

УДК 532.526:678.027

© 1994 г. Р. В. КОВАЛЕВ, В. В. ЛУНЕВ

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОЙ ДЛИНЫ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКОЙ НИТИ, ВЫТЯГИВАЕМОЙ ИЗ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Исследуется процесс теплообмена на тонкой нити, вытягиваемой из полупространства. На основе полученных автомодельных решений с использованием метода «эффективной длины» определяются величины коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тонкой нити переменного радиуса с распределенными температурой и скоростью поверхности. Сравнение результатов, полученных по данной приближенной методике, с результатами численных расчетов уравнений пограничного слоя демонстрирует их хорошее совпадение.

Рассматриваемая задача имеет отношение к процессу формирования нитей химических волокон, выдавливаемых (вниз) или вытягиваемых из некоего, нагретого (до $T \approx 300^\circ \text{C}$), резервуара через фильеру — решетчатое доннышко с малыми отверстиями (диаметром $2R_0 \sim 200 \text{ мк}$). При этом под действием силы тяжести или тянущего усилия нить ускоряется, уменьшаясь в диаметре (до $R \approx 5 - 20 \text{ мк}$). Нити остывают за счет теплообмена с внешним воздухом, что играет принципиальную роль в процессе их формирования, поскольку вязкость расплава экспоненциально растет с падением его температуры и весьма чувствительна к небольшим относительным ее изменениям. Это свойство остывающих нитей предъявляет довольно высокие требования к точности расчета их теплового режима, а поскольку эта задача является в прикладном плане лишь составной частью общей задачи расчета процесса формирования нитей, метод ее решения должен быть в то же время по возможности проще.

Как показал опыт решения газодинамических задач пограничного слоя, таким требованиям удовлетворяют различные варианты удачно сконструированных методов эффективности длины (или локального подобия [1, 2]), в которых при заданной толщине пограничного слоя профили величин в нем и локальные законы теплообмена или трения берутся из подходящего автомодельного решения, а толщина пограничного слоя δ определяется методом интегральных соотношений.

Специфика данной задачи состоит в малости толщины нити по сравнению с толщиной пограничного слоя, что должно учитываться базовым автомодельным решением; таковым оказалось найденное в работе решение для тонкой нити степенной формы. Сравнение с точным решением погранслоевой задачи показало хорошую точность предлагаемого метода, значительно лучшую по сравнению с даваемой распространенными ранее для этих целей простыми формулами или приближенными методами [1].

При вертикальном движении нагретых нитей могут проявляться эффекты плавучести газа. Задача, возникающая при строгом учете эффектов конвекции, является существенно более сложной и поэтому здесь не рассматривается.

1. Будем рассматривать пограничный слой на нити несжимаемым и пренебрежем диссипацией энергии в нем. Нить предполагается непроницаемой с заданным распределением формы $r = R(x)$ и скорости $U(x)$ ее движения вдоль продольной координаты x (обычно эти величины связаны уравнением расхода материала нити $R^2 U \approx \text{const}$). В принятых предположениях задача сводится к

решению системы уравнений пограничного слоя со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial (r\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (r\rho V)}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho V \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho V \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1.3)$$

$$r = R(x): u = U(x), \quad V = U(x) \frac{dR}{dx}, \quad T = T_w(x) \quad (1.4)$$

$$r = R + \delta(x): u = 0, \quad T = T_\delta = \text{const}$$

Здесь x, r — координаты в осевом и радиальном направлениях соответственно; u, V — соответствующие компоненты скорости газа; T — температура, $\mu(T)$ — динамическая вязкость; $\rho(T)$ — плотность воздуха; Pr — число Прандтля ($Pr = \mu c_p / \lambda$); индекс w относится к параметрам на поверхности нити; δ — k параметрам на внешней границе пограничного слоя.

Перейдем к обобщенным переменным Дородницына и безразмерным функциям, предположив постоянным произведение $\mu\rho = \mu_w\rho_w$

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{U(x)}{\mu_w x} \int_{R(x)}^r \rho r dr = \frac{U(x)}{\mu_w x} \left(\int_R^r \rho r dr + \rho_w \frac{R^2}{2} \right) \quad (r < R, \rho = \rho_w) \quad (1.5)$$

$$f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U(\xi)}, \quad \theta = \frac{T - T_\delta}{T_w(\xi) - T_\delta}, \quad Re = \frac{UR\rho_w}{\mu_w}$$

$$(2\eta f_{\eta\eta})_\eta + ff_{\eta\eta} = f_{\eta\eta} \frac{d \ln(U)}{d \ln(\xi)} + \xi (f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{2}{Pr} \eta \theta_{\eta\eta} + f\theta_\eta \right)_\eta = f_{\eta\theta} \frac{d \ln(T_w - T_\delta)}{d \ln(\xi)} + \xi (f_\eta \theta_{\eta\xi} - f_\xi \theta_{\eta\eta}) \quad (1.7)$$

$$\eta = \eta_0 = \frac{U(\xi) R(\xi)^2}{2\nu x}: \quad f_\eta(\eta_0) = 1, \quad \theta(\eta_0) = 1 \quad (1.8)$$

$$\eta = \eta_0 = \frac{U(\xi) \delta}{\mu_w x} \int \rho r dr: \quad f_\eta = 0, \quad \theta = 0$$

Здесь $\delta(x)$ — местная толщина пограничного слоя.

