

УДК 532.527

© 1994 г. В. В. БОГОЛЕПОВ

НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ВИХРЕЙ ГЕРТЛЕРА В ПРИСТЕНОЧНОЙ ЧАСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Построена асимптотическая модель развития вихрей Гертлера с длиной волны меньше толщины пограничного слоя жидкости около вогнутой поверхности при больших числах Рейнольдса и Гертлера; известно, что на начальном линейном этапе развития такие вихри обладают наибольшим инкрементом роста их амплитуды. Результаты численного решения показывают, что учет нелинейного взаимодействия возмущений функций течения значительно уменьшает скорость их роста, приводит к формированию ядра возмущенной вихревой области; представлены профили функций течения на различных этапах развития вихрей.

В [1—4] построена асимптотическая теория развития вихрей Гертлера [5] в пограничном слое жидкости при больших числах Рейнольдса и Гертлера. Анализ уравнений Навье — Стокса позволил выявить основные механизмы развития неустойчивости течения, определить параметры подобия и упростить краевые задачи, описывающие различные режимы развития вихрей. Численные и аналитические решения в линейном приближении получены для всего диапазона длин волн существования вихрей. Асимптотический анализ при исследовании вихрей Гертлера использовался также в [6—9]. Изучение нелинейной фазы развития вихрей [9, 10] показало значительные искажения профиля скорости в пограничном слое, которые создают благоприятные условия для возникновения и роста волн Толлмина — Шлихтинга.

Ниже представлены результаты численных расчетов нелинейной эволюции коротковолновых вихрей в пристеночной части пограничного слоя. В линейном приближении этот режим развития вихрей обладает наибольшим инкрементом роста их амплитуды и в научной литературе пока полностью отсутствуют данные о его нелинейной фазе.

1. Рассматривается обтекание вогнутой поверхности равномерным потоком вязкой жидкости при больших, но докритических числах Рейнольдса $Re = u_\infty L / \nu = \varepsilon^{-2}$ (u_∞ , L и ν — скорость набегающего потока, некоторое расстояние вдоль потока от переднего края поверхности и коэффициент кинематической вязкости соответственно). Согласно классической теории Прандтля, около поверхности образуется двумерный ламинарный пограничный слой, который при некоторых условиях может потерять устойчивость. Тогда в пограничном слое возникают вытянутые в продольном направлении вихри Гертлера и течение из двумерного становится трехмерным.

Течение исследуется в связанной с поверхностью системе координат x_* , y_* , z_* , где ось x_* направлена по потоку, ось y_* — по нормали к поверхности, ось z_* — по нормали к плоскости x_* , y_* и все координаты отнесены к L . Компоненты скорости u_* , v_* и w_* вдоль осей x_* , y_* и z_* относятся к u_∞ , давление p_* — к ρu_∞^2 (ρ — плотность жидкости) и используются только безразмерные переменные. Принимается, что кривизна поверхности мала $k = L/R = \kappa K < 1$, $K \sim 1$, $\varepsilon < \kappa < 1$, и течение исследуется при больших числах Гертлера

$G = 2Re^{1/2}L/R \sim \kappa/\varepsilon$, R — радиус кривизны. В принятых обозначениях характерная толщина пограничного слоя $\delta \sim \varepsilon$.

Строится стационарное решение уравнений Навье — Стокса для пространственных вихревых областей с характерными размерами $\Delta x_* \sim b$, $\Delta y_* \sim a$ и $\Delta z_* \sim c$. Очевидно, эти величины должны превосходить характерную длину свободного пробега молекул жидкости, а протяженность таких областей не может превышать размеров обтекаемого тела, т. е. $\varepsilon^2 < a$, $c < b \leq 1$.

Предполагается, что развитие неустойчивости пограничного слоя приводит в конечном счете к нелинейным возмущениям функций течения в нем. В поле центробежных сил возникает тогда возмущение давления $\Delta p_* \sim \kappa u_*^2 \Delta y_*$, которое индуцирует скорость $w_* \sim \Delta p_*^{1/2}$. Оценки для Δp_* и w_* получены из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений Навье — Стокса, поэтому механизм конвекции является основным при зарождении вихрей.

