МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1994

УДК 533.7:517.958

 В. С. ГАЛКИН, Н. К. МАКАШЕВ

О КИНЕТИЧЕСКОМ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ ЛЕГКИХ И ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

Рассмотрен вывод методами кинетической теории уравнений газовой динамики многокомпонентных смесей частиц с резко различающимися массами и замороженными внутренними степенями свободы. Установлено, что макроскопическое описание может быть односкоростным и двухтемпературным. Особенностью является необходимость использования многоскоростного решения уравнений Больцмана для тяжелых компонентов, а также способ введения их эффективной температуры. Дана соответствующая модификация обобщенного метода Чепмена — Энскога. Показано, что соотношения Стефана — Максвелла имеют смысл локальных соотношений для диффузионных скоростей компонентов при переходе от многоскоростного решения кинетических уравнений к односкоростному макроскопическому описанию. Рассчитаны в произвольном приближении по полиномам Сонина переносные свойства, обменные слагаемые и соотношения Стефана — Максвелла в системе уравнений газодинамики, записанных в приближении Навье — Стокса. Рассмотрена критика обобщенного метода Чепмена — Энскога, даны необходимые разъяснения.

Течения газовых смесей из молекул сравнимых масс при числах Кнудсена $\mathrm{Kn} \ll 1$ описываются макроскопическими уравнениями для плотности ρ, массовых концентраций $Y_N = \rho_N/\rho$, среднемассовой скорости $\mathbf{u}$ и температуры смеси T. Индекс $N = 1, 2, \ldots, S$ обозначает сорт частиц, S — число компонентов. Систему уравнений для макропараметров $\Gamma_S \equiv (\rho, Y_N, \mathbf{u}, T)$ называют односкоростной и однотемпературной. Переносные свойства $\Gamma_f \equiv (\mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{V}_N)$, где $\mathbf{P}$ — тензор напряжений, $\mathbf{q}$ — поток тепла и $\mathbf{V}_N$ — диффузионные скорости, выражаются через Γ_S, $\nabla\Gamma_S$ и т. д. с помощью локальных соотношений, вид которых зависит от приближения по числу Kn. Наличие таких связей — следствие того, что в уравнениях переноса для Γ_f при $\mathrm{Kn} \ll 1$ присутствуют большие по модулю моменты интегралов столкновений. Для Γ_S аналогичные члены равны нулю. Поэтому Γ_S иногда называют «медленными», а Γ_f — «быстрыми» переменными.

В смесях легких и тяжелых компонентов (назовем их ε-смесями) действуют дополнительные факторы: замедленный обмен энергией в столкновениях легких и тяжелых частиц, большая инерция последних. На первый взгляд, это дает основания расширить группу макропараметров Γ_S, включив в нее температуры T_N и средние скорости $\mathbf{u}_N$ компонентов. На такое макроскопическое описание опирается, например, механика многофазных сред [1]. Соответствующие обобщения уравнений газодинамики предлагались и использовались в работах [2—12] и т. д.

Для вывода таких уравнений на базе кинетической теории сначала в основном применялся метод моментов Грэда — Максвелла [2—9], однако из-за сложности вычислений решения кинетических уравнений ограничивались низшими приближениями по ортогональным полиномам и в силу этого обладали недостаточной точностью в определении переносных свойств.

Модификации методов Гильберта и Чепмена — Энскога сначала применялись к двухтемпературной бинарной смеси при сравнимых молярных концентрациях компонентов [13—16]. Предложенный в [17, 18] и развитый в [19—22] обобщенный метод Чепмена — Энскога, ориентированный на смесь с произвольным отношением концентраций, использовался в [11, 12] при выводе в приближении Эйлера многотемпературных уравнений реагирующей ε-смеси, а в [23] — для получения в навье-стоксовском приближении уравнений двухскоростной двухтемпературной газодинамики бинарной ε-смеси с вычислением коэффициентов переноса в низших приближениях по полиномам Сонина. В [24] аналог обобщенного метода Чепмена — Энскога в варианте [20] применен для получения коэффициентов переноса в произвольном приближении по ортогональным полиномам, но в предположении о малости различий между скоростями и температурами компонентов.

В обобщенном методе Чепмена — Энскога функции распределения f_N разлагаются в ряды относительно максвеллианов $f_N^{(0)}$, рассчитываемых по температурам T_N и средним скоростям $\mathbf{u}_N$ компонентов смеси. Этот метод кроме большей общности решения для f_N обладает и большей вычислительной эффективностью по сравнению с классическим методом Чепмена — Энскога [25]. В случае ε-смеси общий алгоритм метода может быть упрощен в рамках точности макроскопического описания.

Наиболее подробно изучены бинарные ε-смеси. При большой разнице в массах частиц смеси время релаксации разности температур ее компонентов может быть равным по порядку величины макроскопическому времени τ. Поэтому здесь на временах порядка τ имеем $(T_1 - T_2)/(T_1 + T_2) \lesssim 1$. Однако время релаксации разности средних скоростей компонентов по порядку величины равно времени максвеллизации одной из функций f_N. Поэтому можно предположить, что в условиях применимости макроскопического описания газодинамика бинарной ε-смеси может быть односкоростной в силу существования в этих условиях локального соотношения для вычисления разности скоростей компонентов (аналогично обычной смеси). К такому выводу пришли авторы [26, 27], рассмотревшие пространственно однородную задачу с начальными условиями на средние скорости и температуры бинарной смеси. Тем не менее двухскоростные (двухжидкостные) модели могут быть полезными, расширяя область применимости макроскопического описания. Поэтому они получили весьма широкое применение (например, [9, 24]).

Важной особенностью бинарной ε-смеси является то, что в области применимости макроописания при сравнимых Y_N (а также меньшей массовой концентрации тяжелых частиц) диффузионная скорость тяжелого компонента может быть большей или порядка его средней тепловой скорости [12, 23]. Поэтому соответствующий максвеллиан не линеаризуется по диффузионной скорости и для решения системы уравнений Больцмана при $\mathrm{Kn} \ll 1$ необходим характерный для обобщенного метода Чепмена — Энскога многоскоростной подход, когда функции $f_N^{(0)}$ зависят от $\mathbf{u}_N$.

Подчеркнем, что переносные свойства бинарной ε-смеси не были рассчитаны в произвольном приближении по полиномам Сонина для любых Y_N.

Цель данной статьи состоит в обобщении вывода уравнений переноса в приближениях Эйлера и Навье — Стокса на случай многокомпонентной смеси из двух групп резко различающихся по массе частиц (легких и тяжелых) в произвольном приближении по полиномам Сонина и для любых отношений концентраций. По определению, уравнения в приближении Эйлера получаются при $f_N = f_N^{(0)}$. В приближении Навье — Стокса переносные свойства включают в себя линейные по градиентам медленных макропараметров слагаемые. Системы уравнений переноса включают в себя также записанные в тех же приближениях локальные соотношения для быстрых макропараметров — диффузионных скоростей компонентов, от которых явно зависят многоскоростные решения для функций распределения f_N.

Конечная цель работы — вывод уравнений переноса многокомпонентной ε-смеси, предельно упрощенных в рамках точности макроскопического описания и содержащих главные слагаемые переносных свойств и обменных членов для основных классов течений.

1. Рассмотрим свойства решений кинетических уравнений для многокомпонентных ε-смесей при Kn << 1. Пусть в смеси массы частиц m_N и сечения их столкновений друг с другом σ_{NK} удовлетворяют условиям

$$m_\alpha \sim m, \quad m_i \sim M, \quad \varepsilon \equiv (m/M)^{1/2} \ll 1 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \sim \sigma_m, \quad \sigma_{ij} \sim \sigma_{i\alpha} \sim \sigma_{\alpha i} \sim \sigma_M, \quad \sigma_m = F(\varepsilon)\,\sigma_M, \quad F(\varepsilon) \lesssim 1$$

Здесь и далее относящиеся к S_m легким компонентам величины обозначаются нижними индексами из греческих букв, величины, относящиеся к $S_M = S - S_m$ тяжелым компонентам,— индексами из малых латинских букв. С аналогичными целями используются также нижние индексы m и M. В общих выражениях сохраняются индексы из больших латинских букв N, K, $L = 1, \ldots S$.

Для смесей инертных газов $F(\varepsilon) \sim \varepsilon$ [28, 29], в молекулярных двухатомных газах $F(\varepsilon) \sim 1$ [28—30]. В случае смеси газов с мелкодисперсной примесью $F(\varepsilon) \infty \varepsilon^\gamma$, $1 < \gamma < 3/2$ [23].

Введем масштаб течения L, число Маха $M_0 = u/a$ и определяющий состав смеси параметр

$$\delta \sim \frac{n_M}{n_m}, \quad n_M \equiv \sum_{i=1}^{S_M} n_i, \quad n_m \equiv \sum_{\alpha=1}^{S_m} n_\alpha, \quad n = n_m + n_M$$

Здесь a — равновесная скорость звука

$$a \sim c_M^T \sqrt{(\delta + 1)/(\delta + \varepsilon^2)}, \qquad c_M^T = \sqrt{2kT_*/M} = \varepsilon c_m^T$$

$\mathbf{u}$ — среднемассовая скорость, n_N — числовая плотность частиц сорта N, k — постоянная Больцмана, $T_* \sim T_N$ — характерное значение температуры смеси.

С помощью разложения интегралов перекрестных столкновений по степеням ε [23, 31] и громоздкого совместного анализа кинетических уравнений для f_N и уравнений переноса для $\mathbf{u}_N$, T_N аналогично [12, 23] можно установить следующие свойства течений ε-смесей (1.1).

1. Для произвольных значений δ макроскопическое описание применимо (т. е. f_N близки соответствующим максвеллианам $f_N^{(0)}$), если

$$\mathrm{Kn} \sim (n\sigma_M L)^{-1} \ll \mathrm{Kn}_*(M_0, \delta, F(\varepsilon)) \tag{1.2}$$

Вид функции $\mathrm{Kn}_*(M_0, \delta, F(\varepsilon))$ установлен в [12, 23] и показан на фиг. 1 сплошной кривой для $M_0 \sim 1$, $F = 1$ и штриховыми кривыми для $u \sim c_M^T$, $F = 1$. В тех же обозначениях функция $\mathrm{Kn}_*(M_0, \delta, \varepsilon)$ дана на фиг. 2.

2. В случае (1.2) конечная разница в температурах компонентов может существовать тогда, когда состав смеси и масштаб течения удовлетворяют условиям

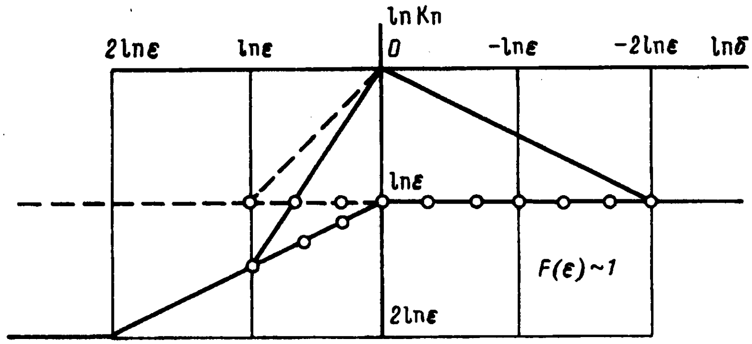
$$\varepsilon \ll \delta \ll F(\varepsilon)\,\varepsilon^{-2} \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Kn}_{**}(M_0, \delta, F(\varepsilon)) \lesssim \mathrm{Kn} \tag{1.4}$$

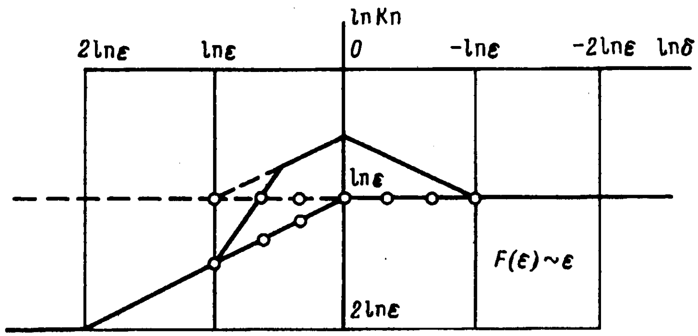
Функции $\mathrm{Kn}_{**}(M_0, \delta, 1)$ и $\mathrm{Kn}_{**}(M_0, \delta, \varepsilon)$ показаны на фиг. 1, 2 при $M_0 \sim 1$ и $u \sim c_M^T$ сплошной и штриховыми кривыми с точками соответственно.

