

УДК 532.51.011:536.242

© 1994 г. А. В. КАШЕВАРОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПРАНДТЛЯ

Решена задача теплообмена при обтекании кругового цилиндра несжимаемой жидкостью с малым числом Прандтля $Pr \ll 1$.

При $Pr \ll 1$, как известно, динамический пограничный слой существенно тоньше теплового, что позволяет пренебречь влиянием вязкости и рассматривать теплообмен в потенциальном потоке. В монографии [1] приведены два точных решения этой задачи: для продольного обтекания плоской пластины с постоянной температурой стенки и для течения в окрестности критической точки затупленного тела. В настоящей работе представлено точное решение задачи конвективного теплообмена при поперечном обтекании жидкостью с числом $Pr \ll 1$ кругового цилиндра.

Решение выражается через функции Матье. Приведены картины изотерм, распределения локального числа Нуссельта Nu по обводу цилиндра для различных чисел Пекле $Pe \leq 10$, а также зависимость среднего числа $\langle Nu \rangle$ от числа Pe . Произведено сравнение чисел Nu и профилей температуры в окрестности лобовой критической точки, полученных путем решения уравнений энергии и теплового пограничного слоя. Показано, что уравнение теплового пограничного слоя применимо для расчета теплоотдачи в лобовой критической точке при $Pr \ll 1$ для чисел $Pe \geq O(1)$.

1. Рассмотрим неизотермическое обтекание несжимаемой жидкостью кругового цилиндра бесконечной длины, ось симметрии которого расположена перпендикулярно скорости набегающего потока. Будем считать, что число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$, число $Pr \rightarrow 0$, но число $Pe = RePr = O(1)$. Таким образом, в отличие от [1] для определения распределения температуры будем решать не уравнение теплового пограничного слоя, а полное уравнение энергии. При небольшой разности температур набегающего потока T_∞^* и поверхности цилиндра T_w^* , которая считается постоянной, уравнение энергии имеет безразмерный вид [2]

$$Pe (u \nabla T) \sim \Delta T = 0 \quad (1.1)$$

$$T = \frac{T^* - T_w^*}{T_\infty^* - T_w^*}, \quad u = \frac{U}{U_\infty}$$

где u — поле скоростей, U_∞ — скорость набегающего потока, звездочка обозначает размерную температуру.

Решение уравнения (1.1) будем искать в полярных координатах (r, θ) . Так как динамический пограничный слой в данной постановке является асимптотически тонким, течение жидкости можно считать потенциальным и составляющие скорости есть

$$u_r = (1 - r^{-2}) \cos \theta, \quad u_\theta = -(1 + r^{-2}) \sin \theta \quad (1.2)$$

Радиальная координата обезразмерена через радиус цилиндра R .

Граничные условия для уравнения (1.1) таковы: на поверхности цилиндра

$$T|_{r=1} = 0 \quad (1.3)$$

вдали от поверхности

$$T|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (1.4)$$

Отметим, что решение задачи (1.1)—(1.4) представлено в [3], где она рассматривалась в связи с теорией зонда Ленгмюра для распределения концентрации заряженных частиц. Здесь подробно изложим ход решения.

2. Решение задачи (1.1)—(1.4) ищем в виде

$$T = 1 - \exp \left\{ \frac{Pe}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \right\} \vartheta \quad (2.1)$$

Заметим, что показатель экспоненты в (2.1) пропорционален потенциалу скоростей бесциркулярного обтекания цилиндра. Подставляя (2.1) в исходное уравнение (1.1), получим для ϑ уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} - \kappa^2 \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \vartheta + \frac{2\kappa^2}{r^2} \cos 2\theta \vartheta = 0$$

$$\kappa = Pe/2 \quad (2.2)$$

Разделяя переменные в (2.2) $\vartheta(r, \theta) = P(r)\Phi(\theta)$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$r^2 P'' + rP' - q(r^2 + r^{-2})P - \mu^2 P = 0 \quad (2.3)$$

$$\Phi'' + (\mu^2 + 2q \cos 2\theta)\Phi = 0 \quad (2.4)$$

где $|q| = \kappa^2$, μ — некоторая постоянная.