Если вихри зарождаются в пристеночной части пограничного слоя с толщиной $\Delta y_* \sim a < \delta$, где завихренность течения наибольшая, а скорость u_* пропорциональна расстоянию от поверхности, то

$$u_* \sim a/\varepsilon, \quad \Delta p_* \sim \kappa a^3 \varepsilon^{-2}, \quad w_* \sim \kappa^{1/2} a^{3/2} \varepsilon^{-1} \quad (1.1)$$

В общем случае размеры a и c одинаковы по порядку величины и поэтому $a \sim c \sim \kappa b^2$

Оценки (1.1) и (1.2) позволяют ввести для вихревой области новые переменные и асимптотические разложения функций течения

$$x_* = bx, \quad y_* = \kappa b^2 y, \quad z_* = \kappa b^2 z \quad (1.3)$$

$$u_* = (\kappa b^2/\varepsilon) u + \dots, \quad v_* = (\kappa^2 b^3/\varepsilon) v + \dots$$

$$w_* = (\kappa^2 b^3/\varepsilon) w + \dots, \quad \Delta p_* \approx (\kappa^4 b^6/\varepsilon^2) p + \dots$$

где Δp_* отсчитывается от значения на поверхности в точке зарождения вихрей. Подстановка (1.3) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon < \kappa < 1$ показывают, что в общем случае $b \sim (\varepsilon/\kappa)^{3/5} < 1$ и развитие вихрей приближенно описывается параболизированными в продольном направлении уравнениями Навье — Стокса без градиента $\partial p/\partial x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial wv}{\partial z} + \kappa u^2 + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

На поверхности задаются условия прилипания и непротекания

$$u = v = w = 0 \quad (y = 0) \quad (1.5)$$

а внешние и начальные условия получаются из сращивания с течением в пристеночной части пограничного слоя

$$u \rightarrow Ay, \quad v, w \rightarrow 0, \quad p \rightarrow -A^2 \kappa y^3/3 \quad (x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \infty) \quad (1.6)$$

где A — градиент продольной компоненты скорости в пограничном слое на по-

верхности в точке зарождения вихрей. В поперечном направлении должно выполняться условие периодичности решения

$$u, v, w, p(x, y, z) = u, v, w, p(x, y, z + \lambda) \quad (1.7)$$

где λ — длина волны вихрей.

Краевая задача (1.4)—(1.7) описывает нелинейное развитие коротковолновых вихрей при $a \sim c \sim \epsilon^{6/5}/\kappa^{1/5} < \delta$ в пристеночной части пограничного слоя. Из его характеристик сюда входит только величина A , развитие вихрей происходит в плоскопараллельном потоке, так как на расстоянии $\Delta x_* \sim b \sim (\epsilon/\kappa)^{3/5} < 1$ несущественно продольное изменение функций течения в пограничном слое. При $(\epsilon/\kappa)^{3/5} < b < (\epsilon/\kappa)^{1/2}$ в (1.4) несущественны диссипативные члены, на поверхности задается только условие непротекания. Если же $\epsilon/\kappa^{1/2} < b < (\epsilon/\kappa)^{3/5}$, то в (1.4) несущественны конвективные члены. Но тогда исчезает механизм зарождения вихрей и становятся несправедливыми оценки (1.1) и (1.2).

Для дальнейшего удобно ввести нормированные переменные

$$x = A(\lambda/2\pi)^3 X, \quad y = (\lambda/2\pi) Y, \quad z = (\lambda/2\pi) Z \quad (1.8)$$

$$u = A(\lambda/2\pi)(Y + U), \quad v = (2\pi/\lambda)V, \quad w = (2\pi/\lambda)W$$

$$p = (2\pi/\lambda)^2(P - G_1 Y^3/6), \quad G_1 = 2A^2 K(\lambda/2\pi)^5$$

которые позволяют представить (1.4)—(1.7) в виде

$$U_x + V_y + W_z = 0 \quad (1.9)$$

$$[(Y + U)^2]_x + [V(Y + U)]_y + [W(Y + U)]_z = U_{yy} + U_{zz}$$

$$[(Y + U)V]_x + (V^2)_y + (WV)_z + G_1 YU + G_1 U^2/2 + P_y = V_{yy} + V_{zz}$$

$$[(Y + U)W]_x + (VW)_y + (W^2)_z + P_z = W_{yy} + W_{zz}$$

$$U = V = W = 0 \quad (Y = 0)$$

$$U, V, W, P \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow -\infty \text{ или } Y \rightarrow \infty)$$

