

УДК 532.527

© 1994 г. А. В. КУЗНЕЦОВ, С. А. КУЗНЕЦОВ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПОТОКОВ ЖИДКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПЛАСТИНОЙ

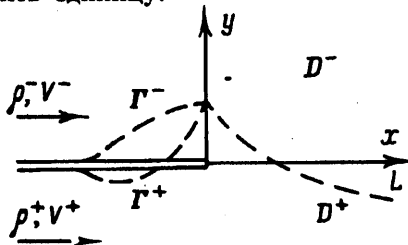
В линейном приближении решена следующая задача. Плоская пластина расположена на границе двух поступательных потоков невязких жидкостей с разными плотностями и скоростями стационарного течения. На эти течения накладываются малые нестационарные возмущения, вызванные деформациями пластины. Решения получены для произвольных деформаций, а также для случая угловых гармонических колебаний (машущий движитель). Определены нестационарные силы, действующие на пластину, динамические характеристики движителя, положение границы раздела потоков.

1. Пластина расположена по линии Γ_0 : $y = 0$, $x \leq 0$ (фиг. 1) на границе двух потоков невязких жидкостей с плотностями ρ^\pm и скоростями V^\pm соответственно в нижней и верхней полуплоскостях D^\pm . На это течение накладываются малые нестационарные возмущения, вызванные деформациями пластины. Влиянием весомости и поверхностным натяжением пренебрегается.

Рассмотренная схема моделирует течения в элементах различных технических устройств, в которых имеет место взаимодействие потоков с различными полными давлениями.

Несмотря на кажущуюся простоту и ограниченность постановки, результаты решения задачи содержательны. При различающихся между собой скоростях V^+ и V^- возмущению в любой конечный момент времени подвергается вся граница раздела потоков, причем на большом удалении от препятствия вниз по потоку линия раздела отклоняется от стационарного положения по закону параболы. Пластина и касательная к линии раздела образуют в точке схода переменный угол.

Угловые гармонические колебания пластины относительно некоторой оси вызывают поперечные колебания линии раздела, амплитуда которых растет вниз по потоку. При частотах, превышающих определенные значения, зависящие от соотношения скоростных напоров, система создает тягу. Коэффициент полезного действия такого движителя растет с ростом частоты колебаний и при определенных условиях может превысить единицу.



Фиг. 1

Неустановившиеся течения в соответствующих областях D^\pm описываются комплексными потенциалами

$$W^\pm(z, \tau) = V^\pm z + w^\pm(z, \tau), \quad \tau = \frac{V^- t}{l}, \quad z = x + iy$$

Здесь t — время, l — характерная длина. Обозначение f^\pm понимается как f и f^- , параметры стационарного течения там, где это необходимо, отмечаются индексом ноль внизу.

Начально-краевые задачи для потенциалов возмущений $w^\pm = \varphi^\pm + i\psi^\pm$ сформулируем в приближении линейной теории. Пусть $y = f^\pm(x, \tau)$, $x < 0$, $f^+(0, \tau) = f^-(0, \tau)$ и $y = \eta(x, \tau)$, $x > 0$ — уравнения границ Γ^\pm деформированной пластины и линии L раздела потоков. Функции ψ^\pm на берегах разреза Γ_0^\pm определяются из уравнений

$$-\frac{\partial \psi^\pm}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial y} = V^- r^\pm, \quad r^\pm = \frac{\partial f^\pm}{\partial \tau} + \lambda^\pm \frac{\partial f^\pm}{\partial x}, \quad (\lambda^+, \lambda^-) = (\beta = \frac{V^+}{V^-}, 1)$$

Динамическое и кинематические условия на L приводят к системе уравнений ($\gamma = \rho^-/\rho^+$)

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial \varphi^-}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \lambda^\pm \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{V^-} \frac{\partial \psi^\pm}{\partial x}, \quad y = 0, \quad x > 0 \quad (1.2)$$

Система уравнений (1.2) при условии $\psi^+(0, \tau) = \psi^-(0, \tau)$ равносильна системе

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^+}{\partial x} - \beta \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} = n(\tau), \quad n(\tau) = V^- (1 - \beta) \frac{\partial f^\pm(0, \tau)}{\partial \tau} \quad (1.3)$$

$$V^- (1 - \beta) \eta(x, \tau) = \psi^+ - \psi^- + V^- (1 - \beta) \eta(0, \tau) \quad (1.4)$$

Начальные условия: $\eta(x, 0) = 0$, $\varphi^\pm(x, 0) = 0$.

