и импульса непрерывной фазы можно записать в традиционной форме [1—7]. При этом целесообразно сразу же учесть то, что линейный масштаб неусредненной скорости жидкости совпадает с размером частиц и намного меньше масштаба изменения соответствующей средней скорости. Это дает возможность пренебречь дивергенцией вязких напряжений в потоке, определяемых по среднему тензору скоростей деформаций жидкости, по сравнению с силой межфазного взаимодействия [3]. В результате получаем следующие уравнения для непрерывной фазы:

$$\partial\Phi/\partial t - \nabla\langle\varepsilon\mathbf{v}\rangle = 0, \quad \langle\varepsilon\mathbf{v}\rangle = \varepsilon\mathbf{v} - \langle\varphi'\mathbf{v}'\rangle \approx \varepsilon\mathbf{v} \tag{3.1}$$

$$\varepsilon\rho_0(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \nabla\mathbf{P}_0 - n\langle\mathbf{f}\rangle + \varepsilon\rho_0\mathbf{g} \tag{3.2}$$

где тензор напряжений $\mathbf{P}_0$ включает изотропные напряжения, обусловленные молекулярным давлением p жидкости, и напряжения, целиком аналогичные напряжениям Рейнольдса в турбулентном потоке, т. е.

$$\mathbf{P}_0 = -p_0\mathbf{I} - \varepsilon\rho_0(\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle - (\mathrm{tr}\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle/3)\,\mathbf{I}) \tag{3.3}$$

В первом приближении допустимо, по-видимому, пренебречь вторым членом в правой части (3.3) по сравнению с первым ввиду того, что скорость теплового движения молекул жидкости значительно превышает характерную скорость ее пульсаций, приняв также $p_0 \approx p$.

Уточнение такой модели требует, очевидно, вычисления $\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle$, а также потока $\langle\varphi'\mathbf{v}'\rangle$, входящего в (3.1), на основе развернутой теории псевдотурбулентного движения.

Анализ псевдотурбулентности, который можно провести при помощи тех же методов, что и в [11], представляет собой совершенно независимую задачу. Тем не менее, имея в виду дальнейшее развитие теории, приведем здесь основные уравнения для пульсаций, позволяющие реально осуществить такой анализ. В пренебрежении градиентами средних характеристик макроскопического движения дисперсной системы из законов сохранения массы и импульса жидкости получаем уравнения, практически совпадающие с предложенными в [11]

$$(\partial/\partial t + \mathbf{u}\nabla)\varphi' - \varepsilon\nabla\mathbf{v}' = 0$$

$$\varepsilon\rho_0(\partial/\partial t + \mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}' = -\nabla p' - n\mathbf{f}' \tag{3.4}$$

Дополнительное уравнение может быть выведено из уравнения Ланжевена для одной частицы. Оно имеет вид

$$\varphi\rho_1\partial\mathbf{w}'/\partial t = n\mathbf{f}' + n\mathbf{f}_c' \tag{3.5}$$

Входящие в (3.4) и (3.5) флуктуация $\mathbf{f}'$ силы межфазного взаимодействия и столкновительная сила выражаются в соответствии с (1.6) и (1.2) или (1.3). Использованы координаты, связанные с частицами ($\mathbf{w} = 0$).

Хотя исследование псевдотурбулентности выходит за рамки этой работы, вкратце укажем его основные этапы. Прежде всего при помощи представлений всех неизвестных случайных функций в форме стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса из (3.4) и (3.5) нужно получить систему линейных алгебраических уравнений для случайных мер этих функций, появляющихся в указанных интегралах. Решение этих уравнений позволяет далее выразить все спектральные плотности, необходимые для вычисления разных корреляционных функций, как величины, пропорциональные спектральной плотности случайных флуктуаций концентрации. Используя для последней плотности выражение, следующее из независимых соображений (см. [11], где получено такое выражение, соответствующее модели Карнахэна — Старлинга плотного газа одинаковых жестких сфер), следует получить путем интегрирования по частотам и волновому пространству пульсаций представления для корреляторов и, в частности, для T^* в виде функций от средних характеристик среднего движения дисперсной системы и физических параметров.

Новым по сравнению с исследованием в [11], а также в [17] элементом является то, что получаемые таким путем корреляторы зависят дополнительно от коэффициентов, появляющихся в определении столкновительной силы при помощи (1.2) или (1.3). Эти коэффициенты могут быть найдены из условий, что пульсации частиц изотропны (т. е. из требования $\langle w_1'^2\rangle = \langle w_2'^2\rangle = \langle w_3'^2\rangle$) и что мощность, диссипируемая в единице объема в результате столкновений, равна независимо определяемой величине q_c (т. е. из равенства $-n\langle \mathbf{f}_c'\mathbf{w}'\rangle = \alpha_c T^{3/2}$ с α_c из (2.11)). Дополнительно нужно потребовать, учитывая свойства распределения Максвелла, выполнения равенств $\langle w_i'w_j'\rangle = 0$ при $i \neq j$. В частном случае вертикальных потоков последние равенства в силу симметрии удовлетворяются тождественно и имеем два уравнения $\langle w_1'^2\rangle = \langle w_2'^2\rangle$ и $-n\langle \mathbf{f}_c'\mathbf{w}'\rangle = \alpha_c T^{3/2}$ для нахождения двух коэффициентов A и B в (1.3) (первая координатная ось считается направленной вдоль вектора $\mathbf{u}_0$).