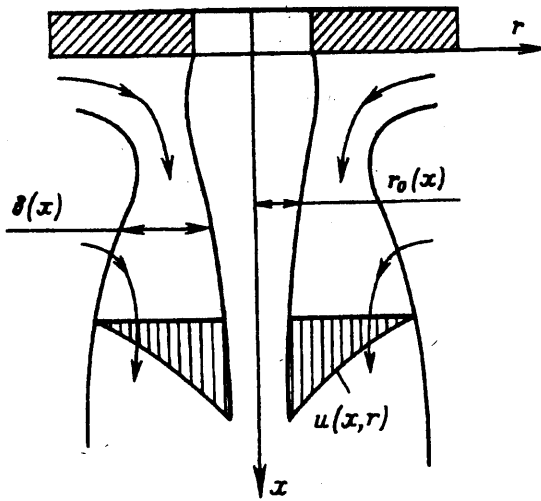
Для постановки начальных условий данной параболической задачи примем, что в начальном сечении

$$\xi = 0: \quad \delta = 0, \quad f = f_\eta = \theta = 0, \quad \eta > \eta_0; \quad f_\eta = \theta = 1, \quad \eta = \eta_0 \quad (1.9)$$

Вследствие влияния стенки фильеры предположение о нулевой начальной толщине пограничного слоя является несправедливым (фиг. 1) и течение в подфильерной области следует рассматривать в рамках полных уравнений Навье—Стокса.

2. Уравнения (1.6)—(1.7) имеют простое автомодельное решение при $U = \text{const}, T_w = \text{const}, R \sim \sqrt{\xi}$ (тонкий параболаид с изотермической поверхностью, движущийся с постоянной скоростью). Это решение не зависит от продольной координаты ξ и удовлетворяет уравнениям и граничным условиям

$$(2\eta f_{\eta\eta})_\eta + ff_{\eta\eta} = 0 \quad (2.1)$$



Фиг. 1

$$\left(\frac{2}{Pr} \eta \theta_\eta \right)_\eta + f \theta_\eta = 0 \quad (2.2)$$

$$\eta = \eta(\delta) = \eta_0; \quad f_\eta = 0, \quad \theta = \theta; \quad \eta = \eta_0 = \text{const}; \quad f_\eta = 1, \quad \theta = 1, \quad f = f_0 \quad (2.3)$$

Решение этой системы уравнений зависит лишь от одного параметра ν_0 и может быть легко найдено численно. Однако хорошие результаты дает и приближенное решение, в котором функция f раскладывается в степенной ряд в окрестности стенки $f = \eta + 0,5(\eta - \eta_0)^2 + \dots$ и затем подставляется в нелинейный член уравнения движения. Тогда решение уравнения движения (2.1) имеет вид

$$f_\eta = \frac{u}{U} = \frac{E_i(\eta/2)}{E_i(\eta_0/2)}, \quad E_i(\zeta) = \int_\zeta^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (2.4)$$

Здесь E_i — интеграл Эйлера.

Сравнение приближенного решения (2.4) с точным решением (кривая 2, фиг. 2) показывает, что в диапазоне изменения $10^{-3} < \nu_0 < 10^{-1}$ решения приближенным и точным методами оказываются близкими (на фигурах $\alpha^* = \alpha/c_p$ — коэффициент теплообмена). В случае необходимости уточнения результатов это решение может быть использовано для вычисления дальнейших приближений методом последовательной линеаризации.