Положим $w^\pm = w_1 + w_2^\pm$, где w_1 — функция, аналитическая в области $D^+ \cup D^-$, разрезанной по линии Γ_0 , и удовлетворяющая на Γ_0^\pm условиям $\psi_1^\pm = \psi^\pm$. Ее легко определить с помощью конформного отображения указанной области на полуплоскость и формулы Шварца.

Для отыскания функций $w_2^\pm(z, \tau)$ применим преобразование Лапласа. Трансформанты будем обозначать соответствующими прописными буквами: $W(z, s) = L_\tau w(z, \tau)$. Аналитические в D_0^\pm функции $W_2^\pm(z, s)$ определяются граничными значениями $\text{Im } W_2^\pm = 0$ на Γ_0^\pm и условиями сопряжения на L_0 , следующими из (1.1) и (1.3)

$$\beta \frac{d\Phi_2^+}{dx} - \gamma \frac{d\Phi_2^-}{dx} + s(\Phi_2^+ - \gamma\Phi_2^-) = -(\beta - \gamma) \frac{d\Phi_1}{dx} - s(1 - \gamma)\Phi_1 \quad (1.5)$$

$$\frac{d\Psi_2^+}{dx} - \beta \frac{d\Psi_2^-}{dx} + s(\Psi_2^+ - \Psi_2^-) = -(1 - \beta) \frac{d\Psi_1}{dx} - N(s) \quad (1.6)$$

Для установления связи между Ψ_2^\pm и Φ_2^\pm и их производными используем формулы, восстанавливающие функции $w^\pm(z, \tau)$ в областях D_0^\pm по их граничным значениям $\psi^\pm(x, \tau)$ на Γ_0^\pm и $\varphi^\pm(x, \tau)$ на L_0^\pm . В классе функций, ограниченных при $z = 0$, имеем [1, 2]

$$\begin{pmatrix} w^+ \\ w^- \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{z}}{\pi i} \left[\int_{-\infty}^0 \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi}(\xi - z)} + \int_0^\infty \begin{pmatrix} -\varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - z)} \right] + 2i \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \sqrt{z} \quad (1.7)$$

где $\kappa^\pm(\tau)$ — произвольные функции. Переходя к изображениям, найдем при $z = x \pm i0$

$$\Psi_2^\pm = \pm A\Phi_2^\pm + 2K^\pm(s) \sqrt{x} \quad (1.8)$$

$$\frac{d\Psi_2^\pm}{dx} = \pm A \frac{d\Phi_2^\pm}{dx} + \frac{K^\pm + M_2^\pm}{\sqrt{x}} \quad (1.9)$$

$$Ar = \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{rd\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - x)}, \quad M_2^\pm = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d\Phi_2^\pm}{dx} dx$$

Здесь A — сингулярный оператор. Формулы (1.8), (1.9) и $A \ln x = \pi$ позволяют записать (1.6) в виде интегрального уравнения

$$AR = Q - 2K_1 \sqrt{x} - \frac{H - M - K_2}{\sqrt{x}}$$

$$R = \frac{d\Phi_2^+}{dx} + \beta \frac{d\Phi_2^-}{dx} + s(\Phi_2^+ + \Phi_2^-) + D(s) \ln x$$

$$(K_1, K_2) = K^+ - (1, \beta) K^-, \quad M = M_2^+ + \beta M_2^-$$

$$Q = -\frac{V^-(1-\beta)\sqrt{x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - x)} \quad (1.10)$$

$$H = \frac{V^-(1-\beta)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}, \quad q = L, \left[\frac{\partial f_2^+}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2^-}{\partial \tau} + \beta f_1^+ + f_1^- \right]$$

$$f_1(\xi, \tau) = f(x = -\xi, \tau), \quad f_2(\xi, \tau) = -\int_0^\xi f_1 d\xi$$

Здесь $D(s)$ — произвольная функции времени.

