

УДК 532.529

© 1994 г. В. Л. ЗЕЛЕНКО

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПУЗЫРЬКОВОГО СЛОЯ С МЕЖФАЗНЫМ МАССООБМЕНОМ

Показана монотонная неустойчивость горизонтального слоя вязкой жидкости с пузырями растворимого газа. Вычислены критические значения модифицированного числа Архимеда и рассмотрены соответствующие им критические движения жидкости.

Неустойчивость пузырькового слоя, связанная с наличием вертикального градиента скорости всплытия пузырей, рассмотрена в [1]. Множественность стационарных конечно-амплитудных режимов при равномерном подводе газа исследована в [2, 3]. Влияние растворимости газа на устойчивость пузырькового слоя в случае, когда уравнением движения жидкости является линейный закон фильтрации Дарси, рассмотрено в [4].

Пусть в нижнее сечение горизонтального слоя вязкой жидкости высоты H равномерно подается растворимый в жидкости газ. Начало прямоугольной системы координат XYZ (фиг. 1) расположено в нижнем сечении слоя, ось Z направлена по вертикали вверх, e_1, e_2, e_3 — орты осей X, Y, Z .

Поскольку далее рассматриваются лишь медленные циркуляционные течения жидкости, то для определения средней массовой концентрации ρ_{2l} растворенного в жидкости газа можно пренебречь концентрационной неравновесностью на масштабе пузыря и использовать равновесный закон Генри [5, 6].

$$\rho_{2l} = G (\Pi / \Pi_0) \rho_2^{\circ} \quad (1)$$

где G — коэффициент растворимости, Π_0, Π — давление в верхнем сечении и внутри слоя, ρ_2° — плотность газа при температуре среды и давлении Π_0 .

Запишем уравнение неразрывности жидкости, пренебрегая массой выделившегося в пузыри компонента [2—4]

$$\operatorname{div} ((1 - q) v_1) = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2)$$

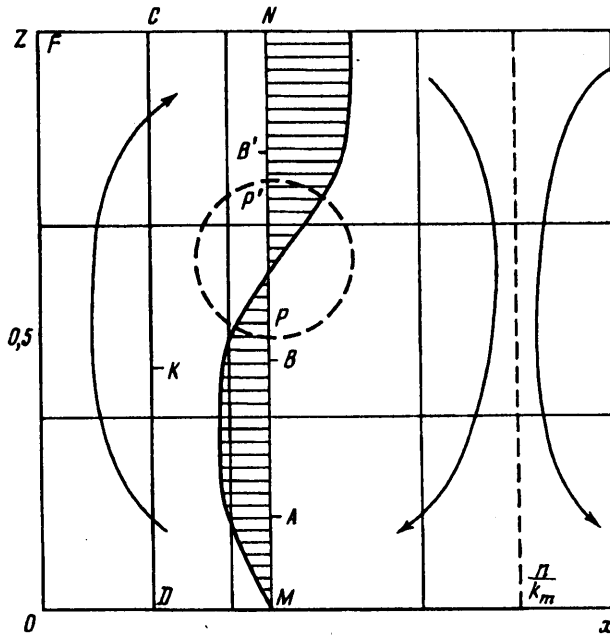
где q — газосодержание, v_1 — скорость жидкой фазы, t — время.

Пусть ρ_1° — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести. При этом в случае $\alpha = \rho_1^{\circ} g H / \Pi_0 \ll 1$ можно пренебречь сжимаемостью газа и записать уравнение неразрывности газовой фазы в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} (q v_2) = J \quad (3)$$

где v_2 — скорость газовой фазы, J — источник газосодержания, описывающий межфазный массообмен.

Предполагая отсутствие процессов зарождения, коалесценции и дробления пузырей, запишем уравнение сохранения числа пузырей



Фиг. 1

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(nv_2) = 0, \quad q = Un \quad (4)$$

где n — численная плотность пузырей, второе соотношение в случае монодисперсной смеси выражает связь газосодержания с объемом пузыря U .

Уравнение сохранения массы растворенного в жидкости газа имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 (1 - q)) + \text{div} (\rho_2 (1 - q)v_1) = -\rho_2 \sigma J \quad (5)$$

Уравнение движения жидкой фазы в случае медленных движений можно представить в форме

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1} \nabla \Pi + \nu \Delta v_1 - g(1 - q) e_3 \quad (6)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости газожидкостной смеси.