$$U, V, W, P(X, Y, Z) = U, V, W, P(X, Y, Z + 2\pi)$$

В [1—4] получены численные и аналитические решения (1.9) в линейном приближении во всем диапазоне изменения локального числа Гертлера G_1 ; показано, что при $G_1 \approx 38,72$ инкремент роста амплитуды вихрей является наибольшим для всего диапазона длин волн существования вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости около вогнутой с постоянной кривизной поверхности.

2. Для приведения (1.9) к удобному для численного интегрирования виду из числа неизвестных исключается P и используется следующее представление:

$$U = U_0(X, Y) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(X, Y) \cos(nZ), \quad V = V_0(X, Y) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(X, Y) \cos(nZ) \quad (2.1)$$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(X, Y) \sin(nZ)$$

В [9] при исследовании развития длинноволновых вихрей получено, что амплитуда каждой последующей гармоники уменьшается примерно на порядок и поэтому можно ограничиться значением $n=3$. В настоящих расчетах для простоты используются только члены разложений (2.1) с индексами 0 и 1

$$U_{0x} + V_{0y} = 0, \quad U_{1x} + V_{1y} + W_1 = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
& [(Y + U_0)^2 + U_1^2/2]_X + [(Y + U_0) V_0 + U_1 V_1/2]_Y = U_{0YY} \\
& 2 [(Y + U_0) U_1]_X + [U_1 V_0 + (Y + U_0) V_1]_Y + (Y + U_0) W_1 = U_{1YY} - U_1 \\
& G_1 (Y + U_0) U_1 - 2 (U_1 V_{0Y})_{XY} + (U_1 V_0)_X + (U_1 V_0)_{XY} + V_0 W_1 + (V_0 W_1)_{YY} = \\
& = -V_1 + 2V_{1YY} - V_{1YYY} + 2[(Y + U_0) V_{1Y}]_{XY} - [(Y + U_0) V_1]_X - [(Y + U_0) V_1]_{XY} - 2(V_0 V_1)_Y \\
& U_0 = V_0 = U_1 = V_1 = V_{1Y} = 0 \quad (Y = 0) \\
& U_{0Y} = U_1 = V_1 = V_{1Y} = 0 \quad (Y \rightarrow \infty) \\
& U_0, V_0, U_1, V_1 \rightarrow 0 \quad (X \rightarrow -\infty)
\end{aligned}$$

В процессе счета будут определяться кинетические энергии отдельных гармоник

$$E_0 = \int_0^{\infty} (U_0^2 + V_0^2) dY, \quad E_1 = \int_0^{\infty} (U_1^2 + V_1^2 + W_1^2) dY \quad (2.3)$$

и их относительные скорости роста $\theta_n = E_{nX}/E_n$. Величина E_0 не имеет физического смысла, так как она не ограничена. Однако при численном счете верхний предел интегралов (2.3) представляет собой конечное значение координаты Y на внешней границе области интегрирования (2.2). Поэтому при численном счете величина E_0 будет ограничена, а θ_0 , как и θ_1 , будет иметь определенный физический смысл.

Краевая задача (2.2) является задачей параболического типа, численное решение которой может быть получено с помощью известных маршевых методов (см., например, [11]). Однако здесь нет никаких внешних возмущений типа заданного градиента давления, источника члена или нетривиальных краевых условий. Решение вырабатывается самими уравнениями при задании некоторого начального возмущения. В этом имеется значительное сходство (2.2) с задачами со взаимодействием [12], где начальное возмущение определяет вид общего решения. Поэтому здесь крайне необходимо правильное задание физически обоснованного начального возмущения [13].