3. В условиях (1.2) справедливы неравенства

$$V_N \ll c_m^T, \quad \Delta_{NK} \equiv |\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_K| \ll c_m^T \tag{1.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В силу (1.5) отношение $V_\alpha / c_m^T \ll 1$, и для функций распределения легких компонентов f_α возможно получение односкоростного решения, когда $f_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{c}_\alpha{}^\circ)$, $\mathbf{c}_N{}^\circ \equiv \xi_N - \mathbf{u}$. Здесь ξ_N — скорость частицы сорта N в неподвижной системе координат.

4. Если $\delta \lesssim \varepsilon^2$ (иначе говоря, $\rho_M \equiv \sum m_i n_i \lesssim \rho_m \equiv \sum m_\alpha n_\alpha$) и $M_0 \sim 1$, то $u \sim c_m^T$, $u_i \gg c_M^T$, т. е. для тяжелых компонентов реализуется «гиперзвуковой» режим течения. Здесь в случае (1.2) справедлива оценка

$$V_i \sim c_m^T \frac{L_u}{L} = c_m^T \frac{\mathrm{Kn}}{\varepsilon^2}, \quad L_u = \frac{1}{n_m \sigma_M \varepsilon^2} \tag{1.6}$$

где L_u — масштаб релаксации средних скоростей компонентов, который в данном случае совпадает с масштабом максвеллизации f_i в столкновениях тяжелых частиц с легкими. По этой причине при условии (1.2) величина $L_u \ll L$, а V_i являются быстрыми переменными, для которых получим локальные соотношения.

При $\varepsilon^3 \lesssim \mathrm{Kn} \ll \mathrm{Kn}_* = \varepsilon^2$ в силу (1.6) $V_i \gtrsim c_M^T$ и линеаризация решения для f_i по отношению V_i / c_M^T невозможна. Иными словами, необходим многоскоростной подход, когда $f_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{c}_i)$, $\mathbf{c}_N = \xi_N - \mathbf{u}_N$. С учетом этого, а также в силу (1.3), (1.4) для смеси, в которой $\delta \lesssim \varepsilon^2$, решения для f_α и f_i представим в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}[\mathbf{u}, T](1 + \varphi_\alpha), \quad f_i = f_i^{(0)}[\mathbf{u}_i, T](1 + \varphi_i), \quad \varphi_{\alpha,i} \ll 1 \tag{1.7}$$

$$f_N^{(0)}[\mathbf{u}_N, T_N] = n_N \left(\frac{m_N}{2\pi k T_N}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_N(\xi_N - \mathbf{u}_N)^2}{2kT_N}\right] \tag{1.8}$$

Модифицировав в соответствии с решением (1.7) процедуру метода Чепмена —

Энскога, в главном приближении для $\mathbf{V}_i$ найдем коррелирующее с оценкой (1.6) выражение

$$\mathbf{V}_i = \frac{m_i \nabla p}{\rho \sum\limits_{\alpha} n_\alpha \Phi_{\alpha i}}, \quad \Phi_{\alpha i} = \frac{16}{3} m_\alpha \Omega_{\alpha i}^{(1,1)} \tag{1.9}$$

$$p = n_m kT, \quad \nabla p = -\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla, \quad \rho = \rho_m + \rho_M$$

где интегралы Ω определены в [32].

Существование локальных соотношений (1.9) в условиях гиперзвукового режима течений тяжелых компонентов ($u_i \gg c_M^T$) и применимости макроскопического описания свидетельствует о том, что здесь возможен переход от многоскоростного решения (1.7), (1.8) для f_N к односкоростной газовой динамике. Вид выражений (1.9) показывает, что в данных условиях разделение скоростей компонентов вызвано исключительно инерционными эффектами, которые максимальны в случае $M_0 \sim 1$ именно при $\rho_M \lesssim \rho_m$. Поэтому априори можно предположить, что подобные локальные связи на $\mathbf{V}_i$ должны существовать и в других условиях.

5. В случае (1.2), (1.3) в нулевом приближении по Kn и ε для f_α и f_i справедливы уравнения

$$\sum_{\beta=1}^{s_m} J_{\alpha\beta}(f, f) + \sum_{i=1}^{s_M} J_i^L(f_\alpha) = 0, \quad \sum_{j=1}^{s_M} J_{ij}(f, f) = 0 \tag{1.10}$$

где $J_i^L(f_\alpha)$ — интеграл Лоренца [32]. Решение (1.10) — максвеллианы $f_\alpha^{(0)}[\mathbf{u}_m, T_m]$ и $f_i^{(0)}[\mathbf{u}_M, T_M]$. Здесь $\mathbf{u}_m$ и $\mathbf{u}_M$ — средние скорости, а T_m и T_M рассчитываются по собственным скоростям частиц $\xi_\alpha - \mathbf{u}_m$, $\xi_i - \mathbf{u}_M$ соответственно.

Таким образом, в условиях (1.3) макроскопическое описание многокомпонентной ε-смеси может быть лишь двухтемпературным. Если в условиях (1.2) не выполнены неравенства (1.3) или (1.4), температуры компонентов близки друг другу. Здесь возможны однотемпературные решения для f_N и соответствующая газовая динамика.

6. Имеет место следующая принципиальная особенность, связанная с определением температуры тяжелых компонентов. Поскольку f_i зависят от $\mathbf{c}_i = \xi_i - \mathbf{u}_i$ и одной температуры, ею может быть только такая величина, как

$$\theta_M = \frac{1}{n_M} \sum_{i=1}^{s_M} n_i T_i, \quad \frac{3}{2} n_i k T_i = \int f_i \frac{m_i c_i^2}{2} d\mathbf{c}_i \tag{1.11}$$

Если $\rho_M \lesssim \rho_m$, $M_0 = O(1)$, то максвеллианы $f_i^{(0)}$ по существу должны зависеть от $\mathbf{c}_i$. Однако их установление происходит по отдельности для каждого тяжелого компонента в столкновениях его частиц с легкими при температуре последних, равной $T_{m0} \approx T_m$

$$\frac{3}{2} n_m k T_{m0} = \sum_{\alpha=1}^{s_m} \int f_\alpha \frac{m_\alpha c_\alpha^{\circ 2}}{2} d\mathbf{c}_\alpha^\circ, \quad \mathbf{c}_\alpha^\circ = \xi_\alpha - \mathbf{u}$$

Из сказанного следует равенство $T_i = T_{m0}$, из-за которого в силу (1.11) $\theta_M = T_{m0}$. Между тем определенная по $\mathbf{c}_i^\circ = \xi_i - \mathbf{u}$ (аналогично T_{m0}) температура тяжелых компонентов

$$T_{M0} = \theta_M + \sum_{i=1}^{s_M} \frac{\rho_i V_i^2}{3 n_M k}$$

при $V_i \gtrsim c_M^T$ на свою величину отличается от $T_{m0} \approx \theta_M$. Иными словами, определенные в одной системе отсчета собственных скоростей частиц температуры легких и тяжелых компонентов в данном случае будут на свою величину отличаться друг от друга в условиях, фактически однотемпературных. Объясняется это уширением «средней» функции распределения тяжелых компонентов за счет влияния разделения их парциальных средних скоростей.

Вычисляемая согласно (1.11) величина θ_M верно отражает свойства решения, хотя и может трактоваться лишь как «эффективная» температура из-за того, что каждое из слагаемых в сумме $n_i T_i$ соответствует своей системе отсчета собственных скоростей.

Итак, суммируя изложенное выше, можно утверждать, что без уменьшения общности макроскопическое описание движения многокомпонентных ε-смесей (1.1) произвольного состава может быть сведено к двухтемпературному и односкоростному. Решения для f_N при этом следует искать в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}\,[\mathbf{u},\, T_{m0}](1+\varphi_{\alpha 0}),\quad f_i = f_i^{(0)}\,[u_i,\, \theta_M](1+\varphi_i) \tag{1.12}$$

$$\varphi_{\alpha 0} \equiv \varphi_\alpha + \frac{m_\alpha}{kT_{m0}}\mathbf{V}_\alpha\cdot\mathbf{c}_\alpha^0$$

где поправки $\varphi_{\alpha 0}$, $\varphi_i \ll 1$. С учетом (1.5) решение (1.12) для f_α удобно представить в аналогичной f_i форме

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)}\,[\mathbf{u}_\alpha,\, \theta_m](1+\varphi_\alpha) \tag{1.13}$$

Здесь величина θ_m определена аналогично θ_M (см. (1.11)) и отличается от температуры T_{m0} легких компонентов, вычисленной по c_α°, т. е. на величину, много меньшую единицы. Уравнения для φ_α и φ_i имеют одинаковый структурный вид и свойства.

Многоскоростная форма решения для f_i и f_α предполагает (в силу сделанного выше вывода об односкоростном характере газодинамических уравнений) получение локальных соотношений для $\mathbf{V}_\alpha$ и $\mathbf{V}_i$.

2. Сформулируем алгоритм вывода системы уравнений газовой динамики ε-смесей, соответствующий установленной выше структуре (1.12), (1.13) решения для f_N. Система уравнений Больцмана для $f_N = f_N\ (t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{c}_N)$ имеет вид

$$\frac{D_N f_N}{Dt} + (\mathbf{c}_N\cdot\nabla) f_N - \left[\frac{D_N\mathbf{u}_N}{Dt} + (\mathbf{c}_N\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_N - \mathbf{F}_N\right]\cdot\frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{c}_N} = J_N\,(f, f) \tag{2.1}$$

$$J_N\,(f,f) = \sum_{K=1}^{s} J_{NK}\,(f,f),\quad \frac{D_N}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_N\cdot\nabla) = \frac{D}{Dt} + (\mathbf{V}_N\cdot\nabla)$$

Здесь ускорения $\mathbf{F}_N$ определяются внешними силовыми полями, которые предполагаются достаточно слабыми, с тем чтобы при Kn $\ll 1$ изменение ξ_N на длине пробега было относительно малым. В соответствие с разд. 1 решение для f_N в условиях (1.1) и (1.2) ищем в виде

$$f_N = f_N^{(0)}\,(1+\varphi_N),\quad f_N^{(0)} = n_N\left(\frac{h_N}{\pi}\right)^{3/2}\exp\,(-w_N^2),\quad \varphi_N \ll 1 \tag{2.2}$$

$$h_\alpha = \frac{m_\alpha}{2k\theta_m},\quad h_i = \frac{m_i}{2k\theta_M},\quad \mathbf{w}_N = \mathbf{c}_N h_N^{1/2}$$

Для макропараметров, от которых, согласно (2.2), явно зависят f_N, справедливы уравнения переноса, следующие из (2.1) после интегрирования по $\mathbf{c}_N$ с соответствующими весами

$$\frac{D_N n_N}{Dt} = -n_N \nabla \mathbf{u}_N \tag{2.3}$$

$$\rho_N \frac{D_N u_N}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_N + \rho_M \mathbf{F}_N + \mathbf{R}_N \tag{2.4}$$

$$\frac{3}{2} n_M k \frac{D\theta_M}{Dt} = \frac{3}{2} k\theta_M \nabla \cdot \sum_{i=1}^{s_M} n_i \mathbf{V}_i - \sum_{i=1}^{s_M} \left[\nabla \cdot \left(\frac{3}{2} n_i k T_i \mathbf{V}_i \right) + \nabla \cdot \mathbf{q}_i + \mathbf{P}_i : \nabla u_i \right] + W_M \tag{2.5}$$

$$\frac{3}{2} n_m k \frac{D\theta_m}{Dt} = \frac{3}{2} k\theta_m \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^{s_m} n_\alpha \mathbf{V}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s_m} \left[\nabla \cdot \left(\frac{3}{2} n_\alpha k T_\alpha \mathbf{V}_\alpha \right) + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha : \nabla \mathbf{u}_\alpha \right] + W_m \tag{2.6}$$