Правая часть уравнения имеет особенность $O(1/\sqrt{x})$ при $x \rightarrow 0$. Для ее устранения положим $K_2 = H - M$. Дифференцируя обе части уравнения по x и используя установленные формулами (1.8), (1.9) правила перестановки порядков дифференцирования и применения оператора A , получим

$$A \frac{dR}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \frac{M + K_1}{\sqrt{x}}, \quad M = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dR}{dx} dx$$

К этому уравнению можно применить формулу обращения: если $Ar = f(x)$, то

$$r(x) = Bf + b, \quad B = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f d\xi}{\xi - x}$$

где b — произвольная постоянная. Интегрируя полученное уравнение по x , найдем

$$R = \int B \left[\frac{dQ}{dx} \right] dx + bx + b_0 \quad (1.11)$$

Для существования AR необходима ограниченность R при $x \rightarrow \infty$, поэтому положим $b = 0$. Вычисляя правую часть (1.11) с учетом (1.10), получим

$$\frac{d\Phi_2^+}{dx} + \beta \frac{d\Phi_2^-}{dx} + s(\Phi_2^+ + \Phi_2^-) = \frac{V^-(1-\beta)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{d\xi} \frac{d\xi}{\xi + x} + D_1(s) \ln x + a_0(s) \quad (1.12)$$

Таким образом, задача сведена к определению функций Φ_2^\pm из системы

уравнений (1.5), (1.12) с неизвестной $D_1(s)$. Значение $a_0(s)$, очевидно, не существенно.

Преобразованием Лапласа по x эта система сводится к линейной алгебраической системе уравнений относительно изображений $\Phi^\pm(p, s) = L_{p_s} \Phi_2^\pm(x, \tau)$ и имеет решение

$$\begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[\begin{pmatrix} \gamma S \\ T \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} T \\ -S \end{pmatrix} F_2 \right] \quad (1.13)$$

$$\Delta = (\gamma + \beta^2)(p - \delta)(p - \delta^*), \quad (\delta^*, \delta) = -(a \pm ic), \quad S = p + s, \quad T = \beta p + s$$

$$(\gamma + \beta^2)(a, c) = s(\gamma + \beta, \sqrt{\gamma}(1 - \beta)), \quad F_k(p, s) = L_p P_k(x, s) + C_k(s), \quad k = 1, 2$$

Здесь P_k — правые части уравнений (1.5) и (1.12), $C_k(s)$ — произвольные функции. Их можно выбрать так, чтобы правые части (1.13) не имели полюсов при $p = \delta$ и $p = \delta^*$, тогда Φ^\pm будут L_{p_s} -изображениями

$$\begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}(1 - \beta)} \operatorname{Im} \left[\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} \gamma m \\ n \end{pmatrix} E_2 \right] \quad (1.14)$$

$$E_k = \frac{1}{p - s} [L_p P_k(x, s) - L_p P_k(x, s)|_{p=\delta}], \quad m = 1 + \delta_1, \quad n = 1 + \beta \delta_1, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{s}$$

Если $P_k(x, s) = L_s p_k(x, \tau)$, то оригиналами изображений E_k будут функции

$$e_k(x, \tau) = -\frac{1}{\delta_1} \int_0^\tau p_k \left(x + \frac{\xi}{\delta_1}, \tau - \xi \right) d\xi$$

В случае, когда $p_k(x, \tau) = p_{kr}(\tau) g_{kr}(x)$

$$\delta_1 e_k(x, \tau) = -p_{kr}(\tau) * g_{kr}(x + T)$$

Знак * означает свертку функций, $T = \tau/\delta_1$. Таким образом, отыскание оригиналов изображений (1.14) сводится к квадратурам.

Уравнения для определения $\kappa^\pm(\tau)$ найдем из условия ограниченности вертикальных компонент скоростей при $x = 0$

$$(1 - \beta) h \mp m_2^\pm - \kappa^\pm = 0 \quad (1.15)$$

Из (1.15) $k_1(\tau) = -m_2^+ - m_2^-$, $k_2(\tau) = h - m_2^+ - \beta m_2^-$. Здесь $(h, m_2^\pm) = L_s^{-1}(H, M_2^\pm)$. Используемое ранее условие $K_2 = H - M$ является следствием уравнений (1.15).