Уравнение (2.4) представляет собой уравнение Маттье при отрицательном q [4]. Так как обтекание цилиндра симметрично, решениями уравнения (2.4) являются четные функции Маттье первого рода $se_n(\theta, -q)$, которые есть периодические решения уравнения (2.4) при значениях μ , равных собственным значениям. Эти функции могут быть представлены в виде рядов

$$se_{2n}(\theta, -q) = (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p}^{(2n)} \cos 2p\theta \quad (2.5)$$

$$se_{2n+1}(\theta, -q) = (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p B_{2p+1}^{(2n+1)} \cos (2p+1)\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

где $A_{2p}^{(2n)}, B_{2p+1}^{(2n+1)}$ — коэффициенты разложений в ряды функций $se_{2n}(\theta, q)$ и $se_{2n+1}(\theta, q)$ соответственно.

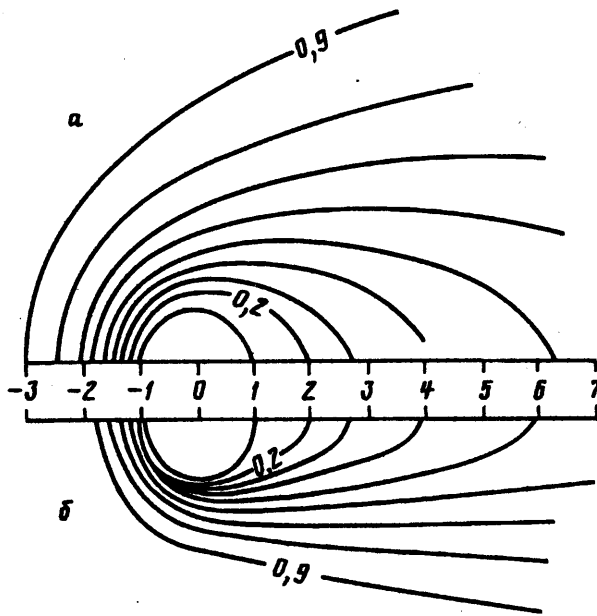
Коэффициенты $A_{2p}^{(2n)}, B_{2p+1}^{(2n+1)}$ зависят от q . Их значения при $q \leq 25$ затабулированы в [5].

Заменой переменной $\xi = \ln r$ в уравнении (2.3) придем к уравнению [6]

$$P'' - (2q \operatorname{ch} 2\xi + \mu^2)P = 0$$

которое является модифицированным уравнением Маттье при $q < 0$.

Его решениями, стремящимися к нулю при $\xi \rightarrow \infty$, будут модифицированные функции Маттье второго рода $Fe_{2n}(\xi, -q), Fe_{2n+1}(\xi, -q)$. Эти функции могут быть представлены в виде рядов произведений модифицированных функций Бесселя.



Фиг. 1

Скончательно общее решение уравнения (1.1) запишется в виде

$$T = 1 - \exp\{\chi(r + r^{-1}) \cos \theta\} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{Fe}_n(\ln r, -q) \text{ce}_n(\theta, -q) \quad (2.7)$$

где C_n — постоянные интегрирования.

Отметим тот факт, что функции Матье, возникающие в задачах прикладной математики, связанных с эллипсами и эллиптическими цилиндрами, появились (вероятно, впервые) в задаче, связанной с круговым цилиндром.