С учетом (2.4) коэффициент трения на стенке оказывается равным

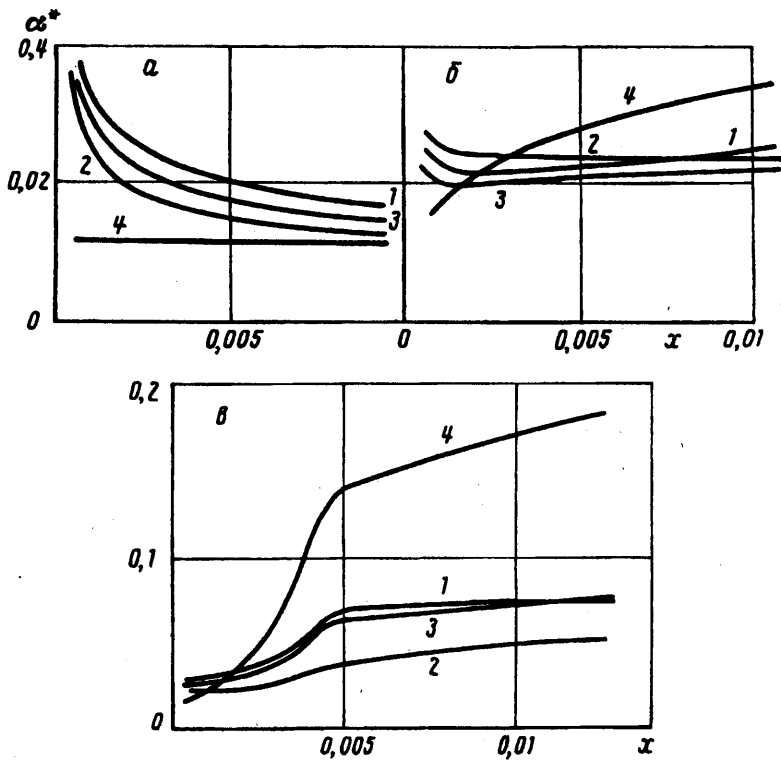
$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho_w U^2} = \frac{2}{Re} (f_{\eta\eta})_{\eta=\eta_0} \sim \frac{1}{Re} \frac{\exp(-\eta/2)}{E_i(\eta_0/2)}, \quad Re = \frac{UR\rho_w}{\mu_w} \quad (2.5)$$

$$c_f = \frac{1}{Re} \frac{1}{\gamma - \ln(\eta_0)} (\gamma = 0,5772 + \ln(2)), \quad \eta_0 \ll 1 \quad (2.6)$$

При известной функции f легко может быть проинтегрировано уравнение энергии (2.2)

$$\theta = c \int_{\eta_0}^{\infty} f \frac{Pr}{\eta} \eta^{Pr-1} d\eta, \quad c^{-1} = \int_{\eta_0}^{\infty} f \frac{Pr}{\eta} \eta^{Pr-1} d\eta \quad (2.7)$$

Для значения числа Стантона получается зависимость



Фиг. 2

$$St = \frac{q_w}{\rho_w U c_p (T_\delta - T_w)} = 2C \frac{(f_{\eta\eta})_{\eta=\eta_0}^{Pr}}{Pr Re}, \quad (2.8)$$

При $Pr = 1$ выполняется условие существования интеграла Крокко и

$$St = \frac{2}{Re} (f_{\eta\eta})_{\eta=\eta_0} = c_f, \quad (2.9)$$

Полученное автомодельное решение может быть использовано для определения величин трения и теплового потока на тонкой нити как непосредственно, так и в качестве базового в методе эффективной длины.

3. В общем случае для получения распределения тепловых потоков вдоль образующей нити $q_w(x)$ найдем толщину потери энергии из интегрального уравнения энергии. Для тонкого осесимметричного тела с образующей $R(x)$, скоростью поверхности $U(x)$ и температурой стенки $T_w(x)$ это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{RU} \frac{d(RU\Delta)}{dx} + \frac{1}{T_w - T_\delta} \frac{d(T_w - T_\delta)}{dx} \Delta = -St \quad (3.1)$$

$$\Delta = \int_R^\infty \frac{r u \rho}{RU \rho_w} \frac{T - T_\delta}{T_w - T_\delta} dr$$

Здесь Δ — толщина потери энергии.

Это уравнение содержит, вообще говоря, два неизвестных: Δ и St , и может быть решено при условии, что известна зависимость $St = St(\Delta)$. Наиболее эффективным предположением (как показывает опыт использования различных интегральных подходов) является предположение, что эта зависимость совпадает

с аналогичным соотношением для автомодельной задачи, т. е. является универсальной.

Рассмотрим это уравнение для указанной выше автомодельной задачи о тонкой параболической нити ($R \sim \sqrt{x}$)

$$\frac{d\Delta}{dx} + \frac{1}{r_0} \frac{dr}{dx} \Delta = \frac{d\Delta}{dx} + \frac{\Delta}{2x} = -St \quad (3.2)$$

и, учитывая (2.8), получим $St = \Delta/x = \sqrt{A/Re}$ (A — константа, определенная ниже).