Предполагая выполненным условие прилипания в нижнем сечении, а верхнюю границу считая свободной, получим граничные условия

$$z = 0, \quad v_1 = 0, \quad n = n_0, \quad z = H, \quad \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} = 0$$

В силу постановки задачи скорость выделения газа в пузыри мала, что позволяет при рассмотрении уравнения движения газовой фазы пренебречь членом, связанным со скоростью роста радиуса пузыря, и считать скорость всплытия одиночного пузыря W как известную функцию его объема U . Предполагая далее малость критерия Фруда $F = w/\sqrt{gH} \ll 1$, можно записать [2]

$$v_2 = v_1 + W(U) e_3 \quad (7)$$

Рассмотрим устойчивость состояния с однородным распределением пузырей и неподвижной жидкостью, описываемое стационарным решением

$$U^{(0)} = U_0, \quad v_1^{(0)} = 0, \quad v_2^{(0)} = W(U_0) e_3, \quad n^{(0)} = n_0, \quad q^{(0)} = n_0 U_0$$

где величины, снабженные нижним нулевым индексом, равны соответствующим значениям на входе в слой.

С помощью соотношений

$$q' = n_0 U' + U_0 n', \quad \rho_{21}' = \rho_2 \frac{G \Pi'}{\Pi_0}, \quad v_2' = v_1' + \left(\frac{dW}{dU} \right)^{(0)} U' e_3$$

связывающих малые возмущения, отмеченные штрихом, получим линейную систему уравнений

$$\operatorname{div} v_1' = \frac{1}{1 - q_0} \frac{\partial q'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + q_0 \operatorname{div} v_1' + q_0 \left(\frac{dW}{dU} \right)^{(0)} \frac{\partial U'}{\partial z} + W_0 \frac{\partial q'}{\partial z} = J'$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} v_1' + n_0 \left(\frac{dW}{dU} \right)^{(0)} \frac{\partial U'}{\partial z} + W_0 \frac{\partial n'}{\partial z} = 0$$

$$(1 - q_0) G \left(\frac{1}{\Pi_0} \frac{\partial \Pi'}{\partial t} - \frac{\alpha (1 - q_0)}{H} v_{1z}' \right) = -J'$$

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_1} \nabla \Pi' + \nu \Delta v_1' + g q' e_3$$

Введем новые масштабы: длины H , времени H/W_0 , скорости W_0 , газосодержания q_0 , численной плотности пузырей n_0 , и, представив искомые величины пропорциональными $\exp(-\lambda t)$, получим, используя для удобства записи прежние обозначения, задачу

$$\operatorname{div} v_1 = - \frac{\lambda q_0 q}{1 - q_0} \quad (8)$$

$$\beta \frac{\partial q}{\partial z} + (1 - \beta) \frac{\partial n}{\partial z} = \lambda \left(n + \frac{q_0}{1 - q_0} \right) \quad (9)$$

$$q_0 (\beta + 1) \frac{\partial q}{\partial z} - q_0 \beta \frac{\partial n}{\partial z} - \alpha G (1 - q_0)^2 v_{1z} = \lambda \left(\frac{q_0 q}{1 - q_0} + \alpha G (1 - q_0) \Pi \right) \quad (10)$$

$$\Delta v_1 + q_0 L q e_3 - L \nabla \Pi = -\lambda \operatorname{Re} v_1 \quad (11)$$

$$z = 0: \quad q = 0, \quad n = 0, \quad v_1 = 0 \quad (12)$$

$$z = 1: \quad \Pi = 0, \quad v_{1z} = 0, \quad \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} = 0$$

$$\beta = \frac{d(\ln W)}{d(\ln U)} \Big|_{U=U_0}, \quad L = \frac{g H^2}{\nu W_0}, \quad \operatorname{Re} = \frac{W_0 H}{\nu}$$

Спектр собственных значений декремента λ определяется пятью параметрами: q_0 , β , αG , L , Re .

Задача на собственные значения (8)–(12) не является самосопряженной, вследствие чего возможны колебательные возмущения. Однако в аналогичном, но более простом для анализа случае, когда движение жидкости подчиняется закону Дарси [4], можно показать, что колебательные возмущения являются затухающими. Вследствие этого ограничимся анализом монотонных возмущений.