Уравнения (2.4) для $\mathbf{u}_N$ удобно переписать через уравнение для среднемассовой скорости $\mathbf{u}$ и уравнения переноса для диффузионных скоростей $\mathbf{V}_N$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \sum_{K=1}^{s} \rho_K \mathbf{F}_K - \sum_{K=1}^{s} \nabla \cdot (\rho_K \mathbf{V}_K \mathbf{V}_K) \tag{2.7}$$

$$\rho_N \frac{D\mathbf{V}_N}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_N - \frac{\rho_N}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{P} - \rho_N \sum_{K=1}^{s} \left(\delta_{NK} - \frac{\rho_K}{\rho} \right) \mathbf{F}_K + \rho_N (\mathbf{V}_N \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho_N (\mathbf{V}_N \cdot \nabla)\mathbf{V}_N -$$

$$- \frac{\rho_N}{\rho} \sum_{K=1}^{s} \nabla \cdot (\rho_K \mathbf{V}_K \mathbf{V}_K) = \mathbf{R}_N \tag{2.8}$$

В (2.3)—(2.8) использованы обозначения

$$[A] \equiv \int f_N A \, d\mathbf{c}_N, \quad n_N = [1], \quad n_N \mathbf{u}_N = [\xi_N], \quad \rho = \sum_{K=1}^{s} m_K n_K$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{K=1}^{s} [m_K \xi_K], \quad \mathbf{V}_N = \mathbf{u}_N - \mathbf{u}, \quad \frac{3}{2} n_N k T_N = \left[\frac{m_N c_N^2}{2} \right]$$

$$n_m = \sum_{\alpha=1}^{s_m} n_\alpha, \quad n_M = \sum_{i=1}^{s_M} n_i, \quad n_m \theta_m = \sum_{\alpha=1}^{s_m} n_\alpha T_\alpha, \quad n_M \theta_M = \sum_{i=1}^{s_M} n_i T_i \tag{2.9}$$

$$\mathbf{P}_N = [m_N \mathbf{c}_N \mathbf{c}_N], \quad \mathbf{P} = \sum_{K=1}^{s} \mathbf{P}_K, \quad \mathbf{q}_N = \left[\frac{m_N c_N^2}{2} \mathbf{c}_N \right]$$

$$P_N = p_N \delta + \pi_N, \quad \pi_m = \sum_{\alpha=1}^{s_m} \pi_\alpha, \quad \pi_M = \sum_{i=1}^{s_M} \pi_i$$

$$\mathbf{R}_N = \int m_N \mathbf{c}_N J_N (f, f) \, d\mathbf{c}_N, \quad W_M = \sum_{i=1}^{s_M} \int \frac{m_i c_i^2}{2} J_i (f, f) \, d\mathbf{c}_i$$

$$W_m = \sum_{\alpha=1}^{s_m} \int \frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2} J_\alpha (f, f) \, d\mathbf{c}_\alpha, \quad T_i = \theta_M (1 + \tau_i), \quad \sum_{i=1}^{s_M} n_i \tau_i = 0$$

$$T_\alpha = \theta_m (1 + \tau_\alpha), \quad \sum_{\alpha=1}^{s_m} n_\alpha \tau_\alpha = 0, \quad \frac{3}{2} n_N \tau_N = \left[w_N^2 - \frac{3}{2} \right]$$

По определению, $f_N^{(0)}$ не дают вклада в τ_N.

Напомним, что предметом обобщенного метода Чепмена — Энскога [17—19] являются течения, где отклонение состояния смеси от локально-равновесного вызвано граничными или начальными условиями (например, формой обтекаемого тела), а не процессами релаксации, которые здесь лишь «подстраивают» состояние газа к медленно меняющимся внешним условиям. Следствием являются определенные ограничения на $\mathbf{V}_N$, $\Delta_{NK} = \mathbf{V}_N - \mathbf{V}_K$, $T_{NK} = T_N - T_K$ и т. д., вытекающие из уравнений переноса (см. в качестве примера формулу (2.11) в [25]). В силу этих ограничений в уравнениях (2.1) интегралы $J_N(f^{(0)}, f^{(0)}) = O(f_N^{(0)}/\vartheta)$, $\upsilon = L/u$, а в уравнениях переноса обменные слагаемые $\mathbf{R}_N$, W_m, W_M одного порядка с максимальными из других составляющих этих уравнений.

Кроме этого, в обобщенном методе предполагается, что из линеаризованного интеграла столкновений

$$J_{NK}(\varphi) \equiv \int [f_N^{(0)\prime} f_K^{(0)\prime} (\varphi_N' + \varphi_K') - f_N^{(0)} f_K^{(0)} (\varphi_N + \varphi_K)]\, g_{NK}\, d\sigma_{NK}\, d\xi_K$$

где $\mathbf{g}_{NK}$ — относительная скорость, σ_{NK} — сечение сталкивающихся частиц, можно выделить самосопряженную часть $J_{NK}^s(\varphi)$ таким образом, что несамосопряженный остаток $J_{NK}^A(\varphi)$ удовлетворит неравенству

$$J_{NK}^A(\varphi) \equiv J_{NK}(\varphi) - J_{NK}^s(\varphi) << J_{NK}^s(\varphi) \tag{2.10}$$

которое есть следствие упомянутых выше ограничений на макропараметры. В связи с этим, следуя [23], заметим, что процедура разделения $J_{NK}(\varphi)$ на $J_{NK}^A(\varphi)$ и $J_{NK}^s(\varphi)$ [17, 18] в случае ε-смеси не точна, но приводит к верному результату из-за свойств разложений $J_{NK}(\varphi)$ по ε.

Благодаря (2.10) в уравнениях для $\varphi_N^{(l)}$, $l \geq 1$, где $\varphi_N^{(l)}$ — члены разложения φ_N при $\mathrm{Kn} << \mathrm{Kn}_*$, можно пренебречь $J_{NK}^A(\varphi^{(l)})$ в сравнении с $J_{NK}^s(\varphi^{(l)})$. В результате упрощается вычисление переносных свойств, которые при этом удовлетворяют известным соотношениям симметрии.

Рассмотрим первое приближение, когда $\varphi_N = \varphi_N^{(1)}$. Тогда с учетом (2.2)—(2.10) и упомянутых ограничений на значения макроскопических величин обычным для метода Чепмена — Энскога способом из (2.1) для φ_N получим систему уравнений

$$f_N^{(0)} [H_{N,1} + H_{N,2} + H_{N,3}] - I_N^{(0)} = L_N(\varphi) \tag{2.11}$$

$$H_{N,1} \equiv \left(w_N^2 - \frac{5}{2}\right) \mathbf{c}_N \cdot \nabla \ln \theta_{(N)}, \quad H_{N,2} \equiv 2\langle \mathbf{w}_N \mathbf{w}_N \rangle : \nabla \mathbf{u}_N$$

$$H_{N,3} \equiv \left(w_N^2 - \frac{3}{2}\right) \sum_{K=1}^{s(N)} \left(\delta_{NK} - \frac{n_K}{n_{(N)}}\right) \left(\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{V}_K + \mathbf{V}_K \cdot \nabla \ln \theta_{(N)}\right)$$

$$I_N^{(0)} \equiv J_N(f^{(0)}, f^{(0)}) - f_N^{(0)} \left[\frac{\mathbf{c}_N \cdot \mathbf{R}_N^{(0)}}{n_N k \theta_{(N)}} + \left(w_N^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{2}{3} \frac{W_{(N)}^{(0)}}{p_{(N)}}\right]$$

$$L_N(\varphi) \equiv J_N^S(\varphi) - f_N^{(0)} \left[\frac{\mathbf{c}_N \cdot \mathbf{R}_N(\varphi)}{n_N k \theta_{(N)}} + \left(w_N^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{2}{3} \frac{W_{(N)}(\varphi)}{p_{(N)}}\right]$$

$$(N = \alpha) \equiv m, \quad (N = i) \equiv M, \quad p_m = n_m k \theta_m, \quad p_M = n_M k \theta_M$$

Здесь $\langle A \rangle$ — бездивергентный симметричный тензор. Величины $\mathbf{R}_N^{(0)}$ и $W_{(N)}^{(0)}$ вычисляются по $f_N = f_N^{(0)}$ в соответствии с (2.9). Точно так же, но по $J_N^s(\varphi)$, вычисляются $\mathbf{R}_N(\varphi)$ и $W_{(N)}(\varphi)$.

Можно показать, что решение уравнений (2.11) существует. Оно становится единственным, если

$$\int f_N^{(0)}\varphi_N\, d\mathbf{c}_N = 0, \quad \int f_N^{(0)}\varphi_N \mathbf{c}_N\, d\mathbf{c}_N = 0, \quad \sum_{N=1}^{s_{(N)}} \int f_N^{(0)}\varphi_N m_N c_N^2\, d\mathbf{c}_N = 0 \tag{2.12}$$

Заметим, что отличающиеся от $J_N^s(\varphi)$ слагаемые $L_N(\varphi)$ не влияют на таким образом определенное решение для φ_N. Иными словами, при вычислении φ_N можно заменить $L_N(\varphi)$ на $J_N^s(\varphi)$ с учетом, разумеется, свойств (2.12) получаемого решения при его разложении по ортогональным полиномам.

Особенностью ε-смеси является то, что φ_α могут быть найдены прежде и независимо от φ_i [31]. Причина: члены разложения $J_{\alpha i}(f, f)$ по степеням ε зависят от моментов f_i, а в главном приближении — от n_i.

Решение системы (2.11) должно быть дополнено выводом соотношений, обеспечивающих переход от многоскоростной формы представления f_N к односкоростному макроскопическому описанию. Поскольку $\mathbf{V}_N$, как показано в разд. 1, являются быстрыми переменными, эти соотношения можно получить из уравнений переноса (2.8).

Из (2.8) следует, что в случае (1.2), т. е. при $\varphi_N \ll 1$, в главном приближении слева в (2.8) должны быть сохранены члены

$$\nabla p_N - \frac{\rho_N}{\rho}\nabla p - \rho_N \sum_{K=1}^{s}\left(\delta_{NK} - \frac{\rho_K}{\rho}\right)\mathbf{F}_K \equiv p\mathbf{d}_N^T \tag{2.13}$$

$$p_\alpha = n_\alpha k\theta_m, \quad p_i = n_i k\theta_M, \quad p = n_m k\theta_m + n_M k\theta_M$$

Действительно, первое и пятое слагаемые слева в (2.8), т. е. $\rho_N D\mathbf{V}_N/Dt$ и $\rho_N(\mathbf{V}_N\cdot\nabla)\mathbf{u}$, малы по сравнению с правой частью $\mathbf{R}_N$ в силу того, что в условиях, когда $\varphi_N \ll 1$, скорости $\mathbf{V}_N$ являются быстрыми переменными. Квадратичные по $\mathbf{V}_N$ члены слева в (2.8) либо малы по сравнению с $p\mathbf{d}_N^T$, если $V_N/c_N^T \ll 1$, либо малы по отношению к первому и пятому членам слева в (2.8), если $V_N/c_N^T \gtrsim 1$ и $V_N \ll u \sim c_m^T$. С учетом этого составляющие тензоров напряжений $\mathbf{P}_N$ и $\mathbf{P}$ вычисляются в главном приближении по $f_N = f_N^{(0)}$, давая в результате (2.13).