При $x \geq 0$ имеем

$$\sqrt{\gamma}(\varphi_2^+ + \varphi_2^-, \varphi_2^+ + \beta \varphi_2^-) = \operatorname{Im} [(-\delta_1, 1) e], \quad e = e_1 + i \sqrt{\gamma} e_2$$

$$\sqrt{\gamma}(m_2^+ + m_2^-, m_2^+ + \beta m_2^-) = \operatorname{Im} [(-\delta_1, 1) \varepsilon], \quad \varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{de}{dx} dx$$

На основании этих формул и уравнения (1.4) получим уравнение для линии L

$$V^-(1 - \beta) \sqrt{\gamma} [\eta(x, \tau) - \eta(0, \tau)] = -\operatorname{Im} [\delta_1 (Ae + 2\varepsilon \sqrt{x})]$$

2. Перепад давления $\Delta p^+ = p^+ - p^-$ на пластине в линейном приближении определяется формулой

$$\Delta p^+ = -\frac{\rho^+ V^-}{l} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\varphi^+ - \gamma \varphi^-) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta \varphi^+ - \gamma \varphi^-) \right]$$

После подстановки в нее значений φ^* , найденных из (1.7) при $z = x \pm i0$, $x < 0$, и преобразований, выполненных с учетом условия непрерывности давления на L , найдем

$$\Delta p^+ = \frac{\rho^+ V^- \sqrt{-x}}{\pi l} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\psi^+ + \gamma \psi^-) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\beta \psi^+ + \gamma \psi^-) \right] \frac{dx^*}{\sqrt{-x^*} (x^* - x)} - \right. \\ \left. - 2\pi \frac{\partial}{\partial \tau} (\kappa^+ + \gamma \kappa^-) \right\} \quad (2.1)$$

Для ограниченности Δp^+ при $x \rightarrow -\infty$ надо положить $(\kappa^+ + \gamma \kappa^-)_\tau = 0$ или $\kappa^+ + \gamma \kappa^- = 0$, так как в начальный момент возмущения отсутствуют. Последнее уравнение используется для определения $d_1(\tau) = L_i^{-1} D_1(s)$.

Внося в (2.1) значения подынтегральных функций, найдем

$$\Delta p^+ = \frac{\rho^+ (V^-)^2 \sqrt{-x}}{\pi l} \int_0^\infty \frac{P^+(\xi, \tau)}{\sqrt{\xi} (\xi + x)} d\xi \quad (2.2)$$

$$P^+ = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (f_2^+ + \gamma f_2^-) + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\beta f_1^+ + \gamma f_1^-) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\beta^2 f_1^+ + \gamma f_1^-) \quad (2.3)$$

Компоненты результирующей силы давлений $X + iY$, действующих на деформированную часть пластины в случае $f^+ = f^- = f$, находятся по формулам

$$(X, Y) = \int_{-l}^0 \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, 1 \right) \Delta p^+ dx$$

В случае $f^+ = -f^- = -f$ вертикальная компонента вычисляется по той же формуле, а горизонтальная — по формуле

$$X = \int_{-l}^0 \frac{\partial f}{\partial x} \Delta p^- dx, \quad \Delta p^- = p^+ + p^- - 2p_0$$

$$\frac{\Delta p^-}{\rho^+ (V^-)^2} = \frac{\sqrt{-x}}{\pi l} \left[\int_0^\infty \frac{P^-(\xi, \tau)}{\sqrt{\xi} (\xi + x)} d\xi + \frac{2\gamma}{V^-} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi^-}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^-}{\partial \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi} (\xi - x)} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi}{V^-} \frac{\partial}{\partial \tau} (\kappa^+ - \kappa^-) \right]$$

$$P^- = (1 + \gamma) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} + 2(\beta + \gamma) \frac{\partial f_1}{\partial \tau} - (\beta^2 + \gamma) \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \quad (2.4)$$

При выводе (2.2), (2.4) использовано условие ограниченности $\psi_x^\pm(0, \tau)$.

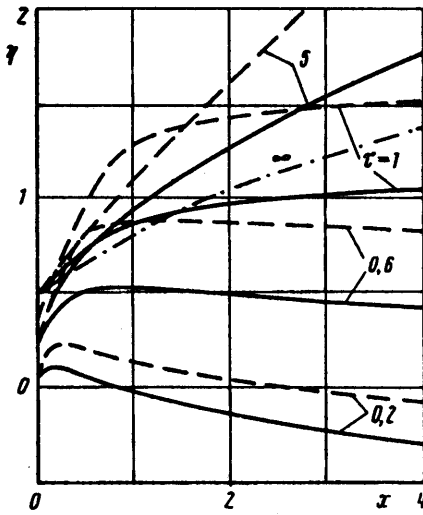
Дальнейшие результаты относятся к указанным случаям.