Постоянные C_n определяем из граничного условия (1.3). Подставляя разложения (2.5), (2.6) в (2.7) и разлагая функцию $\exp(-2\chi \cos \theta)$ в ряд Фурье, получим для определения постоянных C_{2n} и C_{2n+1} две системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \text{Fe}_{2n}(0, -q) (-1)^n A_{2p}^{(2n)} = \begin{cases} I_0(2\chi), & p = 0 \\ (-1)^p 2I_{2p}(2\chi), & p = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} \text{Fe}_{2n+1}(0, -q) (-1)^n B_{2p+1}^{(2n+1)} = (-1)^{p+1} 2I_{2p+1}(2\chi), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

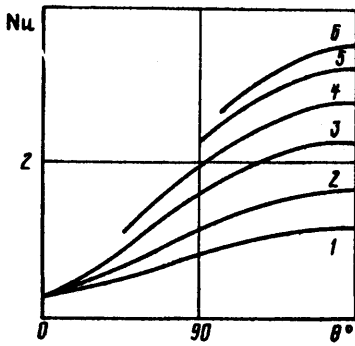
где $I_p(\chi)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода.

3. На фиг. 1 приведены картины изотерм с постоянным шагом $\Delta T = 0,1$ при $\text{Re} = 1$ (а) и 4 (б), рассчитанные по формулам (2.7)–(2.9) с помощью таблиц [5]. Локальное число Нуссельта, характеризующее теплоотдачу

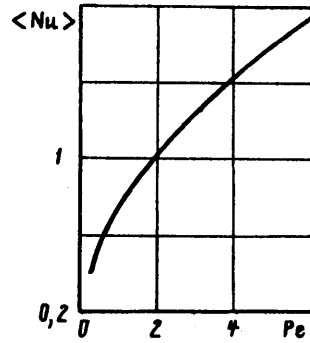
$$\text{Nu} = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

где α — коэффициент теплоотдачи, λ — коэффициент теплопроводности жидкости, определим, дифференцируя (2.7)

$$\text{Nu} = \exp(2\chi \cos \theta) \left[\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p+1} C_{2n} \text{Fe}_{2n}'(0, -q) A_{2p}^{(2n)} \cos 2p\theta + \right.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p+1} C_{2n+1} Fe_{2n+1}'(0, -q) B_{2p+1}^{(2n)} \cos(2p+1)\theta \quad (3.1)$$

Графики зависимостей локального числа Nu от угловой координаты θ при различных числах Re приведены на фиг. 2. Кривая 1 соответствует $Re = 1$, 2—2, 3—4, 4—6, 5—8 и 6—10.

Для чисел $Re > 4$ возникают вычислительные трудности при расчете числа Nu по формуле (3.1) для задней поверхности цилиндра, обусловленные тем, что сумма первого двойного ряда в (3.1) при $\theta < 90^\circ$ положительна, а второго — отрицательна, причем они близки по абсолютной величине. Кроме того, разность двух близких чисел умножается при $Re > 4$ на достаточно большую величину. Поэтому требуется вычислять суммы рядов в (3.1) с большой точностью, тем большей, чем больше число Re . Точность вычислений, однако, ограничена точностью и полнотой таблиц [5].

Среднее по обводу цилиндра число Нуссельта $\langle Nu \rangle$ определяется интегрированием выражения (3.1)

$$\begin{aligned} \langle Nu \rangle = & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p+1} [C_{2n} Fe_{2n}'(0, -q) A_{2p}^{(2n)} I_{2p}(2\kappa) + \\ & + C_{2n+1} Fe'_{2n+1}(0, -q) B_{2p+1}^{(2n)} I_{2p+1}(2\kappa)] \end{aligned}$$

Зависимость $\langle Nu \rangle$ от числа Re приведена на фиг. 3.

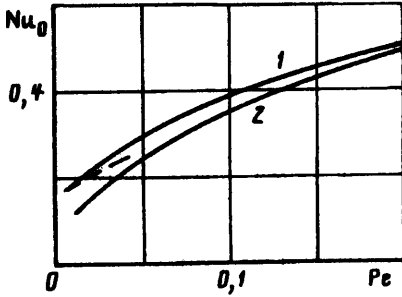
4. Сравним результаты настоящей работы, полученные путем решения уравнения энергии, с результатами [1], которые получены на основе решения уравнения теплового пограничного слоя. Как известно, уравнение теплового пограничного слоя является упрощением полного уравнения энергии при числах $Re \gg 1$, когда один из членов уравнения энергии становится малым.