Очевидно, в момент зарождения вихрей все возмущения функций течения малы и их развитие будет описываться линейным приближением (2.2). Легко убедиться, что тогда $U_0 = V_0 = 0$, а для компонент первой гармоники при использовании обычного их представления [14]

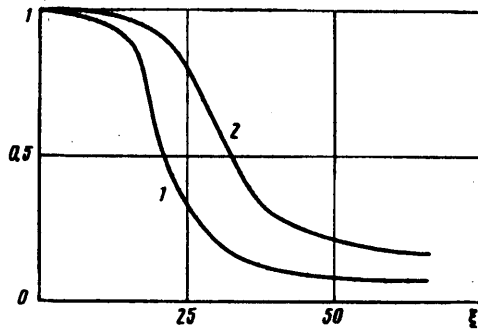
$$\{U_1, V_1, W_1\} = \alpha \exp(\beta X) \{U_{ef}(Y), V_{ef}(Y), W_{ef}(Y)\} \quad (2.4)$$

получается задача на собственные значения [1—4]. Ее решение при заданном значении G_1 позволяет найти величину инкремента роста амплитуды гармоники β и профили начальных возмущений U_{ef}, V_{ef}, W_{ef} , параметр α определяет амплитуду начального возмущения. Можно еще в уравнении для U_0 сохранить члены U_1^2 и $U_1 V_1$ и вычислить ненулевые начальные возмущения функций U_0 и V_0 , для которых возможно тогда представление

$$\{U_0, V_0\} = \alpha^2 \exp(2\beta X) \{U_{id}(Y), V_{id}(Y)\} \quad (2.5)$$

Описанная процедура решает вопрос получения нетривиальных начальных условий для (2.2). Из представлений (2.4) и (2.5) следует, что на линейном этапе развития вихрей $\theta_0 = 4\beta$ и $\theta_1 = 2\beta$. Продольная координата X не входит явно в краевую задачу (2.2), поэтому ее численное интегрирование можно начинать со значения $X = 0$, а амплитуды начальных возмущений (2.4) и (2.5) задавать с помощью коэффициента α .

Уравнения параболического типа для численного интегрирования обычно преобразуются с помощью переменных подобия, учитывающих изменение толщины возмущенной области $f(\xi)$ за счет действия диссипации



Фиг. 1

$$\xi = X, \eta = \frac{Y}{f(\xi)}, U_n = f(\xi) u_n(\xi, \eta), V_n = \frac{v_n(\xi, \eta)}{f(\xi)}, W_n = \frac{w_n(\xi, \eta)}{f^2(\xi)} \quad (2.6)$$

Из вида представлений (2.4) и (2.5) следует, что на начальной линейной стадии развития вихрей возмущения зарождаются в слое конечной толщины, т. е. при $f(\xi) \equiv 1$. Из сопоставления выражений для конвективных и диссипативных членов уравнений следует, что на нелинейной стадии развития вихрей толщина возмущенной области нарастает как $f(\xi) \sim \xi^{1/3}$ [15]. Между этими двумя участками должен располагаться переходный, на границах которого должны быть непрерывны значения f и f_ξ . В расчетах конкретный вид $f(\xi)$ подбирался так, чтобы координаты η для максимальных значений функций u_1 или v_1 оставались примерно постоянными при различных значениях ξ .

Необходимо отметить, что уравнения (2.2) в переменных (2.6) не приводятся к автомодельному виду, в них не пропадает зависимость решения от ξ и поэтому нет возможности представить их предельное решение при $\xi \rightarrow \infty$.

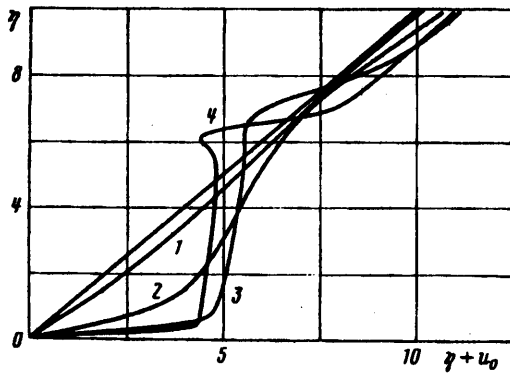
Для разностной аппроксимации (2.2) в переменных (2.6) использовалась схема первого порядка точности по $\Delta \xi$ и $\Delta \eta$ с учетом направления потока по вертикали [11].

