

УДК 532.517.4

© 1994 г. Г. С. ГЛУШКО, А. Г. ГУМИЛЕВСКИЙ, В. И. ПОЛЕЖАЕВ

## ЭВОЛЮЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЛЕДОВ ЗА ШАРООБРАЗНЫМИ ТЕЛАМИ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Предлагается модель турбулентных следов за телами, основанная на уравнениях Рейнольдса, энергии и диссипации турбулентности, а также замыкающих соотношениях для коэффициентов турбулентного переноса. Проводится сравнительное исследование закрученных безымппульсных следов с нулевым и отличным от нуля моментом количества движения.

Эволюция турбулентных пятен в стратифицированных средах является одной из интереснейших задач геофизической гидродинамики. Эти пятна широко распространены и могут образовываться, например, в результате потери устойчивости в течениях со сдвигом скорости, из-за обрушения внутренних волн или из-за перемешивания жидкости в следах за телами. В следах компонента средней скорости, направленная вдоль движения тела, стремится к нулю. Поэтому в системе координат, связанной с телом, продольную координату можно отождествлять с временем. Вследствие этого эволюцию турбулентных пятен в стратифицированных средах со временем будем рассматривать на примере эволюции следов с ростом продольного расстояния.

Течения в следах за телами подробно изучены в [1—9]. В [1] исследовались следы за телом, снабженным винтовым двигателем и двигающимся в резервуаре с водой вдоль направляющей проволоки. Стратификация достигалась за счет добавления глицерина. Отмечается коллапс следа и интенсивное излучение внутренних волн. В [2] безымппульсный след имитировался областью частично перемешанной жидкости. В работе отмечаются три стадии коллапса области: начальная, характеризующаяся наиболее интенсивным расширением области и активной генерацией внутренних волн; промежуточная и заключительная, в которой преобладают диффузионные процессы, а рост толщины области заметно замедляется. В [3] исследовались законы вырождения пульсаций скорости и изменение размеров частично перемешанной области жидкости. В [4] содержится подробный обзор экспериментов, посвященных исследованию следов за различными конфигурациями тел.

В [5] на основе уравнений Навье — Стокса изучен коллапс пятна жидкости с линейным распределением плотности, отличным от распределения плотности в окружающей среде. В [6] исследовался коллапс области в стратифицированной по температуре и солёности жидкости (полное описание результатов расчетов содержится в отчете<sup>1</sup>). При компенсации плавучести нагретого пятна избыточной солёностью коллапс пятна сопровождается его расщеплением на отдельные прослойки. В [7] в линейной постановке решается задача о коллапсе асимметричных возмущений плотности и симметричных возмущений завихренности. Эти возму-

<sup>1</sup> Бунз А. В., Грязнов В. Л., Глушко Г. С. и др. Разработка математических моделей нелинейных гидродинамических процессов в стратифицированной среде и методов численного моделирования // Итоговый отчет Ин-та проблем механики и Ин-та прикладной физики. М., 1981. 277 с.

щения могут быть обусловлены закруткой жидкости в следах за телом. В [8] на основе уравнений Рейнольдса изучалась эволюция зоны турбулентного смешения. В [9] для исследования турбулентных незакрученных следов применялась широко распространенная  $k - \epsilon$  модель турбулентности. В то же время влияние закрутки на эволюцию следов недостаточно изучено. Вопросу эволюции закрученного турбулентного следа в стратифицированных средах и посвящена настоящая работа. В качестве исходных данных взяты распределения скоростей за сферой, из центра которой инжектируется закрученная струя [10].

1. Математическая модель. Турбулентный след за телом будем условно считать состоящим из двух частей: ближнего и дальнего следа [9]. Ближний след простирается от кормы тела до расстояния, которое тело проходит за сотые доли периода Вайсяля — Брента. В этой зоне силы инерции значительно превосходят силы плавучести, которыми можно пренебречь. Поэтому можно полагать, что в первой зоне турбулентный след распространяется в однородной жидкости, а поле температуры играет роль пассивной примеси [1, 4, 9]. Благодаря вытеснению элементов жидкости телом, турбулентной диффузии и перемешиванию жидкости средней окружной скоростью (в случае тела с винтом) плотность жидкости в следе выравнивается. Смещение элементов жидкости относительно уровня нейтральной плавучести обуславливает появление сил Архимеда, отсутствующих первоначально.