После подстановки решения (2.2) в (2.8) с учетом (2.13) и определения вектора $\mathbf{d}_N^T$ искомые локальные соотношения для $\mathbf{V}_N$ находим в виде

$$\mathbf{d}_N^T \equiv \nabla\left(\frac{p_N}{p}\right) + \left(\frac{p_N}{p} - \frac{\rho_N}{\rho}\right)\nabla \ln p - \frac{\rho_N}{p}\sum_{K=1}^{s}\left(\delta_{NK} - \frac{\rho_K}{\rho}\right)\mathbf{F}_K = \frac{1}{p}\left[\mathbf{R}_N^{(0)} + \mathbf{R}_N(\varphi)\right] \tag{2.14}$$

По определению, правая часть равенства (2.14), кроме макропараметров, от которых зависит получаемое решение для f_N, определяется также величинами $\nabla\theta_m$, $\nabla\theta_M$ и $\mathbf{V}_N$. Иными словами, соотношения (2.14) и вектор $\mathbf{d}_N^T$ являются соответственно не чем иным, как обобщением известных соотношений Стефана — Максвелла и диффузионной термодинамической силы $\mathbf{d}_N$ [33] на рассматриваемый здесь случай двухтемпературных течений ε-смеси.

Таким образом, соотношения Стефана — Максвелла имеют смысл локальных соотношений для определения быстрых переменных $\mathbf{V}_N$ через медленные переменные и их пространственные производные при переходе от многоскоростного решения кинетических уравнений к односкоростному макроскопическому описанию (см. также [25]). Так как при суммировании по N слева и справа в (2.14) тождественно получаются нули, дополнительным соотношением для $\mathbf{V}_N$ служит очевидное равенство

$$\sum_{N=1}^{S} \rho_N \mathbf{V}_N = 0$$

3. Покажем, что в случае ε-смеси линейные интегральные операторы $J_{NK}(\varphi)$ допускают разделение на основную самосопряженную $J^S_{NK}(\varphi)$ и малую несамосопряженную $J^A_{NK}(\varphi)$ части так, чтобы выполнялось неравенство (2.10). Для этого определим вид главного приближения для $J_{NK}(\varphi)$ при $\mathrm{Kn} \ll \mathrm{Kn}_*$, $\varepsilon \ll 1$.

С учетом (1.5) и (2.2) можно установить, что $J_{\alpha\beta}(\varphi)$ членами высших порядков малости отличается от самосопряженного оператора

$$J^s_{\alpha\beta}(\varphi) \equiv \int f^{(0)}_\alpha f^{(0)}_{\beta(\alpha)} (\varphi_\alpha{}' + \varphi_{\beta(\alpha)}{}' - \varphi_\alpha - \varphi_{\beta(\alpha)})\, g_{\alpha\beta}\, d\sigma_{\alpha\beta}\, d\mathbf{c}_{\beta(\alpha)} \tag{3.1}$$

где индексом $\beta(\alpha)$ обозначены функции, зависящие от $\mathbf{c}_{\beta(\alpha)} \equiv \xi_\beta - \mathbf{u}_\alpha$ вместо $\mathbf{c}_\beta \equiv \xi_\beta - \mathbf{u}_\beta$. Выражение (3.1) совпадает с аналогичным оператором в обычном варианте метода Чепмена — Энскога [32].

Интегралы $J_{\alpha l}(f, f)$ разложим по ε и $\Delta_{l\alpha}/c^T_m$ [23, 31]. В итоге найдем, что $J^s_{\alpha l}(\varphi)$ — обычный самосопряженный лоренцев оператор

$$J^s_{\alpha l}(\varphi) \equiv J^L_l(\varphi_\alpha) = n_l \int f^{(0)}_\alpha [\varphi_\alpha(\tau_\alpha) - \varphi_\alpha(\mathbf{c}_\alpha)]\, \sigma_{\alpha l}(c_\alpha, \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{k})\, c_\alpha\, d\mathbf{k} \tag{3.2}$$

$$\tau_\alpha = \mathbf{c}_\alpha - 2(\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

Из (3.2), в частности, следует, что φ_α вычисляются прежде и независимо от φ_l (см. разд. 2).

Интегралы $J_{l\alpha}(f, f)$ разложим по ε, как в [23]. При этом в $J^{(0)}_{l\alpha}$ и $L_{l\alpha}(\varphi)$ уничтожаются члены, определяемые по $J^{(1)}_{l\alpha}(f^{(0)}, f^{(0)})$ и $J^{(1)}_{l\alpha}(\varphi)$, а разложение $L_{l\alpha}(\varphi)$ по ε начинается с $L^{(2)}_{l\alpha}(\varphi)$, пропорционального ε^2. Отношение

$$J^{(2)}_{l\alpha}(\varphi)/J_{ij}(\varphi) \sim \varepsilon/\delta$$

т. е. интегралы $J^{(2)}_{l\alpha}(\varphi)$ входят в уравнения главного приближения для φ_l при $\delta \lesssim \varepsilon$, когда в условиях применимости макроскопического описания $T_l \simeq \theta_m \simeq T_{m0}$. Поэтому, полагая в $J^{(2)}_{l\alpha}(\varphi)$ температуру $\theta_M = \theta_m$ и используя разложение по $\Delta_{l\alpha}/c^T_m$, в главном приближении найдем

$$J^{(2)}_{l\alpha}(f^{(0)}_l \varphi_l, f^{(0)}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_l}\left(f^{(0)}_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial \mathbf{c}_l}\right) \frac{4\pi}{3} \varepsilon^2_{\alpha l} \int f^{(0)}_\alpha c^4_\alpha q^{(1)}_{l\alpha}\, d\mathbf{c}_\alpha \tag{3.3}$$

$$\varepsilon^2_{\alpha l} = \frac{m_\alpha}{m_l}, \quad q^{(l)}_{l\alpha} = \varepsilon^2_{\alpha l} \int (1 - \cos^l \chi)\, c_\alpha \sigma(c_\alpha, \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{k})\, d\mathbf{k}$$

Можно показать [31], что интегральный оператор (3.3) самосопряженный, т. е. в главном приближении

$$J^{(2)}_{l\alpha}(f^{(0)}_l \varphi_l, f^{(0)}_\alpha) = J^{(2)s}_{l\alpha}(\varphi_l)$$

Интегралы $J^{(2)}_{l\alpha}(f^{(0)}_l, f^{(0)}_\alpha \varphi_\alpha)$ входят в неоднородные части уравнений для φ_l, так как φ_α вычисляются независимо. В тех же предположениях для них получаем [31]

$$J^{(2)}_{l\alpha}(f^{(0)}_l, f^{(0)}_\alpha \varphi_\alpha) = f^{(0)}_l (2\mathbf{w}_l\mathbf{w}_l - \delta) \int f^{(0)}_\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{c}_\alpha} \mathbf{c}_\alpha q^{(1)}_{l\alpha}\, d\mathbf{c}_\alpha - f^{(0)}_l \frac{3m_\alpha}{2k\theta_M} \mathbf{w}_l\mathbf{w}_l \int f^{(0)}_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle \varphi_\alpha q^{(2)}_{l\alpha}\, d\mathbf{c}_\alpha \tag{3.4}$$

Из (3.4) видно, что в $J^{(2)}_{l\alpha}(f^{(0)}_l, f^{(0)}_\alpha \varphi_\alpha)$ ненулевой вклад может дать только тензорная (пропорциональная $\langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle$) часть φ_α. В свою очередь сам этот интеграл влияет только на тензорную часть φ_l.

Наконец, обусловленные столкновениями тяжелых частиц друг с другом интегралы $J_{lj}(\varphi)$ в главном приближении определяют оператор уравнений для φ_l, если только $\delta \gtrsim \varepsilon$. Для ε-смеси такого состава при $\mathrm{Kn} \ll \mathrm{Kn}_*$ отношение $\Delta_{lj}/c^T_M \ll 1$. Поэтому в главном приближении

$$J_{ij}(\varphi) = J^s_{ij}(\varphi) = \int f_i^{(0)} f_{j(i)}^{(0)} (\varphi_i' + \varphi_{j(i)}' - \varphi_i - \varphi_{j(i)})\, g_{ij}\, d\sigma_{ij}\, dc_{j(i)}$$

т. е. $J^s_{ij}(\varphi)$ структурно совпадает с (3.1).

Таким образом, во всех случаях, когда справедливо макроскопическое описание и $\varphi_N \ll 1$, в интегральных операторах $J_N(\varphi)$ можно выделить в качестве основной их части самосопряженные операторы $J^s_N(\varphi)$.

4. Решение системы уравнений (2.11) ограничим приближением Навье — Стокса, учитывающим в φ_N только линейные по $\mathbf{V}_M$ и по градиентам $\mathbf{u}$, $\theta_{(N)}$ слагаемые (в некоторых частных случаях в главном по Kn приближении необходим учет других слагаемых переносных свойств). При этом соответствующая система уравнений состоит из уравнений (2.3), (2.5)—(2.7), соотношений Стефана — Максвелла (2.14) и уравнений состояния. В (2.7) нужно опустить слагаемые, квадратичные по $\mathbf{V}_K$, в (2.5), (2.6) заменить T_l, T_α на θ_M, θ_m соответственно. Целью данного раздела является расчет переносных свойств (см. определения (2.9)), т. е. тензоров вязких напряжений π_N, π_m, π_M и тепловых потоков $\mathbf{q}_N$, $\mathbf{q}_m$, $\mathbf{q}_M$. Последние не включают слагаемые $^5/_2\, n_N k\theta_{(N)}\mathbf{V}_N$ и соответствующие суммы и поэтому их следует называть приведенными тепловыми потоками [34].

В этом приближении, опуская по аналогии с [18] внепорядковые члены и учитывая установленные выше свойства интегрального оператора $L_N(\varphi)$, в (2.11) можно ввести следующие упрощения: заменить на $\nabla\mathbf{u}$ множитель $\nabla\mathbf{u}_K$ в тензорной составляющей φ_N; считать пропорциональными $\nabla \ln \theta_{(N)}$ слагаемые, обусловленные первым членом справа в (2.11); интегралы $J^s_{NK}(\varphi)$ можно записать в обычном для метода Чепмена — Энскога виде, причем в этих выражениях температура в $f_K^{(0)}$ и собственные скорости частиц сорта K равны соответственно $\theta_{(N)}$ и $\mathbf{c}_{KN} = \boldsymbol{\xi}_K - \mathbf{u}_N$. Формулы для $J^s_{NK}(\varphi)$, относящиеся к столкновениям легких и тяжелых частиц, получаются из интегралов столкновений Больцмана после предельного перехода $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, можно использовать известные соотношения обычного метода Чепмена — Энскога [33] или его модификации [25]. Переход к случаю ε-смеси осуществляется при этом за счет необходимого выбора температуры и упрощений, обусловленных малостью значения параметра ε.