В [1] представлено простое выражение для числа Nu_0 в окрестности лобовой критической точки любого тела, которое в случае цилиндра имеет вид

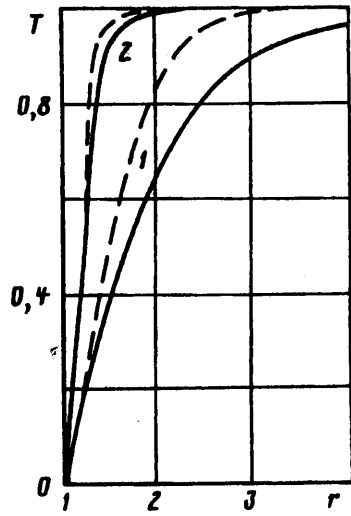
$$Nu_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Re} \quad (4.1)$$

Сравнивая результаты, полученные по формуле (4.1), с данными фиг. 2, видим, что результаты практически совпадают. Более того, даже и при числах Re меньших, чем указано на фиг. 2, имеется хорошее совпадение для числа Nu_0 , определенного из решения уравнений энергии и теплового пограничного слоя. Расхождение становится заметным лишь при числах $Re < 0,2$.

Используя предельные формы функций Матье при $q \rightarrow 0$, получим для числа Nu в любой точке цилиндра в первом приближении



Фиг. 4



Фиг. 5

$$Nu = - \frac{1}{\gamma + \ln(Re/4)} \quad (4.2)$$

где $\gamma = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера.

Зависимости $Nu_0(Re)$ в лобовой критической точке при малых Re приведены на фиг. 4. Кривая 1 — результат расчета по формуле (3.1), кривая 2 — по формуле (4.1), штриховой кривой показана приближенная зависимость (4.2).

Таким образом, уравнение теплового пограничного слоя пригодно для расчета числа Nu_0 не только при числах $Re \gg 1$, но также при $Re \geq O(1)$. Что же касается распределения температуры, то результаты решений уравнений энергии и теплового пограничного слоя несколько отличаются друг от друга.

Уравнение теплового пограничного слоя при $Pr \ll 1$ [1], записанное для лобовой критической точки цилиндра, имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + 2 Pe y \frac{dT}{dy} = 0 \quad (4.3)$$

где y — координата, перпендикулярная поверхности тела и отсчитываемая от поверхности.

Решение уравнения (4.3) есть

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pe} \int_0^y \exp(-Pe \eta^2) d\eta \quad (4.4)$$

Профили температур вблизи лобовой критической точки для различных Re приведены на фиг. 5. Сплошными кривыми представлены профили, определенные по формуле (2.7), штриховыми линиями — по (4.4). Кривые 1 соответствуют $Re = 1$, кривые 2 — $Re = 10$. С увеличением числа Re кривые с одним и тем же номером сближаются.

В заключение заметим, что уравнение теплового пограничного слоя, записанное для задней критической точки, также представляется уравнением (4.3), но второй член в нем имеет знак минус. В этом случае решение уравнения не обладает свойством ограниченности на бесконечности.

Таким образом, уравнение теплового пограничного слоя не может быть использовано для расчета теплоотдачи в окрестности задней критической точки. Это уравнение, как известно, получено для плоской пластины путем оценки

величины различных членов уравнения энергии при $Re \gg 1$. Для кругового цилиндра, как видно из результатов данной работы, член $\partial^2 T / \partial x^2$ сравним в окрестности задней критической точки с $\partial^2 T / \partial y^2$. Таким образом, применение уравнения теплового пограничного слоя зависит не только от величины числа Re , но и от формы обтекаемого тела.

Автор благодарит З. М. Егорову и Е. В. Устинова за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
3. Егорова З. М., Кашеваров А. В., Фомина Е. М., Цхай Н. С. Об измерении концентрации заряженных частиц цилиндрическим зондом Ленгмюра в плазме пламени // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. № 3. С. 577—581.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
5. Таблицы для вычисления функций Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 279 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с нем. М.: Наука, 1976. 576 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1992