3. Пусть $f^+ = f^- = k(\tau) f(x) V(x+l)$, $k(0) = 0$, $k(\infty) = k_\infty$, $U(x)$ — единичная функция. Для $x > 0$ получим

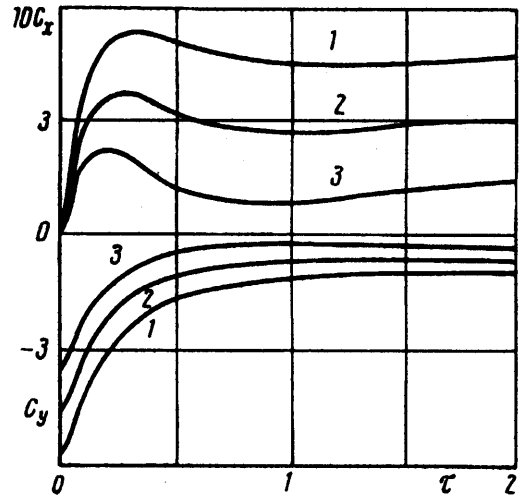
$$\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma} (1 - \beta)} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\delta_1} \begin{pmatrix} \gamma m \\ n \end{pmatrix} d(\tau) \ln(x + T) \right] \quad (3.1)$$

$$d(\tau) = L_i^{-1} D(s), \quad D(s) = -\frac{V^-}{\pi \operatorname{Im} \sqrt{\gamma} \delta_1} [(\gamma + \beta) I_1 + (1 + \gamma) I_2] \sqrt{s} K(s)$$

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{df_k}{d\xi} d\xi$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\eta(x, \tau) = k(\tau) J(x) + \frac{2}{1-\beta} d(\tau) * \operatorname{Re} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{T}} - \sqrt{\frac{x}{T}} \right] \quad (3.2)$$

$$J = -\frac{2}{\pi} \left[\int_0^l \frac{df_1}{d\xi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi}{x}} d\xi + \pi I_1 \sqrt{x} \right] \quad (3.3)$$

В пределе $\eta(x, \infty) = k_\infty J(x)$. Это означает, что при установившемся обтекании пластины $u = k_\infty f(x) U(x+l)$ двухслойным потоком различие в скоростных напорах не влияет на форму линии раздела потоков. Такую же форму имеет граница каверны при струйном обтекании препятствия, образованного пластиной и ее зеркальным отражением относительно оси x .

Из (3.2) при $k_s(0) = 0, a_1 = a/s$

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial \tau} = -k(\tau) \frac{\partial f_1(0)}{\partial \xi} - \frac{2a_1}{(1-\beta) \operatorname{Im} \sqrt{\gamma \delta_1}} \left[(\gamma + \beta) I_1 \frac{dk}{d\tau} + (1 + \gamma) I_2 \frac{d^2 k}{d\tau^2} \right] * \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

Касательные к Γ и L в точке $x=0$ совпадают лишь при $\tau=0$ и ∞ . Горизонтальные составляющие скорости возмущенного течения имеют в этой точке логарифмическую особенность. На основании (3.1)

$$\left[\frac{\partial \varphi^+}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^-}{\partial x} \right] = \frac{1}{\gamma + \beta} (\gamma, \beta) d(\tau) \ln x + O(1)$$

На фиг. 2 и 3 приведены некоторые результаты расчетов для случая $k(\tau) = \alpha(1 - e^{-\alpha\tau})^2$, $f(x) = 1 + x, l = 1, \alpha = 0,5, a = 2$.

На фиг. 2 показана линия раздела в различные моменты времени при $\beta = 0, \gamma = 1$ (сплошные линии) и $\beta = 0,25, \gamma = 1,5$ (штриховые). На фиг. 3 даны графики коэффициентов $(C_x, C_y) = 2(fX, fY)/(p^+ (V^-)^2 l)$. Линиям 1-3 соответствуют значения $\beta = 0; \gamma = 1,5; 1; 0,5$. Аналитические выражения коэффициентов C_x, C_y ввиду ограниченности объема статьи не приводятся.