Рассмотрим сначала тензорную часть φ_N и применим следующую экономную методику поиска решения. В обычном односкоростном однотемпературном случае для этой составляющей φ_N имеем решение в виде [33]

$$\varphi^u_N = -B_N\langle \mathbf{w}_N\mathbf{w}_N\rangle : \nabla u, \quad B_N = \frac{2}{nkT}\sum_{q=0}^{\zeta} b_{Nq}(\zeta)\, S^{(q)}_{5/2}(w_N^2) \tag{4.1}$$

$$\sum_{K=1}^{S}\sum_{p=0}^{\zeta} H^{qp}_{NK} b_{Kp}(\zeta) = x_N\delta_{q0}, \quad x_N = \frac{n_N}{n}, \quad N\in[1,S], \quad q\in[0,\zeta] \tag{4.2}$$

$$H^{qp}_{NK} = \frac{2}{5kT}\sum_{L=1}^{S} x_N x_L \{\delta_{NK}[\langle \mathbf{w}_N\mathbf{w}_N\rangle S^{(q)}_{5/2}(w_N^2),\ \langle \mathbf{w}_N\mathbf{w}_N\rangle S^{(p)}_{5/2}(w_N^2)]_{NL} + \tag{4.3}$$

$$+\ \delta_{KL}\,[\langle \mathbf{w}_N\mathbf{w}_N\rangle S^{(q)}_{5/2}(w_N^2), \langle \mathbf{w}_L\mathbf{w}_L\rangle S^{(p)}_{5/2}(w_L^2)]_{NL}\}$$

В частном случае $q=p=0$

$$H^{00}_{NK} = \frac{32}{15}\frac{1}{kT}x_N\sum_{L=1}^{S} x_L\mu_{LN}\left\{5\mu_{NL}(\delta_{NK}-\delta_{KL})\,\Omega^{(1,1)}_{NL} + \frac{3}{2}(\mu_{LN}\delta_{NK} + \mu_{NL}\delta_{KL})\,\Omega^{(2,2)}_{NL}\right\} \tag{4.4}$$

$$\mu_{NL} = \frac{m_N}{m_N + m_L}$$

Разобьем смесь на две группы компонентов сортов $N \equiv \alpha = 1, 2, \ldots, S_m$ и $N = S_m + i = S_m + 1, S_m + 2, \ldots, S_m + S_M = S$. Устремим ε к нулю. Получая решение для легких компонентов, положим в (4.1)—(4.4) температуру $T = \theta_m$. В пределе $\varepsilon \to 0$ линеаризованные интегралы столкновений легких частиц с тяжелыми стремятся к операторам Лоренца, из-за чего уравнения для φ_α отделяются от общей системы. В силу этого в (4.2) $b_{Kp}(\zeta) = 0$ для $K > S_m$. В выражении (4.3) для H^{qp}_{NK} нужно пренебречь малыми при $\varepsilon \to 0$ слагаемыми. В итоге вместо (4.2) для легких компонентов получаем автономную систему уравнений для $b_{\alpha p}(\zeta)$

$$\sum_{\beta=1}^{S_m} \sum_{p=0}^{\zeta} h^{qp}_{\alpha\beta} b_{\beta p}(\zeta) = x_\alpha \delta_{q0}, \quad \alpha \in [1, S_m], \quad q \in [0, \zeta] \tag{4.5}$$

$$h^{qp}_{\alpha\beta} = H^{qp}_{\alpha\beta} + \delta H^{qp}_{\alpha\beta}|_{\varepsilon=0} \tag{4.6}$$

$$\delta H^{qp}_{\alpha\beta} = \frac{2\delta_{\alpha\beta} x_\alpha}{5k\theta_m} \sum_{j=1}^{S_M} x_j \, [\langle \mathrm{w}_\alpha \mathrm{w}_\alpha \rangle S^{(q)}_{3/2}(w^2_\alpha), \quad \langle \mathrm{w}_\alpha \mathrm{w}_\alpha \rangle S^{(p)}_{3/2}(w^2_\alpha)\,]_{\alpha j}$$

причем символ $A|_{\varepsilon=0}$ обозначает главный член в разложении A по степеням ε при $\varepsilon \to 0$.

Формулы (4.6) имеют такую структуру, что в $H^{qp}_{\alpha\beta}$ дают вклады только интегралы столкновений $J^s_{\alpha\beta}(\varphi^u)$, а в $\delta H^{qp}_{\alpha\beta}|_{\varepsilon=0}$ — интегралы Лоренца $J^L_{\alpha j}(\varphi^u_\alpha)$. В частности, при $q = p = 0$ в указанном приближении из (4.4) получим

$$H^{00}_{\alpha\beta} = \frac{32 x_\alpha}{15k\theta_m} \sum_{\gamma=1}^{S_m} x_\gamma \mu_{\gamma\alpha} \left\{ 5\mu_{\alpha\gamma}(\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\beta\gamma})\, \Omega^{(1.1)}_{\alpha\gamma} + \frac{3}{2}(\mu_{\gamma\alpha}\delta_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma})\, \Omega^{(2.2)}_{\alpha\gamma} \right\}$$

$$\delta H^{00}_{\alpha\beta}|_{\varepsilon=0} = \frac{16\delta_{\alpha\beta} x_\alpha}{5k\theta_m} \sum_{j=1}^{S_M} x_j \Omega^{(2.2)}_{\alpha j} \Big|_{\varepsilon=0}$$

Записи решений систем линейных уравнений (4.5) и т. д. через определители здесь не приводятся (см. [34]).

В принятом приближении π_α и π_m имеют вид

$$\pi_\alpha = -2\eta_\alpha \langle \nabla \mathbf{u} \rangle, \quad \eta_\alpha(\theta_m) = x_\alpha b_{\alpha 0} \tag{4.7}$$

$$\pi_m = \sum_{\alpha=1}^{S_m} \pi_\alpha = -2\eta_m \langle \nabla \mathbf{u} \rangle, \quad \eta_m(\theta_m) = \sum_{\alpha=1}^{S_m} x_\alpha b_{\alpha 0}$$

При получении решения для тяжелых компонентов полагаем $T = \theta_M$. Кроме этого, учтем, что коэффициенты b_{Kp} при $K \in [1, S_m]$ известны из только что рассмотренного решения задачи для легких компонентов. В результате при $\varepsilon \to 0$ вместо (4.5) будем иметь систему уравнений, которая следует из (4.2)

$$\sum_{j=1}^{S_M} \sum_{p=0}^{\zeta} h^{qp}_{ij} b_{jp}(\zeta) = x_i \delta_{q0} - \Gamma_{iq}, \quad i \in [1, S_M], \quad q \in [0, \zeta] \tag{4.8}$$

$$h^{qp}_{ij} \equiv H^{qp}_{ij} + \delta H^{qp}_{ij}|_{\varepsilon=0}, \quad \delta H^{qp}_{ij} \equiv \frac{2\delta_{ij} x_i}{5k\theta_M} \sum_{\alpha=1}^{S_m} x_\alpha \, [\langle \mathrm{w}_i \mathrm{w}_i \rangle S^{(q)}_{3/2}, \ \langle \mathrm{w}_i \mathrm{w}_i \rangle S^{(p)}_{3/2}\,]_{i\alpha}$$

$$\Gamma_{iq} \equiv \sum_{\alpha=1}^{S_m} \sum_{p=0}^{\zeta} h^{qp}_{i\alpha} b_{\alpha p}(\zeta), \quad h^{qp}_{i\alpha} = H^{qp}_{i\alpha}|_{\varepsilon=0}$$

$$H^{qp}_{i\alpha} = \frac{2}{5k\theta_M} x_i x_\alpha \, [\langle \mathrm{w}_i \mathrm{w}_i \rangle S^{(q)}_{5/2}(w_i^2), \ \langle \mathrm{w}_\alpha \mathrm{w}_\alpha \rangle S^{(p)}_{5/2}(w_\alpha^2)]_{i\alpha}$$

Для $p = q = 0$

$$H^{00}_{ij} = \frac{32x_i}{15k\theta_M} \sum_{l=1}^{S_M} x_l \mu_{li} \Big\{ 5\mu_{il}(\delta_{ij} - \delta_{jl})\, \Omega^{(1.1)}_{il} + \frac{3}{2}(\mu_{il}\delta_{ij} + \mu_{il}\delta_{jl})\, \Omega^{(2.2)}_{il} \Big\}$$

$$\delta H^{00}_{ij}|_{\varepsilon=0} = \frac{32}{3} \frac{x_i}{k\theta_M} \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{S_m} x_\alpha \frac{m_\alpha}{m_i} \Omega^{(1.1)}_{i\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$h^{00}_{i\alpha} = -\frac{32}{15} \frac{x_i x_\alpha}{k\theta_M} \frac{m_\alpha}{m_i} \left(5\Omega^{(1.1)}_{i\alpha} - \frac{3}{2}\Omega^{(2.2)}_{i\alpha} \right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

Тензоры вязких напряжений тяжелых компонентов и соответствующие коэффициенты вязкости в принятом приближении даются выражениями, аналогичными (4.7), после замен $\alpha \to i$, $\theta_m \to \theta_M$, $m \to M$, $S_m \to S_M$. Подчеркнем, что $\eta_i = \eta_i(\theta_M)$, $\eta_M = \eta_M(\theta_M)$.

Таким образом, использованная здесь методика позволяет применять известные соотношения метода Чепмена — Энскога в произвольном приближении по полиномам Сонина, в частности для скобочных выражений, обходясь без дополнительных сложных расчетов. Этим данный метод расчета переносных свойств отличается от предыдущих работ по бинарным ε-смесям (см., например, [35]).

Действуя аналогично, рассмотрим остальные составляющие решений для φ_N в случае ε-смеси. Часть решения, индуцируемая неоднородностью пространственного распределения температур $\theta_{(N)}$, базируется на преобразованиях соответствующих соотношений для обычной односкоростной однотемпературной смеси [25]. С учетом (2.12) имеем для этого случая

$$\varphi^T_N = -A_N \mathrm{c}_N \cdot \nabla \ln T = -\frac{m_N}{kT} \sum_{q=1}^{\zeta} a_{Nq}(\zeta)\, S^{(q)}_{3/2}(w_N^2)\, \mathrm{c}_N \cdot \nabla \ln T \tag{4.9}$$

$$\sum_{K=1}^{S} \sum_{p=1}^{\zeta} Q^{qp}_{NK} a_{Kp}(\zeta) = \frac{15}{4} x_N \delta_{1q}, \quad q \in [1, \zeta], \quad N \in [1, S] \tag{4.10}$$

$$Q^{qp}_{NK} = \frac{n\sqrt{m_N m_K}}{kT} \Big\{ \delta_{NK} \sum_{L=1}^{S} x_N x_L \, [\mathrm{w}_N S^{(q)}_{3/2}(w_N^2), \mathrm{w}_N S^{(p)}_{3/2}(w_N^2)]_{NL} +$$

$$+ x_N x_K \, [\mathrm{w}_N S^{(q)}_{3/2}(w_N^2), \mathrm{w}_K S^{(p)}_{3/2}(w_K^2)]_{NK} \Big\}$$

Заметим, что в разложении (4.9) функции φ^T_N отсутствует полином $S^{(0)}_{3/2} = 1$, так как, по условию (2.12), φ^T_N не должна давать вклад в среднюю скорость компонента. Следствием (4.10) являются такие уравнения для коэффициентов $a_{\alpha p}(\zeta)$ в разложении (4.9) поправки φ^T_α

$$\sum_{\beta=1}^{S_m} \sum_{p=1}^{\zeta} q^{gp}_{\alpha\beta} a_{\beta p}(\zeta) = \frac{15}{4} x_\alpha \delta_{1g}, \quad g \in [1, \zeta], \quad \alpha \in [1, S_m] \tag{4.11}$$

$$q^{gp}_{\alpha\beta} = Q^{gp}_{\alpha\beta} + \delta Q^{gp}_{\alpha\beta}|_{\varepsilon=0}, \quad \delta Q^{gp}_{\alpha\beta} = n\frac{\sqrt{m_\alpha m_\beta}}{k\theta_m} \delta_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{S_M} x_\alpha x_j \, [\mathrm{w}_\alpha S^{(g)}_{3/2}(w_\alpha^2), \mathrm{w}_\alpha S^{(p)}_{3/2}(w_\alpha^2)]_{\alpha j} \tag{4.12}$$

В случае $g = p = 1$

$$q^{11}_{\alpha\beta} = Q^{11}_{\alpha\beta} + 8n \frac{m_\alpha}{k\theta_m} \delta_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{s_M} x_\alpha x_j \left[\frac{25}{4} \Omega^{(1.1)}_{\alpha j} - 5\Omega^{(1.2)}_{\alpha j} + \Omega^{(1.3)}_{\alpha j} \right] \Big|_{\varepsilon=0}$$

Для решения, соответствующего тяжелым компонентам, вместо (4.11), (4.12) имеем

$$\sum_{j=1}^{s_M} \sum_{p=1}^{\zeta} q^{gp}_{ij} a_{jp}(\zeta) = \frac{15}{4} x_i \delta_{1g} - \Delta_{ig}, \quad g \in [1, \zeta], \quad i \in [1, S_M] \tag{4.13}$$

$$q^{gp}_{ij} \equiv Q^{gp}_{ij} + \delta Q^{gp}_{ij}|_{\varepsilon=0}, \qquad \delta Q^{gp}_{ij} \equiv n \frac{\sqrt{m_i m_j}}{k\theta_M} \delta_{ij} \sum_{\beta=1}^{S_m} x_i x_\beta \, [\mathrm{w}_i S^{(g)}_{3/2}(w_i^2), \mathrm{w}_i S^{(p)}_{3/2}(w_i^2)]_{i\beta}$$

$$\Delta_{ig} \equiv \sum_{\alpha=1}^{S_m} \sum_{p=1}^{\zeta} q^{gp}_{i\alpha} a_{\alpha p}(\zeta), \quad q^{gp}_{i\alpha} \equiv Q^{gp}_{i\alpha}|_{\varepsilon=0}$$

$$Q^{gp}_{i\alpha} \equiv n \frac{\sqrt{m_i m_\alpha}}{k\theta_M} x_i x_\alpha \, [\mathrm{w}_i S^{(g)}_{3/2}(w_i^2), \mathrm{w}_\alpha S^{(p)}_{3/2}(w_\alpha^2)]_{i\alpha}$$