3. Ниже представлены результаты расчетов для числа $G_1 = 2A^2 Re^3 (L/R) (\Lambda/2\pi\Delta)^5 (\Delta/L)^5 = 0,924$, которое является типичным для следующих значений параметров: $Re \approx 10^6$, $L/R \approx 0,1$, $A \approx 0,3$, $\Lambda/2\pi\Delta \approx 0,1$, $\Delta/L \approx 5/Re^{1/2}$ (Λ и Δ — размерные величины длины волны вихрей и толщины пограничного слоя); при этом $\beta = 0,2$. В расчетах принималось: $\Delta \xi = 0,015$, $\Delta \eta = 0,1$, $\eta_{max} = 20$, $\alpha = 0,3$ и

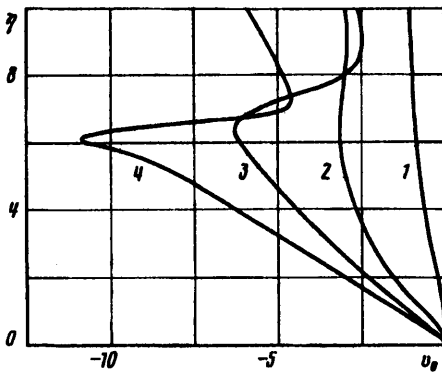
$$f(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq 15 \\ 1 + 0,00118 (\xi - 15)^{2/3}, & 15 \leq \xi \leq 33 \\ 1,16 (\xi - 27,9)^{1/3}, & 33 \leq \xi < \infty \end{cases}$$

На фиг. 1 показаны зависимости $\theta_0/4\beta$ и $\theta_1/2\beta$ (кривые 1 и 2 соответственно) от ξ . Видно, что при малых значениях ξ решение практически не отличается от линейного (зависимости (2.4) и (2.5)). Затем наступает нелинейное взаимодействие между возмущениями функций течения, которое значительно уменьшает скорость их роста; заметно, что для первой гармоники это влияние менее сильно, чем для возмущений основного потока. На большом удалении от точки зарождения вихрей относительные скорости роста кинетической энергии возмущений функций течения изменяются уже незначительно. Однако при этом сохраняется экспоненциальный характер роста возмущений, что приводит к значительному их увеличению.

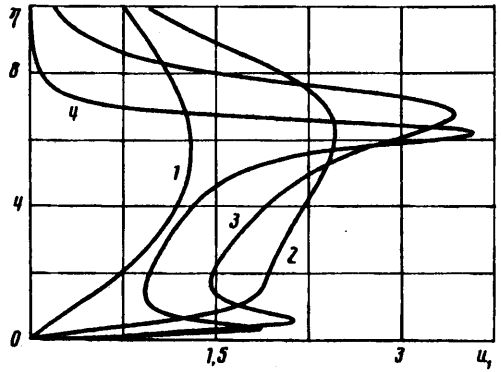
На фиг. 2—6 представлены профили функций $\eta + u_0$, v_0 , u_1 , v_1 и w_1 соответственно для значений $\xi = 18, 24, 30$ и 36 (кривые 1—4 соответственно). Профиль продольной компоненты скорости в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя является линейным (прямая на фиг. 2). На начальном участке развития



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

вихрей продольная компонента скорости изменяется незначительно (кривая 1). Нелинейный характер взаимодействия возмущений функций течения приводит к резкому искажению исходного профиля (кривые 2, 3): вблизи поверхности образуется слой с большим градиентом скорости, затем ее значение остается почти постоянным, а во внешней части течения градиент скорости приближается к своему асимптотическому значению. В дальнейшем нижняя часть профиля изменяется незначительно, в средней его части при $\eta \approx 6$ возникает дефект скорости (кривая 4) и фактически формируется ядро возмущенного потока с практически постоянным значением продольной компоненты скорости.