Отметим предельные значения

$$C_y(\tau = 0) = -(32/9\pi) \alpha a^2 (1 + \gamma), \quad C_y(\tau = \infty) = -(4/\pi) \alpha (\beta^2 + \gamma),$$

$$C_x(\tau = \infty) = (4/\pi) \alpha^2 (\beta^2 + \gamma).$$

При $\gamma = \beta = 1$ $C_x(\tau = \infty)$ совпадает со значением коэффициента сопротивления тонкого клина с раствором 2α , обтекаемого с отрывом струй однородным потоком.

4. Для описания результатов в случае $f^+ = -f^- = k(\tau) f(x) U(x+l)$, $f(0) = f(-l) = 0$ положим $\Phi_2^\pm = \Phi_a^\pm + \Phi_b^\pm$. Обозначим левые части уравнений (1.5) и (1.12) как $R_k(\Phi_2^\pm)$, $k = 1, 2$, соответственно, а правые части представим в виде

$$P_k = P_{ka} + P_{kb}, \quad P_{1a} = P_1, \quad P_{2a} = -(1 - \beta) B \frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{N(s)}{\pi} \ln x$$

Относительно изображений Φ_a^\pm и Φ_b^\pm получим системы уравнений $R_k(\Phi_a^\pm) = P_{ka}$, $R_k(\Phi_b^\pm) = P_{kb}$. По определению, $P_{1b} = 0$, $P_{2b} = D(s) \ln x$, поэтому для Φ_b^\pm справедлива формула (3.1), в которой

$$(1 - \beta) \operatorname{Im} \sqrt{\pi \gamma \delta_1} D(s) = -\sqrt{s} D_1(s), \quad D_1(s) = L_s d_1(\tau)$$

$$(1 + \gamma) d_1(\tau) = V^{-1} (1 - \beta) \{n_1 I_1 k(\tau) + n_2 \operatorname{Re} [(1 - i\sqrt{\gamma}) \delta_1 k^{(1)}(\tau) * \mu_1(T)] +$$

$$+ n_3 [I_2 k(\tau) - k^{(1)}(0) \operatorname{Re} \mu_2(T)]\}, \quad \mu_k = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{df_k}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi + T}}$$

$$n_1 = \frac{(1 + \gamma)(\beta + \gamma)(\gamma - \beta^2)}{\beta^2 + \gamma}, \quad n_2 = \frac{2\gamma(1 - \beta)^2}{1 + \gamma}, \quad n_3 = \gamma^2 - 1$$

Функции Φ_a^\pm находятся по формулам (1.14), в которых

$$E_k = L_{ps} e_{ka}(x, \tau), \quad 2\pi \delta_1 e_{1a} = V^{-k(r-1)}(\tau) m_r * \frac{dg_1(x+T)}{dx}, \quad r = 1 - 3$$

$$2\pi \delta_1 e_{2a} = V^{-1} (1 - \beta^2) k(\tau) * \frac{d^2 g_1(x+T)}{dx^2}, \quad g_1(x) = \int_0^l f_1(\xi) \ln(x + \xi) d\xi$$

$$m_1 = (1 + \beta)(\beta - \gamma), \quad m_2 = (1 + \beta)(\beta - \gamma) + 2(\beta - \gamma), \quad m_3 = 2(1 - \gamma)$$

Для вычисления $\eta(x, \tau)$ получим

$$\eta(x, \tau) = C_1 k(\tau) M(x, 0) + C_2 \operatorname{Im} [(1 - i\sqrt{\gamma})^2 \delta_1 k^{(1)}(\tau) * M(x, T)] +$$

$$+ C_3 F(\tau) * \operatorname{Re} [\sqrt{\tau + \delta_1 x} - \sqrt{\tau}]$$

$$C_1 = \frac{2(\beta^2 - \gamma)}{\pi(\beta^2 + \gamma)}, \quad C_2 = \frac{4\sqrt{\gamma}(1 - \beta)}{\pi(1 + \gamma)^2}, \quad C_3 = \frac{2}{\pi(1 + \gamma)(1 - \beta) \operatorname{Im} \sqrt{\gamma \delta_1}}$$