В частности

$$q^{11}_{ij} = Q^{11}_{ij} + 60n \sqrt{\frac{m_j}{m_i}} \frac{x_i \delta_{ij}}{k\theta_M} \sum_{\beta=1}^{S_m} x_\beta m_\beta \Omega^{(1.1)}_{i\beta} \Big|_{\varepsilon=0} \tag{4.14}$$

$$q^{11}_{i\alpha} = -8n \frac{x_i x_\alpha}{k\theta_M} \frac{m_\alpha^2}{m_i} \left[\frac{55}{4} \Omega^{(1.1)}_{i\alpha} - 5\Omega^{(1.2)}_{i\alpha} + \Omega^{(1.3)}_{i\alpha} - 2\Omega^{(2.2)}_{i\alpha} \right] \Big|_{\varepsilon=0}$$

Из (4.14) видно, что в силу $\varepsilon << 1$ величина $q^{11}_{i\alpha}$ настолько мала, что в системе уравнений (4.13) справа можно опустить соответствующий $q^{11}_{i\alpha}$ вклад в Δ_{ig}. Данное обстоятельство согласуется с выводом разд. 3 о вкладе φ_α в решение для φ_i. В соответствии с этим в (4.13) можно пренебречь величиной Δ_{ig}. Кроме этого, как и прежде, коэффициенты $a_{\alpha p}(\zeta)$ зависят от θ_m, а $a_{ip}(\zeta)$ — от θ_M. То же самое сохраняется и для соответствующих коэффициентов переноса.

В рамках такой же методики получения уравнений для членов разложения составляющих φ_α и φ_i по полиномам Сонина рассмотрим третью группу слагаемых φ_N, индуцируемую четвертым членом слева в (2.11), т. е. $I^{(0)}_N$. В данном случае важно, что $I^{(0)}_N$ в главном приближении можно линеаризовать по $\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_L \equiv \Delta_{KL}$. Если $N \equiv \alpha$, этот факт является простым следствием малости $|\Delta_{KL}|$ по сравнению с тепловой скоростью легких частиц в условиях применимости макроскопического описания. То же объяснение сохраняется и тогда, когда $N \equiv i$, а состав смеси таков, что основной вклад в $I^{(0)}_i$ вносят столкновения тяжелых частиц с легкими (при этом $\delta = n_M/n_m \lesssim \varepsilon$, $\theta_M = \theta_m$). Если же $\delta >> \varepsilon$ и $I^{(0)}_i$ определяется столкновениями тяжелых частиц друг с другом, то в условиях применимости макроскопического описания возможность линеаризации обусловлена малостью V_j по сравнению с $c^T_M = \varepsilon c^T_m$.

Таким образом, в принятом приближении для $I^{(0)}_N$ можно записать выражение [25]

$$I^{(0)}_N = f^{(0)}_N \sum_{K=1}^{s} \sum_{p=1}^{\zeta} \gamma^{(p)}_{NK} S^{(p)}_{3/2} \mathbf{c}_N \cdot (\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_K) + \ldots$$

$$\gamma_{NK}^{(p)} = -n\,\frac{m_N x_K}{2kT}\sqrt{\pi}\;p!\;\frac{[\mathbf{w}_N S_{3/2}^{(p)}(w_N^2),\ \mathbf{w}_N]_{NK}}{\Gamma(p+5/2)}$$

Здесь $\gamma_{NK}^{(p)}$ не зависят от $\mathbf{V}_L$, Γ — гамма-функция. Соответствующая решению для обычной смеси газов часть φ_N может быть представлена в виде [25]

$$\varphi_N^V = -\frac{m_N}{kT}\sum_{K=1}^{S}\sum_{q=1}^{\zeta} d_{Nq}^K(\zeta)\, S_{3/2}^{(q)}(w_N^2)\,\mathbf{c}_N\cdot\mathbf{V}_K \tag{4.15}$$

где коэффициенты $d_{Nq}^K(\zeta)$ удовлетворяют системе

$$\sum_{K=1}^{S}\sum_{p=1}^{\zeta} Q_{NK}^{gp} d_{Kp}^L(\zeta) = Q_{NL}^{g0},\quad (N, L)\in[1, S],\quad g\in[1,\zeta] \tag{4.16}$$

и обладают свойством

$$\sum_{L=1}^{S} d_{Kp}^L(\zeta) = 0,\quad K\in[1, S],\quad p\in[1,\zeta] \tag{4.17}$$

которое есть условие совместности системы (4.16), так как по определению Q_{NK}^{gp} и в силу закона сохранения импульса в столкновениях имеет место равенство [34]

$$\sum_{L=1}^{S} Q_{NL}^{g0} = \sum_{N=1}^{S} Q_{NL}^{0g} = 0,\quad g\in[1,\zeta] \tag{4.18}$$

Осуществим в соотношениях (4.15)—(4.18) переход к решению для ε-смеси, действуя, как описано выше. В итоге найдем решение для легких компонентов

$$\varphi_\alpha^V = -\frac{m_\alpha}{k\theta_m}\sum_{K=1}^{S}\sum_{g=1}^{\zeta} d_{\alpha g}^K(\zeta)\, S_{3/2}^{(g)}(w_\alpha^2)\,\mathbf{c}_\alpha\cdot\mathbf{V}_K \tag{4.19}$$

$$\sum_{\beta=1}^{S_m}\sum_{p=1}^{\zeta} q_{\alpha\beta}^{gp} d_{\beta p}^L(\zeta) = Q_{\alpha L}^{g0}|_{\varepsilon=0},\quad \alpha\in[1, S_m],\quad L\in[1, S],\quad g\in[1,\zeta]$$

$$Q_{\alpha\gamma}^{g0}|_{\varepsilon=0} = q_{\alpha\gamma}^{g0},\quad Q_{\alpha j}^{g0} = n\,\frac{\sqrt{m_\alpha m_j}}{k\theta_m}\,x_\alpha x_j\,[\mathbf{w}_\alpha S_{3/2}^{(g)}(w_\alpha^2),\ \mathbf{w}_j]_{\alpha j}$$

Для тяжелых компонентов положим $T=\theta_M$, коэффициенты Q_{ij}^{gp} заменим на q_{ij}^{gp} согласно (4.13). Кроме этого, пренебрежем вкладом φ_α^V в решение для φ_i^V, т. е. опустим аналогичный Δ_{ig} в (4.13) член в системе уравнений для $d_{ip}^L(\zeta)$. В результате в дополнение к (4.19) запишем

$$\varphi_i^V = -\frac{m_i}{k\theta_M}\sum_{L=1}^{S}\sum_{g=1}^{\zeta} d_{ig}^L(\zeta)\, S_{3/2}^{(g)}(w_i^2)\,\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{V}_L$$

$$\sum_{j=1}^{S_M}\sum_{p=1}^{\zeta} q_{ij}^{gp} d_{jp}^L(\zeta) = Q_{iL}^{g0}|_{\varepsilon=0},\quad i\in[1, S_M],\quad L\in[1, S],\quad g\in[1,\zeta]$$

$$Q_{jl}^{g0}|_{\varepsilon=0} = q_{jl}^{g0},\quad Q_{j\alpha}^{g0} = n\,\frac{\sqrt{m_j m_\alpha}}{k\theta_M}\,x_j x_\alpha\,[\mathbf{w}_j S_{3/2}^{(g)}(w_j^2),\ \mathbf{w}_\alpha]_{j\alpha}$$

С помощью таким образом полученных решений φ_α^T, φ_i^T, φ_α^V и φ_i^V вычисляются приведенные тепловые потоки

$$\mathbf{q}_\alpha = -\lambda_\alpha \nabla\theta_m + nk\theta_m \sum_{N=1}^{S} k_{\alpha N}^T \mathbf{V}_N, \quad \mathbf{q}_m = -\lambda_m \nabla\theta_m + nk\theta_m \sum_{N=1}^{S} k_N^T(m)\mathbf{V}_N$$

$$\lambda_\alpha = \frac{5}{2} kx_\alpha a_{\alpha 1}(\zeta), \ \lambda_m = \frac{5}{2} k \sum_{\alpha=1}^{S_m} x_\alpha a_{\alpha 1}(\zeta), \ k_{\alpha N}^T = \frac{5}{2} x_\alpha d_{\alpha 1}^N (\zeta), \ k_N^T(m) = \frac{5}{2} \sum_{\alpha=1}^{S_m} x_\alpha d_{\alpha 1}^N (\zeta)$$

Аналогичные выражения справедливы и для $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_M$ после замен $\theta_m \to \theta_M$, $S_m \to S_M$, $\alpha \to i$, $m \to M$ и т. д. В однотемпературном случае эти формулы переходят в известные [34].

5. Для рассматриваемой здесь ε-смеси остается рассчитать правую часть соотношений Стефана — Максвелла $\mathbf{R}_N \equiv \mathbf{R}_N^{(0)} + \mathbf{R}_N(\varphi)$ и обменные члены $W_m^{(0)}$ и $W_M^{(0)}$ в уравнениях для температур θ_m и θ_M. Поправки к $W_{(N)}^{(0)}$ квадратичны по числу Кнудсена и здесь не рассматриваются.

Вычисление $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{R}_i$ осуществим в рамках мѐтодики разд. 4, воспользовавшись результатами расчета $\mathbf{R}_N$ для обычной односкоростной однотемпературной смеси [25]

$$\frac{1}{p}\mathbf{R}_N = \sum_{K=1}^{S} \frac{x_N x_K}{D_{NK}^{(1)}} (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_N) + \frac{2}{3} \sum_{K=1}^{S} \sum_{L=1}^{S} \sum_{p=1}^{\zeta} d_{Lp}^K(\zeta)\, Q_{NL}^{0p} (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_N) -$$

$$- \frac{2}{3} \sum_{K=1}^{S} \sum_{p=1}^{\zeta} a_{Kp}(\zeta)\, Q_{NK}^{0p} \nabla \ln T$$

$$D_{NK}^{(1)} \equiv \frac{3kT}{16 n m_{NK} \Omega_{NK}^{(1,1)}}, \quad m_{NK} \equiv \mu_{NK} m_K \tag{5.1}$$

Здесь $D_{NK}^{(1)}$ — коэффициент бинарной диффузии в первом приближении по полиномам Сонина. Отметим, что первая группа слагаемых слева в (5.1) является следствием интегрирования по $\mathbf{c}_N$ интегралов $J_N(f^{(0)}, f^{(0)})$, возможность линеаризации которых по $(\mathbf{V}_K—\mathbf{V}_L)$ для ε-смеси обсуждалась выше. Остальные две группы слагаемых слева в (5.1) — результат интегрирования $J_N^S(\varphi^T + \varphi^V)$. В результате преобразования (5.1) согласно принятой методике перехода к решению для ε-смеси имеем

$$\frac{1}{nk\theta_m}\mathbf{R}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{S_m} \frac{x_\alpha x_\beta}{D_{\alpha\beta}^{(1)}} (\mathbf{V}_\beta - \mathbf{V}_\alpha) + \sum_{j=1}^{S_M} \frac{x_\alpha x_j}{D_{\alpha j}^{(1)}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_\alpha) + \frac{2}{3} \sum_{K=1}^{S} \sum_{p=1}^{\zeta} \Bigg[\sum_{\beta=1}^{S_m} d_{\beta p}^K(\zeta)\, Q_{\alpha\beta}^{0p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{S_M} d_{\alpha p}^K(\zeta)\, Q_{\alpha j}^{0p}\Big|_{\varepsilon=0}\Bigg] (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_\alpha) - \frac{2}{3}\sum_{p=1}^{\zeta} \Bigg[\sum_{\beta=1}^{S_m} a_{\beta p}(\zeta)\, Q_{\alpha\beta}^{0p} + \sum_{j=1}^{S_M} a_{\alpha p}(\zeta)\, Q_{\alpha j}^{0p}\Big|_{\varepsilon=0}\Bigg] \nabla \ln \theta_m \tag{5.2}$$

причем в (5.2) все коэффициенты $d_{\alpha p}^K$, $a_{\alpha p}$ — функции θ_m.