Таким образом, в общем случае имеем набор трех скалярных уравнений (2.1), (2.3) и (3.1) и двух векторных уравнений (2.2) и (3.2) для определения средних скоростей фаз $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, средних концентраций φ и давления p в жидкости и температуры пульсаций T. В записанной форме эти уравнения соответствуют приближению Навье — Стокса для диспергированной фазы и приближению Эйлера для непрерывной фазы.

В заключение укажем на возможные дальнейшие упрощения этой системы уравнений движения. Прежде всего можно использовать приближение Эйлера и применительно к течению диспергированной фазы. Для этого нужно просто пренебречь квазивязкими напряжениями в (2.4) и потоком пульсационной энергии $\mathbf{Q}$. Тогда в (2.2) имеем $\nabla \mathbf{P}_1 = -\nabla p_1$, а в (2.3) член $\mathbf{P}_1 : (\nabla * \mathbf{w}) = -p_1 \nabla \mathbf{w}$ описывает работу, которую необходимо совершить для преодоления давления псевдогаза при его расширении.

Если возможно пренебречь конвективной производной в левой части (2.3) и указанной работой против сил давления псевдогаза по сравнению с источниковыми членами (2.15), приходим к мысли, в которой $T = T^*$. Эта модель соответствует предположению о равенстве температуры пульсаций в неоднородных состояниях известной температуре соответствующих локально-однородных состояний. В этом случае температура исчезает из числа неизвестных переменных, а уравнение (2.3) вырождается.

Наконец, как следует из (2.6) и (2.8), в высококонцентрированных системах крайне незначительные изменения φ приводят к существенным изменениям давления p_1 псевдогаза. Поэтому в случаях, когда концентрация системы близка к концентрации φ_* состояния плотной упаковки частиц, имеет право на существование модель несжимаемой диспергированной фазы. В этом случае уравнения сохранения массы (2.1) и (3.1) требуют просто равенства нулю дивергенций средних скоростей фаз. Вместе с уравнениями сохранения импульсов (2.2) и (3.2) они определяют эти скорости и давления фаз p_0 и p_1, рассматриваемые как независимые переменные.

Фактически упрощенные модели такого типа в той или иной форме использовались в ряде исследований конкретных задач гидродинамики дисперсных систем. Приведенное обсуждение можно рассматривать как некое обоснование таких моделей.

Первоочередной задачей дальнейших исследований следует, очевидно, считать определение температуры T^* локально-однородных состояний как функции независимых переменных системы уравнений сохранения и физических параметров фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson T. B., Jackson R.* A fluid mechanical description of fluidized beds. Stability of the State of uniform fluidization//Industr. Engng. Chem. Fundament. 1968. V. 7. № 1. P. 12—21.
2. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. Pt 3. Pseudo-turbulent structure of homogeneous suspensions//J. Fluid Mech. 1972. V. 56. № 2. P. 313—336.
3. *Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем//ПМТФ. 1973. № 4. С. 67—77.
4. *Homsy G. M., El-Kaissy M. M., Didwania A.* Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds//Int. J. Multiphase Flow. 1980. V. 6. № 4. P. 305—318.
5. *Homsy G. M.* A survey of some results in the mathematical theory of fluidization//Theory of Dispersed Multiphase Flow. N. Y.: Acad. Press, 1983. P. 57—71.
6. *Jackson R.* Hydrodynamic stability of fluid-particle systems//Fluidization. N. Y.: Acad. Press, 1985.
7. *Batchelor G. K.* A new theory of instability of a uniform fluidized bed//J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 75—110.
8. *Koch D. L.* Kinetic theory for a monodisperse gas-solid suspension//Phys. Fluids. 1990. V. A2. № 10. P. 1711—1723.
9. *Koch D. L.* Anomalous diffusion of momentum in a dilute gas-solid suspension//Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1337—1346.
10. *Buyevich Yu. A.* Hydrodynamics of dispersions including diffusional effects//Arch. Mech. 1990. V. 42. № 4—5. P. 429—442.
11. *Буевич Ю. А.* Внутренние пульсации в потоках мелкодисперсных суспензий//Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 91—100.
12. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
13. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
14. *Резибуа П., Де Ленер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980. 423 с.
15. *Мясников В. П.* О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем//ПМТФ. 1967. № 2. С. 58—67.
16. *Буевич Ю. А., Бологa М. К., Сюткин С. В., Тетюхин В. В.* О движении частиц при магнитоожижении в переменном поле//Магнит. гидродинамика. 1985. № 3. С. 3—12.
17. *Буевич Ю. А., Рубцов А. Г.* К теории грубодисперсного псевдоожиженного слоя//Инж.-физ. журн. 1992. Т. 63. № 4. С. 414—424.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
23.XII.1992