Рассмотрим плоские стационарные течения. Полагая $\lambda = 0$, получим из (9), (10) соотношение

$$v_{1z} = \frac{q_0}{(1 - \beta)(1 - q_0)^2 \alpha G} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (13)$$

Выражая скорость жидкости через функцию тока ψ и вводя величину φ , будем иметь

$$v_{1z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_{1x} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \varphi = \frac{q_0 q}{(1 - \beta)(1 - q_0)^2 \alpha G}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Рассматривая последнее соотношение как условие потенциальности вектора $\mathbf{V} = \varphi_1 + \varphi_2$, представим \mathbf{V} в виде $\mathbf{V} = \nabla \Phi$.

Используя потенциальность \mathbf{V} , можно получить соотношение, связывающее средние характеристики циркуляционного течения и газосодержания в слое. Пусть OF (фиг. 1) является линией тока, что возможно как в случае твердой стенки, так и в случае плоскости симметрии. Проведем вертикальный отрезок DC и примем, что на линии тока $DOFC$ $\psi = 0$. Возьмем произвольную точку K на отрезке DC и рассмотрим поток жидкости j через отрезок DK . Очевидно, что $j = -\psi(z)$, где z — текущая координата K . Составим средние значения $-\psi$ и φ по отрезкам DC ($|DC| = 1$) и FC ($|FC| = l$)

$$\langle j \rangle = -\int_0^1 \psi dz, \quad \langle \varphi \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi dx$$

Из равенства нулю циркуляции \mathbf{V} по замкнутому контуру $DOFC$ следует

$$\langle j \rangle = -l \langle \varphi \rangle \quad (14)$$

Поскольку при выводе (14) уравнение движения жидкости не использовалось, то полученное соотношение имеет место независимо от реологических свойств жидкости. Существенно лишь предположение о малом влиянии стационарной циркуляции на скорость поднимающихся пузырей.

Для нахождения нейтральной кривой устойчивости при $\lambda = 0$ применим к (11) gotrot и с помощью (8), (13) получим содержащие лишь q уравнение и граничные условия. Представляя газосодержание в виде $q = Q(z) \exp(ik_1 x + ik_2 y)$, получим задачу на собственные значения

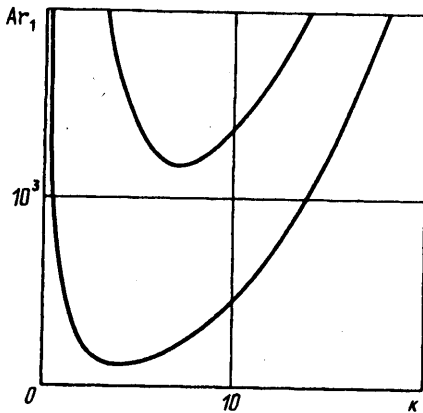
$$Q^{(5)} - 2k^2 Q^{(3)} + k^4 Q^{(1)} - \text{Ar}_1 k^2 Q = 0$$

$$z = 0, \quad Q = 0, \quad Q^{(1)} = 0, \quad Q^{(2)} = 0; \quad z = 1, \quad Q^{(1)} = 0, \quad Q^{(3)} = 0 \quad (15)$$

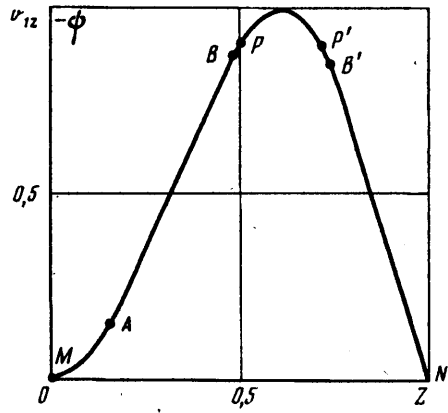
$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \text{Ar}_1 = (1 - \beta)(1 - q_0)^2 \frac{\alpha G g H^2}{\nu W_0}, \quad Q^{(0)} = \frac{d^4 Q}{dz^4}$$

Здесь Ar_1 — модифицированный критерий Архимеда. При фиксированном k собственными значениями задачи является последовательность критических значений Ar_{1m} , при которых существуют нетривиальные решения задачи (15), являющиеся собственными функциями. Приравнявая к нулю характеристический определитель, являющийся в силу вещественности коэффициентов уравнения (15) также вещественным, получим неявную зависимость $\text{Ar}_1(k)$.