Выражение для $\mathbf{R}_j$ проще получить следующим образом. Поскольку справедливы равенства

$$\mathbf{R}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{S_m} \mathbf{R}_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{S_M} \mathbf{R}_{\alpha j}, \quad \mathbf{R}_j = \sum_{i=1}^{S_M} \mathbf{R}_{ji} + \sum_{\alpha=1}^{S_m} \mathbf{R}_{j\alpha}$$

где в силу закона сохранения импульса величины $\mathbf{R}_{j\alpha} = -\mathbf{R}_{\alpha j}$ фактически известны (см. в (5.2) слагаемые с суммой по j), то для вычисления $\mathbf{R}_j$ достаточно знать $\mathbf{R}_{ji}$. С учетом (5.1)

$$\frac{1}{nk\theta_M}\mathbf{R}_{ji} = \frac{x_j x_i}{D_{ji}^{(1)}} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) + \frac{2}{3} \sum_{K=1}^{S} \sum_{p=1}^{\zeta} d_{ip}^K(\zeta)\, Q_{ji}^{0p} (\mathbf{V}_K - \mathbf{V}_j) - \frac{2}{3} \sum_{p=1}^{\zeta} a_{ip}(\zeta)\, \theta_{ji}^{0p} \nabla \ln \theta_M$$

Для вычисления обменных слагаемых $W_m^{(0)}$ и $W_M^{(0)}$, входящих в уравнения (2.5), (2.6), воспользуемся результатами работ [18, 23], из которых в случае ε-смеси следует

$$W_{\alpha l}^{(0)} \equiv \int \frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2} J_{\alpha l}(f^{(0)}, f^{(0)})\, d\mathbf{c}_\alpha = 16\,\frac{m_\alpha}{m_l}\, n_l\; p_\alpha \left[\frac{\theta_M}{\theta_m} - 1 + \frac{1}{3}\frac{m_l}{k\theta_m}(\mathbf{V}_l - \mathbf{V}_\alpha)^2\right] \Omega_{\alpha l}^{(1,1)}$$

$$W_{l\alpha}^{(0)} \equiv \int \frac{m_l c_l^2}{2} J_{l\alpha}(f^{(0)}, f^{(0)})\, d\mathbf{c}_l = 16\,\frac{m_\alpha}{m_l}\, n_l\; p_\alpha \left[1 - \frac{\theta_M}{\theta_m}\right] \Omega_{\alpha l}^{(1,1)}$$

Вклад в $W_m^{(0)}$ и $W_M^{(0)}$ от столкновений частиц, принадлежащих группам одних только легких или тяжелых компонентов, вычислим с помощью найденных ранее выражений для $\mathbf{R}_N$ и закона сохранения энергии в столкновениях. Так как

$$W_m^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{s_m}\sum_{\beta=1}^{s_m} W_{\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{\alpha=1}^{s_m}\sum_{l=1}^{s_M} W_{\alpha l}^{(0)} \tag{5.3}$$

$$W_{\alpha\beta}^{(0)} \equiv \int \frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2} J_{\alpha\beta}(f^{(0)}, f^{(0)})\, d\mathbf{c}_\alpha = W_{\alpha\beta}^{\circ(0)} - \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{(0)}\cdot\mathbf{V}_\alpha$$

$$W_{\alpha\beta}^{\circ(0)} \equiv \int \frac{m_\alpha c_{\alpha 0}^2}{2} J_{\alpha\beta}(f^{(0)}, f^{(0)})\, d\mathbf{c}_\alpha, \quad \mathbf{c}_{\alpha 0} = \boldsymbol{\xi}_\alpha - \mathbf{u} = \mathbf{c}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha$$

то после суммирования в (5.3) по α и β уничтожатся слагаемые $W_{\alpha\beta}^{\circ(0)}$ и для $W_m^{(0)}$ получим

$$W_m^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^{s_m}\sum_{l=1}^{s_M} W_{\alpha l}^{(0)} - \sum_{\alpha=1}^{s_m} \mathbf{R}_\alpha^{(0)}\cdot\mathbf{V}_\alpha$$

где $\mathbf{R}_\alpha^{(0)}$ определяется первой группой слагаемых справа в (5.2). Аналогично вычисляется $W_M^{(0)}$.

Таким образом, переносные свойства многокомпонентной ε-смеси вычислены вместе с обменными слагаемыми и соотношениями Стефана — Максвелла. Кроме этого, выписанные выше соотношения также завершают рассмотрение широко исследовавшегося случая бинарной ε-смеси (см. [35] и т. д.), на примере которой наиболее просто сравнить между собой варианты алгоритма обобщенного метода Чепмена — Энскога работ [18] и [20, 21] применительно к случаю смеси одноатомных газов.

В [18] в ряды по числу Кнудсена Kn << 1 разлагаются не только f_N, но и $\mathbf{u}_N$, T_N. Например, для $\mathbf{u}_N$ разложение имеет вид $\mathbf{u}_N = \mathbf{u}_N^{(0)} + \mathbf{u}_N^{(1)} + \ldots$ В отличие от метода Гильберта в данном случае разложение $\mathbf{u}_N$ имеет смысл перехода от $\mathbf{u}_N$ к новой зависимой переменной $\mathbf{u}_N^{(0)}$. Такой прием не влияет на газодинамические уравнения для истинных макроскопических величин: формальное доказательство этого факта аналогично приведенному в [19]. Однако практически переход от $\mathbf{u}_N^{(0)}$ к $\mathbf{u}_N$ достаточно сложен, что послужило причиной возникновения погрешностей в некоторых из результатов вычислений в [23]. Формально эти погрешности отвечают замене $\Delta_{NM}^{(0)} = \mathbf{u}_N^{(0)} - \mathbf{u}_M^{(0)}$ на $\Delta_{NM} = \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_M$. Учитывая $\Delta_{NM}^{(1)}$ в равенстве $\Delta_{NM} = \Delta_{NM}^{(0)} + \Delta_{NM}^{(1)}$, получим те же соотношения, что и в [23], за исключением формулы для коэффициента a_{11}. В итоге выражения для теплового потока $\mathbf{q}_m$ легкого компонента и $\mathbf{R}_m = -\mathbf{R}_M$, записанные в первом приближении по полиномам Сонина, примут вид (см. также [9])

$$\mathbf{q}_m = -\lambda_m \nabla T_m - \lambda_m \beta_{mM} \Delta, \quad \beta_{mM} \equiv \frac{32}{15}\frac{m n_M}{k}\left(\frac{5}{2}\Omega_{mM}^{(1,1)} - \Omega_{mM}^{(1,2)}\right) \tag{5.4}$$

$$\lambda_m \equiv \lambda \left[1 + 2 \frac{n_M}{n_m \Omega_m^{(2.2)}} \left(\Omega_{mM}^{(1.3)} - 5\Omega_{mM}^{(1.2)} + \frac{25}{4} \Omega_{mM}^{(1.1)} \right) \right]^{-1}$$

$$\mathbf{R}_m = \frac{16}{3} m n_m n_M \left[\Omega_{mM}^{(1.1)} \Delta + \frac{\mathbf{q}_m}{n_m k T_m} \left(\Omega_{mM}^{(1.1)} - \frac{2}{5} \Omega_{mM}^{(1.2)} \right) \right], \quad \Delta = \mathbf{u}_M - \mathbf{u}_m$$

где λ — коэффициент теплопроводности чистого легкого газа, остальные обозначения или соответствуют [23], или оговорены ранее.

Алгоритм обобщенного метода Чепмена — Энскога, использованный в данной работе, восходит к [20—22] и сразу дает результат в виде (5.4).

6. Нетрадиционность подхода к построению решения системы кинетических уравнений Больцмана при помощи обобщенного метода Чепмена — Энскога обусловила критику в его адрес. Критические замечания для случая многоатомных неравновесных газов подробно разобраны в [36]. Здесь остановимся на критике обобщенного метода Чепмена — Энскога для смеси одноатомных газов.

В [37, 38] осуществлено формальное применение обобщенного метода в варианте [20—22] с целью вывода макроскопических уравнений газовзвеси, состоящей из газа и тяжелых сферических частиц, обтекаемых газом в свободномолекулярном режиме. Для теплопроводности λ_m и вязкости η_m газа в [37, 38] получены формулы

$$\eta_m = \eta \left[1 + 8\alpha\Lambda_1 (s^2, \varkappa, \Sigma)\right]^{-1}, \quad \lambda_m = \lambda \left[1 + 13\alpha\Lambda_2 (s^2, \varkappa, \Sigma)\right]^{-1} \tag{6.1}$$

$$\alpha \equiv \frac{n_M}{n_m} \left(\frac{2\pi k T_m}{m} \right)^{1/2} \frac{r_M^2}{4\Omega_m^{(2.2)}}, \quad s^2 = \frac{m}{2kT_m} \Delta^2, \quad \varkappa = \frac{T_m}{T_w}, \quad \Delta = \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_M$$

Здесь η, λ — вязкость и теплопроводность чистого газа, Λ_1 и Λ_2 — сложные функции аргументов, индекс m снизу относится к газу, индекс M — к частицам, масса и радиус r_M которых много больше массы m и радиуса молекул газа. Далее, T_m и T_w — температура газа и частицы, Σ — параметр взаимодействия газа с поверхностью частицы, s — отношение модуля разности скоростей Δ к средней тепловой скорости газа.

В [39] отмечено, что для зеркально-диффузной схемы отражения при фиксированных значениях α, s, Σ и $\varkappa \to 0$ величины $\Lambda_1, \Lambda_2 \to -\infty$, т. е. коэффициенты η_m и λ_m становятся отрицательными. Отсюда в [39] сделан вывод о несостоятельности обобщенного метода Чепмена — Энскога (хотя, строго говоря, положительность коэффициентов переноса смеси доказана лишь для суммарных коэффициентов вязкости и теплопроводности; в анализе [37, 38] величина $\varkappa$ считалась конечной).

Не входя в детали многочисленных непоследовательностей работ [37, 38], подчеркнем, что указанный в [39] факт — следствие того, что авторы [37, 38] не провели аналогичного [23] анализа, а также отказались от рекомендаций [18] по «очищению» выражений для переносных свойств от внепорядковых членов. Согласно [18], парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности η_N, λ_N зависят от «своей» температуры и не зависят от Δ. То же самое показано в [23] и выше, причем в условиях применимости макроскопического описания величины $s \ll 1$. Можно показать для случая, рассматриваемого в [37, 38], что в Λ_q, $q = 1, 2$, необходимо считать $\varkappa = 1$, а $s \ll 1$. Это резко упрощает формулы [37, 38] для Λ_q и устраняет противоречие [39].

То, что в Λ_q необходимо считать $\varkappa = 1$, качественно объясняется следующим образом. При $\alpha\Lambda_q \sim 1$ операторы столкновений газовых частиц друг с другом и с частицами взвеси имеют величину одного порядка. При $\mathrm{Kn} \to 0$ они равны нулю по отдельности, т. е. система находится в равновесии, что при свободномолекулярных процессах может быть только при $T_m = T_w$. С уменьшением α допустимая величина разницы $|\varkappa - 1|$ растет, но ее влиянием можно пренебречь по сравнению с единицей. В пределе $\alpha \to 0$ разница $|\varkappa - 1|$ произвольна, но сам вклад столкновений с тяжелыми частицами пренебрежимо мал.

Более того, в формулах (6.1) присутствует ошибка, которую авторы [37, 38] не устранили путем сравнения полученного ими результата с известным для предельного случая зеркального отражения атомов от поверхности частиц.