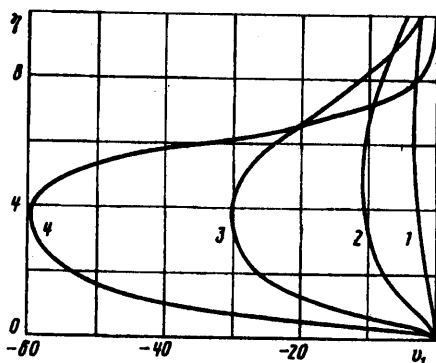
Вертикальная компонента скорости v_0 в невозмущенном потоке отсутствует. По мере нарастания вихрей жидкость начинает засасываться в вихревую область (кривые 1—4 на фиг. 3), что, как видно из профилей на фиг. 2, вызывает увеличение скорости в ядре этой области. Изломы профилей функции v_0 на фиг. 3 также указывают на формирование ядра области.

Нелинейное взаимодействие возмущений функций течения сильно искажает начальный профиль функции u_1 (кривые 1 и 2 на фиг. 4). Далее с ростом ξ формируется пик функции вблизи поверхности, затем следует значительный ее дефект, а на внешней границе ядра вихревой области располагается еще один пик функции (кривые 3 и 4).

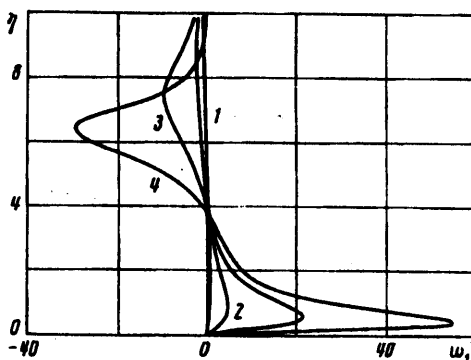
Профили функции v_1 (кривые 1—4 на фиг. 5) показывают, что с ростом ξ ее амплитуда сильно увеличивается, а распространение этой функции постепенно ограничивается ядром вихревой области.

Кривые 1—4 на фиг. 6 показывают, что с ростом ξ свои наибольшие значения функция w_1 принимает около границ ядра возмущенного потока.

Представленные на фиг. 1—6 результаты носят в основном качественный



Фиг. 5



Фиг. 6

характер, так как уже при $\xi = 36$ амплитуды первой гармоники достигают больших значений и, следовательно, использованное одномодовое приближение является очень грубым. Однако эти результаты позволяют представить влияние нелинейной фазы развития вихрей на основной поток и получить информацию для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголепов В. В., Дегтярев Л. М., Дроздова О. М., Липатов И. И. Асимптотическая структура вихрей Тейлора — Гертлера в пограничном слое: Препринт № 156. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1988. 26 с.
2. Тимошин С. Н. Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гертлера // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 32—41.
3. Боголепов В. В., Липатов И. И. Асимптотический анализ развития вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности: Препринт № 8. М.: ЦАГИ, 1990. 54 с.
4. Боголепов В. В., Липатов И. И. К асимптотической теории вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости // ПМТФ. 1992. № 3. С. 58—68.
5. Görtler H. Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden // ZAMM. 1941. V. 21. № 4. S. 250—252.
6. Hall P. Taylor — Görtler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech. 1982. V. 124. P. 475—494.
7. Hall P. On the non-linear evolution of Görtler vortices in non-parallel boundary layers // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 29. № 2. P. 173—196.
8. Hall P. The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid. Mech. 1983. V. 130. P. 41—58.
9. Hall P. The nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layers // J. Fluid. Mech. 1988. V. 193. P. 243—266.
10. Hall P., Lakin W. D. The fully nonlinear development of Görtler vortices in growing boundary layers // Proc. Roy. Soc. A. 1988. V. A415. № 1849. P. 421—441.
11. Patankar S. V. Numerical heat transfer and fluid flow. Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1980. 197 p.
12. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ, 1974. Вып. 1529. 124 с.
13. Kalburgi V., Mangalam S. M. A comparative study of theoretical methods on Görtler instability // AIAA Pap. 1988. № 407. P. 1—10.
14. Smith A. M. O. On the growth of Taylor — Görtler vortices along highly concave walls // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13. № 3. P. 233—262.
15. Боголепов В. В., Липатов И. И. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя с взаимодействием // ПМТФ. 1982. № 4. С. 60—65.