Выражая это соотношение в критериальной форме, имеем

$$St Re_\Delta = A, \quad Re_\Delta = \frac{U\Delta\rho}{\mu_w}, \quad A = \frac{C^2 (f_{\text{тп}}\eta)_{\eta=\eta_0}^{2Pr}}{2\eta_0 Pr^2} \quad (3.3)$$

Предполагая, что зависимость (3.3) носит универсальный характер, для произвольных $R(x)$, $U(x)$ и $T_w(x)$ из (3.1) получим, что распределение толщины потери энергии для такого тела должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d\Delta}{dx} + \Delta \frac{d}{dx} (\ln [RU \{T_w - T_\delta\}]) = \frac{A}{Re_\Delta} = \frac{\mu_w A}{\Delta U \rho_w} \quad (3.4)$$

Интегрируя это уравнение и вводя понятие эффективной длины x_{ef} (такую, что $A/Re_\Delta = St = \sqrt{A/Re_{x_{ef}}}$), получим соотношения

$$x_{ef} = \frac{2}{R^2 U (T_w - T_\delta)^2} \int_0^x R^2 U (T_w - T_\delta)^2 dx, \quad St \sqrt{Re_{x_{ef}}} = \sqrt{A} \quad (3.5)$$

Использование формул (3.5) совместно с формулами автомодельного профиля позволяет быстро и эффективно определять величины тепловых потоков на тонких нитеобразных телах, что является особо полезным при проведении массовых инженерных расчетов. Например, в [3] впервые было указано на отличие данной задачи от классической задачи о пограничном слое на полубесконечном теле. В [4] исследовалось течение в пограничном слое на плоскости, вытягиваемой в полупространство, а в [5] та же задача решалась для тонкого цилиндра. В обоих случаях решение проводилось на основе интегрального метода типа метода Польгаузена с аппроксимацией профиля скорости либо полиномом 4-й степени (в случае плоскости), либо логарифмическим профилем (в случае тонкого цилиндра). На основе сравнения с численным решением уравнений пограничного слоя показано удовлетворительное согласование приближенного решения с точным. В работе [6] интегральный метод Польгаузена применялся для более широкого круга задач. Однако из-за своей громоздкости и недостаточной точности в настоящее время подобные методы практически не используются, а предпочтение отдается гораздо более эффективным методам локального подобия типа метода эффективной длины.

Для проверки применимости данной методики к расчету теплообмена и трения на реальной формирующейся нити исходная система уравнений (1.6)—(1.7) была решена конечно-разностным методом.

На фиг. 2 представлены результаты расчетов коэффициента теплообмена $\alpha^* = \alpha/c_p = q_w(x)/(i_\delta - i_w(x))$ вдоль образующей нити при условиях, близких к реальным промышленным условиям. Фигура 2, а и б соответствует следующим параметрам нити:

$$R = R_0 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad U = U_0 = 0,89 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}, \quad T_w - T_\delta = 320^\circ$$

$$R_0 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad U = U_0 \left(1 + 0,99 \frac{x}{R}\right), \quad T_w - T_\delta = 320 \left(1 - 0,01 \frac{x}{R}\right)$$

Для фиг. 2, в распределение температуры и скорости поверхности совпадает с приведенным выше, а радиус нити задается следующим образом:

$$x < 20R_0: R = \frac{0,9}{400} R_0 \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 - \frac{0,9}{10} R_0 \left(\frac{x}{R_0} \right) + R_0$$

$$x > 20R_0: R = 0,1 R_0$$

Кривые 1—4 на этих фигурах получены следующим образом: 1 — конечно-разностный метод, 2 — расчет по разработанному приближенному методу, 3 — по методу эффективной длины, 4 — расчет по широко используемой эмпирической формуле [1]

$$\frac{\alpha}{c_p} = \frac{0,235\lambda (2Re)^{0,3}}{2r_0}$$

В отличие от кривых 4 кривые 3 достаточно близки к точным.

Полученные результаты наглядно демонстрируют преимущество разработанной приближенной методики расчета: при своей принципиальной простоте она гораздо лучше согласуется с точным решением, учитывая целый ряд качественных эффектов, отсутствующих в эмпирических зависимостях типа вышеприведенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высокоскоростное формирование волокон. М.: Химия, 1988. 483 с.
2. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975. 623 с.
3. Sakiadis B. C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: 1. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow//A. I. Ch. E. Journal. 1961. V. 7. № 1. P. 27.
4. Sakiadis B. C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: 2. The boundary layer on a continuous flat surface//A. I. Ch. E. Journal. 1961. V. 7. № 2. P. 221—225.
5. Sakiadis B. C. Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: 3. The boundary layer on a continuous cylindrical surfaces//A. I. Ch. E. Journal. 1961. V. 7. № 4. P. 371—374.
6. Белозеров Б. П., Весновский А. К., Сохацкий В. С. К вопросу о гидродинамическом и тепловом взаимодействии нитей с воздухом в подфильерной зоне при их формировании их расплава полимеров//Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1980. С. 64—70.

Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1992