

УДК 532.546

© 1994 г. Д. В. САДИН

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

Исследуется неустановившееся фильтрационное течение газа, описываемое уравнениями движения, предложенными С. А. Христиановичем в [1]. Показано, что критический режим течения порового газа наступает, когда приведенная скорость (отношение скорости течения к скорости распространения малых фильтрационных возмущений в данной точке потока), представляющая собой аналог числа Маха в газовой динамике, меньше единицы.

1. Неустановившееся одномерное фильтрационное течение совершенного газа в пористой нетеплопроводной среде с неизменной пористостью описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии [2]

$$\frac{d \ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\epsilon^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f_1 \quad (1.1)$$

$$\frac{d \ln T}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \epsilon^2 u \frac{\partial p}{\partial x} + \kappa f \right]$$

$$p = \rho R T$$

где p , ρ , T , u — давление, плотность, температура и скорость порового газа, κ — показатель адиабаты, ϵ^2 — постоянная ($\epsilon^2 \ll 1$). Величины f_1 , f связаны с вязкой составляющей межфазной силы

$$f_1 = \frac{\mu m}{\rho \chi} u + \frac{m^2}{\lambda} u^2, \quad f = j_1 \rho$$

где m — пористость среды, μ — динамическая вязкость порового газа, χ , λ — постоянные, имеющие размерности площади и длины соответственно.

Из уравнения состояния совершенного газа (1.1) следует, что индивидуальные производные логарифмов параметров связаны соотношением $d \ln p / dt = d \ln \rho / dt + d \ln T / dt$. Подставляя это соотношение в уравнение сохранения массы, с учетом третьего уравнения (1.1) получим следующую систему:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial p}{\partial x} + a^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi \quad (1.2)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{\epsilon^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -f_1$$

$$\frac{d \ln T}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \epsilon^2 u \frac{\partial p}{\partial x} + \kappa f \right]$$

$$\varphi = (\kappa - 1) \kappa f, \quad \alpha = \kappa - \epsilon^2 (\kappa - 1)$$

где α — безразмерная постоянная, $a = \sqrt{\kappa p / \rho}$ — скорость звука в поровом газе при постоянной энтропии.

Определим характеристики системы (1.2), для чего определитель, составленный из коэффициентов

при частных производных системы, дополненной уравнениями $dp = dt \partial p / \partial t + dx \partial p / \partial x$, $du = dt \partial u / \partial t + dx \partial u / \partial x$, $d \ln T = \partial t \partial \ln T / \partial t + dx \partial \ln T / \partial x$, должен быть равен нулю

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha u & 0 & a^2 p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{p} & 1 & u & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa-1}{\kappa p} & -\frac{\varepsilon^2 u (\kappa-1)}{\kappa p} & 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx \end{pmatrix} = 0$$

Раскрывая данный определитель, имеем три уравнения характеристик

$$C_0 = u, \quad C_{\pm} = \frac{u}{2} (1 + \alpha) \pm c \sqrt{\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1}$$

где $c = a\varepsilon$ — скорость распространения малых фильтрационных возмущений, $N = u/c$ — приведенная скорость, аналог числа Маха в газовой динамике. Поскольку величина под корнем положительная и характеристики вещественны и различны, система уравнений неустойчившегося фильтрационного течения является гиперболической для $\kappa > 0$.

2. Сравним значения характеристик C_+ , C_- с величинами $u + c$, $u - c$ для заданной точки течения, приняв для определенности $u > 0$, $\kappa > 1$

$$z_1 = C_+ - u - c = \frac{u}{2} (\alpha - 1) + c \left(\sqrt{\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1} - 1 \right)$$

$$z_2 = C_- - u + c = \frac{u}{2} (\alpha - 1) + c \left(1 - \sqrt{\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1} \right)$$

Поскольку из $\alpha > 1$ следует, что $(\alpha - 1)/2 > 0$, а величина под корнем больше единицы, то $z_1 > 0$, $C_+ > u + c$. Разделив левую и правую части второго уравнения на c , получим

$$\frac{z_2}{c} = \left[\frac{N}{2} (\alpha - 1) + 1 \right] - \sqrt{\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1}$$

Так как первое и второе выражения в правой части положительны, сравним их отношение

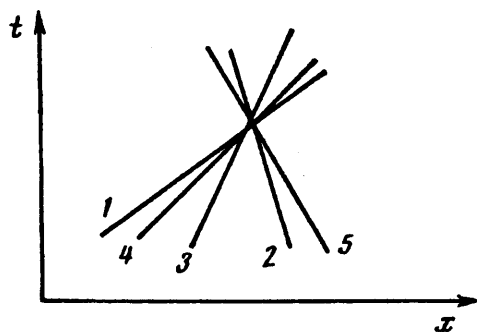
$$\begin{aligned} & \left[\frac{N}{2} (\alpha - 1) + 1 \right] / \sqrt{\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1} = \\ & = \sqrt{\left[\frac{N^2}{4} (\alpha - 1)^2 + \frac{N}{2} (\alpha - 1) + 1 \right] / \left[\frac{N^2}{4} (1 - \alpha)^2 + 1 \right]} > 1 \end{aligned}$$

Следовательно, $z_2/c > 0$, а с учетом того, что $c > 0$, $z_2 > 0$, то и $C_- > u - c$.

Очевидно, что $C_+ > u$, $C_- < u$. Характеристики и величины u , $u + c$, $u - c$ представлены на фигуре линиями 1—5.

Проведенный анализ показывает, что волны сжатия (характеристика C_+) распространяются быстрее, чем если бы они распространялись по аналогии с газовой динамикой как сумма скорости течения и скорости распространения малых возмущений, а волны разрежения медленнее.

Определим соотношение между скоростью течения и скоростью распространения малых фильтрационных возмущений на критическом режиме, т. е. когда возмущения впереди по потоку не



оказывают влияния на параметры фильтрационного течения газа в некоторой точке. В этом случае необходимо положить равной нулю C_-

$$\frac{u_*}{2}(1 + \alpha) - c \sqrt{\frac{N_*^2}{4}(1 - \alpha)^2 + 1} = 0$$

После преобразований имеем $N_* = \alpha^{-1/2}$ — приведенную скорость на критическом режиме течения в заданной точке. Следовательно, для показателя адиабаты $\kappa > 1$ величина $\alpha > 1$ и $N_* < 1$ ($u_* < c$).

Таким образом, если неустановившаяся одномерная фильтрация газа с показателем адиабаты $\kappa > 1$ подчиняется уравнениям движения (1.2), то, во-первых, принцип суперпозиции течения и распространения малых фильтрационных возмущений не является справедливым; во-вторых, получено выражение для приведенной скорости на критическом режиме, причем эта величина меньше единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Христианович С. А. Неустановившееся течение жидкости и газа в пористой среде при резких изменениях давления во времени или больших градиентах пористости // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1985. № 1. С. 3—18.
2. Христианович С. А. Об основах теории фильтрации // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1991. № 1. С. 3—18.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
17.XI.1992