В результате численного расчета получено, что $\text{Ar}_1(k)$ распадается на последовательность кривых с минимумом. На фиг. 2 показаны нейтральные кривые, соответствующие двум первым уровням неустойчивости. Ниже даны минимальные критические значения Ar_{1m}^* и соответствующие им волновые числа k_m для первых



Фиг. 2



Фиг. 3

трех уровней неустойчивости:

| m | 1 | 2 | 3 |
|-------------|-------|-------|-------|
| k_m | 3,867 | 7,133 | 10,40 |
| Ar_{1m}^* | 157,2 | 1194 | 3967 |

Из приведенных результатов расчета следует, что с ростом номера уровня неустойчивости m минимальное значение Ar_1^* смещается в область коротковолновых возмущений.

Рассматривая Ar_1 вблизи нейтральной кривой Ar_{1m} , нетрудно показать, что $\text{sign } \lambda = -\text{sign} (Ar_1 - Ar_{1m})$, т. е. при $Ar_1 > Ar_{1m}$ имеет место монотонная неустойчивость относительно возмущений, соответствующих m -му уровню неустойчивости. В частности, при $Ar_1 > 157,2$ слой теряет устойчивость относительно критических движений с волновым числом $k = 3,867$.

Рассмотрим поле скорости этого течения. Возьмем собственную функцию $Q(z)$ и с помощью (13) составим выражение для отнесенной к своему максимальному значению скорости v_z на отрезке OF (фиг. 1)

$$v_z = 0,0063e^{y_1} - 0,285e^{y_2} \cos u_1 + 0,249e^{y_2} \sin u_1 + 0,396e^{y_3} \cos u_2 + 7,34e^{y_3} \sin u_2$$

$$y_1 = 5,41z, \quad y_2 = 1,92z, \quad y_3 = -4,88z$$

$$u_1 = 1,04 + 3,51z, \quad u_2 = 2,74 + 2,09z$$

График v_z (фиг. 3) несимметричен относительно среднего сечения слоя, максимум скорости смещен к верхней границе. Поскольку зависимость q от x определяется множителем $\cos(kx)$, то очевидно, что график v_z одновременно представляет зависимость $-\psi(z)$, также отнесенную к своему максимальному значению, в сечении MN . Этот график содержит два прямолинейных участка AB и NB' , которым соответствуют на фиг. 1 части сечения MN с постоянной скоростью u_x . Параболическому участку PP' на фиг. 3 соответствует часть сечения MN с линейной зависимостью $v_{zx}(z)$. Наконец, участок MA на фиг. 3 описывает тормозящее действие дна на циркуляцию.

Таким образом, при приближенной схематизации течения можно выделить: смещенное относительно середины слоя к свободной поверхности твердотельно вращающееся ядро, диаметр которого составляет четверть высоты слоя, пограничный слой толщины 0,15 у дна слоя, области вблизи критических точек O , F (фиг. 1), в которых скорость мала, а также основную массу жидкости с мало меняющейся поперек линий тока скоростью. При этом скорость циркуляции над ядром на 40% превосходит скорость возвратного течения под ядром.

В докритической области газосодержание q_0 оказывает стабилизирующее влияние как благодаря уменьшению плотности среды, так и в связи с увеличением вязкости газожидкостной смеси в сравнении с вязкостью чистой жидкости. Однако в закритической области с ростом q_0 будет увеличиваться интенсивность циркуляции.

Дестабилизирующим фактором наряду с обычно входящими в Ag величинами [2, 3] является величина αG , которую можно интерпретировать как отношение перепада поперек слоя массовой концентрации растворенного в жидкости газа к плотности газа.

Необходимо учитывать также параметр β , совпадающий в случае степенной зависимости скорости всплытия пузыря от его объема с показателем этой степени. В зависимости от формы пузырей β может быть как положительным, так и отрицательным [7], однако $\beta \leq 2/3$, причем равенство достигается, когда пузыри поднимаются в соответствии с законами Рыбчинского — Адамара или Стокса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Об устойчивости слоя жидкости при барботаже//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 4. С. 47—53.
2. Зеленко В. Л., Мясников В. П. К теории циркуляционных движений в барботажном слое//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 108—115.
3. Зеленко В. Л., Мясников В. П. Стационарные режимы при барботаже газа в колонне с вертикальными вставками//Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 3. С. 59—68.
4. Зеленко В. Л. Влияние растворимости газа на устойчивость слоя жидкости с пузырями и неподвижной насадкой//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 68—74.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. С. 299.
6. Стромберг А. Г., Семченко Д. П. Физическая химия. М.: Высш. шк., 1973. С. 215.
7. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.//Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. 296 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.П.1993