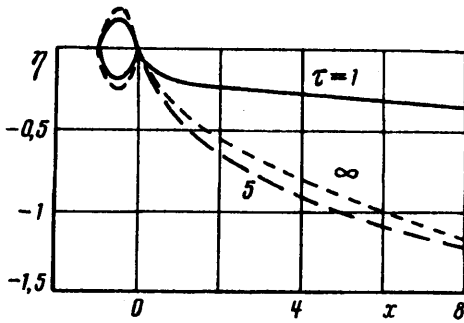
$$M(x, T) = \sqrt{x} \mu_1(T) + \int_0^l \frac{df_1}{d\xi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi + T}{x}} d\xi$$

$$F(\tau) = \pi n_1 I_1 \frac{dk}{d\tau} + n_2 \operatorname{Re} \left[\delta_1 (1 - i\sqrt{\gamma})^2 \frac{d^2 k}{d\tau^2} * \mu_1(T) \right] + \pi n_3 I_2 \frac{d^2 k}{d\tau^2}$$

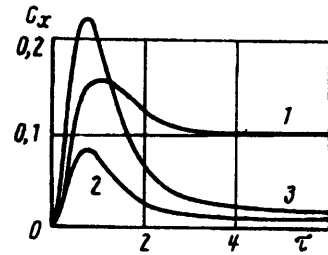
Отсюда

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial x} = -\frac{\pi}{2} C_1 k(\tau) \frac{\partial f(0)}{\partial x} - C_3 F(\tau) * \frac{a_1}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\eta(x, \tau) = \frac{\gamma - \beta^2}{\gamma + \beta^2} k_{\infty} J(x), \quad \tau \rightarrow \infty$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\frac{\partial \eta(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\gamma - \beta^2}{\gamma + \beta^2} k_{\infty} \frac{df(0)}{\partial x}, \quad k_{\infty} = k(\tau) \quad (\tau \rightarrow \infty)$$

Здесь $J(x)$ — функция (3.3). Линейная теория дает, что касательная к L_{∞} совпадает с касательной к одной из сторон профиля в точке $x=0$ лишь при $\gamma - \beta^2 = \pm(\gamma + \beta^2)$. Согласно же нелинейной теории, поток, имеющий большой скоростной напор, сходит по касательной к стенке независимо от величины отношения напоров взаимодействующих потоков. Различие объясняется локальной неточностью линейной теории для функции скоростей в окрестностях критических точек.

Некоторые результаты расчетов для $k(\tau) = \alpha(1 - e^{-2\tau})^2$, $f(x) = -(x+x^2)$, $l=1$ приведены на фиг. 4 и 5. На первой из них показана форма контура и линии L в различные моменты времени при $\alpha = 0,5$, $\beta = 0$, $\gamma = 0,5$. Качественно такой же характер поведения L наблюдается и при других значениях этих параметров. Различие состоит в том, что при $\beta^2 < \gamma$ линия L отклоняется в нижнюю полуплоскость, а при $\beta^2 > \gamma$ — в верхнюю.

На фиг. 5 приведены графики коэффициента сопротивления $C_x = 2X/(\rho^+ (\alpha V^-)^2 l)$. Линии 1—3 соответствуют значениям параметров (β, γ) : (0; 1,5), (0,5; 0,5), (1,5; 1,5). Поведение этой величины отражает характер поведения скорости деформации точек контура

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_x = \frac{\pi}{2} k_{\infty} \left[\frac{\gamma - \beta^2}{\gamma + \beta^2} \right]^2 J_1^2$$

При стационарном обтекании двухслойным потоком профиль испытывает сопротивление, если скоростные напоры потоков различны.

5. Решение задачи о гармонических колебаниях пластины по закону $y = f(x) \exp(i\omega\tau)$ может быть получено из общих формул как частный случай. Для установившихся колебаний все зависящие от времени функции будут изменяться также по гармоническому закону. Поэтому, представляя потенциал возмущенного течения в виде $w^{\pm}(\bar{z}, \tau) = w^{\pm}(z) \exp(i\omega\tau)$, придем к краевым задачам для функций $w^{\pm}(z)$, сходным с задачами отыскания L_s -изображений функций $w^{\pm}(z, \tau)$. Отличие состоит в том, что s заменяется на $i\omega$, а начальные условия не выставляются.

Опуская все выкладки и не останавливаясь на их некоторых отличиях от общего приема, обусловленных спецификой задачи, приведем конечные результаты.

Вследствие установившегося процесса колебаний решение нужно искать в классе функций, обеспечивающих плавный сход потоков с пластины.