Нетрудно показать, что свободномолекулярные операторы [37, 38] в этом случае переходят в интегралы столкновений Больцмана для молекул — упругих сфер с резко различающимися массами и диаметрами. Здесь, согласно [23] и (5.4)

$$\eta_m = \eta(1+8\alpha)^{-1}, \quad \lambda_m = \lambda(1+13\alpha)^{-1}$$

Между тем из (6.1) в случае зеркального отражения при $s \to 0$

$$\eta_m = \eta(1+8\alpha)^{-1}, \quad \lambda_m = \lambda(1-13\alpha)^{-1}$$

Иными словами, в формуле для λ_m из [37, 38] имеется ошибка в знаке.

Таким образом, в рекомендуемом [18, 23] для смесей одноатомных газов виде обобщенный метод Чепмена — Энскога не содержит противоречий, указанных в [39]. В то же время отмеченный в [39] факт весьма любопытен как иллюстрация неблагоприятного влияния на результат учета «внепорядковых» членов. Кроме того, в [25] осуществлена фактически проверка метода путем вычисления переносных свойств и соотношений Стефана — Максвелла обычной многокомпонентной смеси с замороженными внутренними степенями свободы молекул и сравнения полученных результатов с известными [34]. Совпадение результатов различных методов (при условии их правильного применения) продемонстрировано и в [9].

Ранее критика обобщенного метода Чепмена — Энскога была дана В. В. Струминским [40]. Согласно [17], система уравнений Больцмана для f_N в безразмерной форме записывается в виде

$$\varepsilon_0 \frac{df_N}{dt} = J_{NN}(f,f) + \sum_{M \neq N} \alpha_{NM} J_{NM}(f,f) \tag{6.2}$$

$$\varepsilon_0 \equiv \mathrm{Kn} \ll 1, \quad O(\varepsilon_0) \le \alpha_{NM} \le O(1)$$

При $\alpha_{NM} = O(1)$ имеем [40] случай Энскога, при $\alpha_{NM} = O(\varepsilon_0)$ — случай Струминского.

После рассмотрения частных ситуаций в [40] сформулирована теорема: «Все решения системы кинетических уравнений . . . сводятся к результатам либо Энскога, либо Струминского и не содержат в себе новых результатов». Эта теорема базируется, например, на таком утверждении: «Пусть α_{NM} — произвольная функция от ε_0, колеблющаяся в указанном интервале. В зависимости от вида функций, все решения системы . . . будут совпадать либо с результатами Энскога, либо с результатами автора».

Напомним, что решение уравнений (6.2) согласно обобщенному методу Чепмена — Энскога в формулировке [17, 18] при произвольных α_{NM} имеет вид

$$f_N = f_N^{(0)} + \varepsilon_0 f_N^{(1)} + \varepsilon_0^2 f_N^{(2)} + \ldots, \quad f_N^{(l)} = O(f_N^{(0)}), \quad l \ge 1 \tag{6.3}$$

$$f_N^{(0)} = f_N^{(0)}[\mathbf{u}_N^{(0)}, T_N^{(0)}]$$

где макропараметры $\mathbf{u}_N^{(0)}, T_N^{(0)}$ являются решениями соответствующих уравнений переноса, т. е. зависят от отношений $\varepsilon_0/\alpha_{KL}$, а в интегральные операторы уравнений для поправок $f_N^{(l)}$, $l \ge 1$, одновременно входят как линеаризованные интегралы столкновений $J_{NN}(\varphi^{(l)})$, так и самосопряженные части линеаризованных интегралов перекрестных столкновений $J^s_{NM}(\varphi^{(l)})$. По этой причине функции $f_N^{(l)}$ при $l \ge 1$ кроме отношений $\varepsilon_0/\alpha_{KL}$ зависят еще и напрямую от параметров α_{NM}. Иными словами, если предположить для простоты, что все $\alpha_{NM} = O(\alpha)$, структуру решения (6.3) как функции ε_0 и α можно записать следующим образом:

$$f_N = f_N^{(0)}(\varepsilon_0/\alpha) + \varepsilon_0 f_N^{(1)}(\varepsilon_0/\alpha, \alpha) + \varepsilon_0^2 f_N^{(2)}(\varepsilon_0/\alpha, \alpha) + \ldots \tag{6.4}$$

Если $\alpha = \Phi(\varepsilon_0)$, как в [40], выражение (6.4) можно переразложить по ε_0, получая в случае $\Phi = O(1)$ решение Энскога, а в случае $\Phi = O(\varepsilon_0)$ — решение Струминского. Но очевидно, что ни одно из них невозможно «плавно» перевести в другое из-за отсутствия даже асимптотической сходимости соответствующих разложений либо при $\alpha \sim 1$ (для решения Струминского), либо для $\alpha \sim \varepsilon_0$ (для решения Энскога).

Новый результат в [17, 18] состоял в основном в том, что был указан алгоритм решения уравнений (6.2), дающий результат в виде (6.3) для произвольных α_{NM}. В этой связи заметим, что решение со структурой (6.4), когда члены разложения f_N зависят от параметров, по которым производится разложение, типично для равномерно-пригодных методов возмущений вообще и метода Чепмена — Энскога в частности. В этом смысле достаточно упомянуть такой пример, как решение Чепмена — Энскога, примененное к течению в пограничном слое Прандтля при выборе за масштаб длины, по которому определяется число Кнудсена Kn, толщины этого слоя $\delta : \mathrm{Kn} \equiv l/\delta$, l — длина пробега. В первом (навье-стоксовом) приближении поправка к максвеллиану $f^{(0)}$ содержит, например, слагаемое

$$\mathrm{Kn}\, f^{(1)} \sim \mathrm{Kn}\, f^{(0)} A\mathbf{c} \cdot \nabla T \sim \mathrm{Kn}\, f^{(0)} A \left(c_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathrm{Kn}\, c_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

где y и x — безразмерные нормальная и касательная поверхности координаты.

Позже В. В. Струминский предложил методику [41, 42], уточняющую подход работы [40]. Смысл этого уточнения заключается в следующем: результаты применения обобщенного метода, например выражение для $f_N^{(1)}$, можно разложить по α_{KL}, получая в итоге решение Струминского; в работах [41, 42] предложена обратная процедура суммированияя ряда по α_{KL}. Результаты, конечно, совпадают, что показано в [9]. Для случая неравновесного многоатомного газа этот факт установлен в [43] для всех членов разложения функции распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М.: Изд-во МГУ, 1964. 281 с.
3. *Hamel B.* Two-fluids hydrodynamic equations for a neutral, disparate-mass, binary mixture//Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 1. P. 12—22.
4. *Goldman E., Sirovich L.* Equations for gas mixtures//Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 9. P. 1928—1940.
5. *Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е.* Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 31—45.
6. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. 331 с.
7. *Goebel C. J., Harris S. M., Johnson E. A.* Two-temperature disparate-mass gas mixtures; a thirteen moment description//Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 5. P. 627—635.
8. *Жданов В. М.* Явления переноса в многокомпонентной плазме. М.: Энергоиздат, 1982. 177 с.
9. *Шавалиев М. Ш.* Уравнения многожидкостной гидродинамики для смесей газов: Препринт № 28. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988. 29 с.
10. *Осипов А. И., Ступоченко Е. В.* Нарушение максвелловского распределения при химических реакциях. Реагирующая однокомпонентная система в термостате тяжелого газа//Теорет. и эксперим. химия. 1970. Т. 6. Вып. 6. С. 753—762.
11. *Бузыкин О. Г., Макашев Н. К.* Экзотермические газофазные реакции как причина возникновения многотемпературных течений многоатомных газов//ПМТФ. 1981. № 1. С. 87—95.
12. *Buzykin O. G., Galkin V. S., Makashev N. K.* Peculiarities and applicability conditions of macroscopic description of disparate molecular masses mixture motion//Pap. 13th Symp. RGD. V. 2. N. Y.; L.: Pl. Press. 1982. P. 1277—1284.
13. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме//Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183—272.
14. *Chmieleski R. M., Ferziger J. K.* Transport properties of a nonequilibrium partially ionized gas//Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 2. P. 364—371.
15. *Галкин В. С.* Применение метода Чепмена — Энскога к случаю двухтемпературной бинарной смеси газов//Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 6. С. 58—63.
16. *Галкин В. С.* К выводу уравнений двухтемпературной газодинамики модифицированным методом Чепмена — Энскога//Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 1. С. 145—153.
17. *Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К.* Обобщенный метод Чепмена — Энскога//Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 2. С. 304—307.
18. *Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К.* Обобщенный метод Чепмена — Энскога. 2. Уравнения многоскоростной многотемпературной смеси газов//Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 1. С. 15—27.
19. *Kogan M. N., Galkin V. S., Makashev N. K.* Generalized Chapman — Enskog method: derivation of

the nonequilibrium gasdynamic equations//Pap. 11th Int. Symp. RGD. 1978. Paris: CEA, 1979. V. 2. P. 693—734.

20. *Мацук В. А., Рыков В. А.* О методе Чепмена — Энскога для смеси газов//Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 49—51.
21. *Мацук В. А., Рыков В. А.* О методе Чепмена — Энскога для многоскоростной многотемпературной реагирующей смеси газов//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 5. С. 1230—1242.
22. *Колесниченко Е. Г., Лосев С. А.* Кинетика релаксационных процессов в движущихся средах//Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979. С. 209—229.
23. *Галкин В. С., Макашев Н. К.* Условия применимости и молекулярно-кинетический вывод уравнений многотемпературной многоскоростной газодинамики//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 6. С. 1443—1453.
24. *Fernandez de la Mora J., Fernandez-Feria R.* Two-fluid Chapman — Enskog theory for binary gas mixtures//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 7. P. 2063—2072.
25. *Галкин В. С., Макашев Н. К.* Модификация первого приближения метода Чепмена — Энскога для смеси газов//Изв. РАН МЖГ. 1992. № 4. С. 178—185.
26. *Grad H.* Theory of rarefied gases//Rar. Gas Dynam. London: Pergamon Press, 1960. P. 100—138.
27. *Morse T. F.* Energy and momentum exchange between nonequipartitation gases//Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 10. P. 1420—1427.
28. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
29. Таблицы физических величин: Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1006 с.
30. *Хаксли Л., Кромптон Р.* Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977. 672 с.
31. *Галкин В. С., Макашев Н. К.* Разложения в ряды и свойства интегралов столкновений частиц с резко различающимися массами//Тр. ЦАГИ. 1985. № 2269. С. 11—27.
32. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир. 1976. 554 с.
33. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
34. *Колесников А. Ф., Тирский Г. А.* Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях//Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982. С. 20—44.
35. *Fernandez de la Mora J., Fernandez-Feria R.* Kinetic theory of binary gas mixtures with large mass disparity//Phys. Fluids. 1987. V. 30. № 3. P. 740—751.
36. *Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К.* Область применимости и основные особенности обобщенного метода Чепмена — Энскога//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 126—136.
37. *Лунькин Ю. П., Мымрин В. Ф., Хоружников С. Э.* Уравнения переноса в полидисперсных газовзвесях//Аэродинамика разреж. газов. Вып. 11. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. С. 67—73.
38. *Лунькин Ю. П., Мымрин В. Ф.* Кинетическая модель газовзвеси//Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 1. С. 134—139.
39. *Кузнецов В. М.* Кинетические модели дисперсных сред с внутренними степенями свободы//ПМТФ. 1990. № 3. С. 113—119.
40. *Струминский В. В.* О методах решения систем кинетических уравнений газовой смеси//Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 3. С. 533—536.
41. *Струминский В. В., Турков В. Е.* О явлениях переноса в многокомпонентных газовых смесях: Препринт № 18. М.: АН СССР. Сектор механики неоднородных сред, 1987. 50 с.
42. *Струминский В. В.* Механика неоднородных сред//Молекулярная газодинамика и механика неоднородных сред. М.: Наука, 1990. С. 5—19.
43. *Макашев Н. К.* О свойствах обобщенного метода Чепмена — Энскога//Тр. ЦАГИ. 1976. № 1742. С. 27—39.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1992