Полагая, как и ранее, $\varphi^*(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2^*(x)$, найдем

$$(\varphi_1^*, \varphi_2^-) = -\varphi_1 + (-\sqrt{\gamma}, i) B(\omega) \exp(-\delta^* x), \quad \delta^* = a - ic$$

$$\sqrt{\gamma B} = iV^- [(\gamma + \beta) I_1 + i\omega(1 + \gamma) I_2]$$

$B(\omega)$ определяется из условия ограниченности Δp^+ при $x \rightarrow -\infty$.

Для вычисления Δp^+ справедливы формулы (2.2) и (2.3)

$$\eta(x, \tau) = h(x) \exp(i\omega\tau), \quad h(x) = J(x) + \frac{B(\omega)}{V^-(1-\beta)} \left[2 - \int_0^1 \frac{\exp(-\delta^* x\tau)}{\sqrt{1-\tau}} d\tau \right]$$

Задача об угловых вращениях пластины, когда $f(x) = \alpha(x+l)U(x+l)$, $x < 0$, $\alpha = \text{const}$, представляет интерес для оценки эффективности машущего движителя в двухслойном потоке. Пусть $\langle R \rangle$ — средняя за период колебаний сила тяги $R = -X$, создаваемая движителем. Для коэффициента этой силы получена формула

$$C_R = \frac{2\langle R \rangle}{\rho^-(\alpha V^-)^2 l} = \frac{1+\gamma}{\pi\gamma} \left[\frac{8}{9} \omega^2 - \frac{\beta^2 + \gamma}{1+\gamma} \right] \quad (5.1)$$

В обращенном движении со скоростью V^- сила тяги совершает за период колебаний работу $A = 2\pi \langle R \rangle V^- / \omega$. Отношение A к работе, затраченной на угловые вращения, определяет коэффициент полезного действия

$$\mu = \frac{1+\gamma}{\beta+\gamma} \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{8\omega^2} \frac{\beta^2 + \gamma}{1+\gamma} \right] \quad (5.2)$$

КПД возрастает с ростом ω и может стать больше единицы при $2\beta < 1 - \gamma$. Этот феномен объясняется переходом механической энергии от потока к движителю.

Из (5.1) и (5.2) получаются известные [2, 3] результаты для машущего движителя в однородном безграничном потоке. КПД такого движителя не превышает 0.5.

Если тягу определить в долях скоростного напора, выраженного через плотность ρ^+ , то легко видеть, что коэффициент тяги движителя, расположенного на свободной поверхности ($\gamma = 0$, $\rho^+ = \text{const}$, $\rho^- = 0$), в 2 раза меньше коэффициента тяги в однородном потоке, а их КПД одинаковы, если полезную работу вычислять теперь на перемещении со скоростью V^+ .

При $\beta = 1$ из (1.1) следует, что функция $\varphi^+ - \gamma\varphi^- = \Phi(\tau - x)U(\tau - x)$, т. е. представляет собой простую волну, а из уравнений (1.2), (1.8) и условия $\Delta p^+ \sim O(1)$ при $x \rightarrow -\infty$ можно получить, что $\psi^+ = \psi^-$, $\varphi_2^+ = -\varphi_2^-$ при $x > 0$, $\kappa^+ = \kappa^- = 0$. Для однозначного определения функций $\varphi_2^*(x, \tau)$ нужно использовать условия плавности схода потоков с пластины. Решение, основанное на таком подходе, содержится в [4]. Там же рассмотрены примеры, показывающие, что при произвольных законах деформации пластины с нулевыми начальными условиями в любой момент $\tau \neq \infty \lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x, \tau) = 0$.

Решение кинематической задачи при $\beta = 1$ не может быть получено как частный случай общего путем предельного перехода, так как при $\beta \neq 1$ любое возмущение, вносимое в поток, распространяется в нем на всю область мгновенно.

Обсуждаемый частный случай допускает постановку задачи, основанную на использовании численного метода дискретных вихрей [5].

Авторы благодарны Г. Ю. Степанову, обратившему их внимание на проблему, к которой относится данная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 444 с.
3. *Ибрагимова Л. М.* Гидродинамические характеристики движителя типа «машущее крыло»//Динамика сплошных сред с границами раздела. Чебоксары, 1983. С. 61—75.
4. *Кузнецов А. В., Троепольская О. В.* Нестационарное невязкое взаимодействие двух потоков, разделенных пластиной//Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. С. 153—170.
5. *Бабкин В. И., Белоцерковский С. М., Гуляев В. В., Дворак А. В.* Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989. 208 с.

Казань

Поступила в редакцию
5.1.1993