Дальний след, следующий непосредственно за ближним, соответствует расстоянию, которое тело проходит за несколько периодов Вайсяля — Брента. В этой зоне силы Архимеда сравниваются с силами инерции и далее вниз по течению их превосходят. Благодаря этим силам след генерирует внутренние волны и коллапсирует [1—4,9].

На временах нескольких периодов Вайсяля турбулентное движение в следе ламинаризуется, становится практически двумерным и неустойчивым по отношению к сдвигу скорости (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца). Благодаря этой неустойчивости след меандрирует в горизонтальной плоскости и распадается на отдельные вихри, напоминающие дорожку Кармана [4]. Будем считать, что конец второй зоны соответствует ламинаризации турбулентного следа, при этом число Рейнольдса порядка критического.

Ближнюю и дальнюю зоны будем описывать уравнениями Рейнольдса, записанными в приближении пограничного слоя и замкнутыми с помощью двухпараметрической модели турбулентности. Для описания поля скорости в ближней зоне удобно использовать цилиндрическую систему координат, а для описания поля температуры — декартову. Уравнения движения в первой зоне, а также замыкающие соотношения приведены в [11]. При определении температуры горизонтальная  $U$  и вертикальная  $V$  компоненты средней скорости пересчитываются через компоненты  $V_r, V_\varphi$  в цилиндрической системе координат

$$U = V_r \cos \varphi + V_\varphi \sin \varphi, \quad V = V_r \sin \varphi - V_\varphi \cos \varphi$$

Использование декартовой системы координат для описания температуры обусловлено тем, что распределение температуры среды  $T_r(y)$  не является осесимметричным. Выбор  $T_r$ , зависящий только от вертикальной координаты, предопределяет ее линейное распределение по глубине.

Для описания дальнего следа будем использовать декартову систему координат, причем для удобства от горизонтальной и вертикальной компонент скорости перейдем к переменным вихрь — функция тока. В приближении Буссинеска уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \epsilon_{wx}) \frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \epsilon_{wy}) \frac{\partial W}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (v + \varepsilon_{\omega x}) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + \varepsilon_{\omega y}) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] - \beta g \frac{\partial t}{\partial x} + Q$$

$$\Delta \Psi + \omega = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{\varepsilon_{wx}}{\text{Pr}_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{\varepsilon_{wy}}{\text{Pr}_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P - e$$

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( v + \frac{\varepsilon_{wx}}{\text{Pr}_e} \right) \frac{\partial e}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{\varepsilon_{wy}}{\text{Pr}_e} \right) \frac{\partial e}{\partial y} \right] + \frac{e}{k} (C_1 P - C_2 e) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (x + \varepsilon_{tx}) \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (x + \varepsilon_{ty}) \frac{\partial t}{\partial y} \right] -$$

$$- V \frac{\partial T_s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (x + \varepsilon_{ty}) \frac{\partial T_s}{\partial y} \right]$$

$$P = -\langle u^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} - \langle v^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial y} - \langle uv \rangle \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \langle uw \rangle \frac{\partial W}{\partial y} - \langle uw \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \beta g \langle v\theta \rangle$$

$$Q = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{\omega x}}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{\omega y}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\omega y}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\omega y}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\omega x}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\omega x}}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\varepsilon_{\omega x} + \varepsilon_{\omega y}] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\langle v^2 \rangle - \langle u^2 \rangle + 2 \frac{\partial V}{\partial y} (\varepsilon_{\omega x} + \varepsilon_{\omega y})]$$

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad U = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\langle uv \rangle = -\varepsilon_{\omega x} \frac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon_{\omega y} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \langle uw \rangle = -\varepsilon_{wx} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\langle uw \rangle = -\varepsilon_{wy} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \langle u\theta \rangle = -\varepsilon_{tx} \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \langle v\theta \rangle = -\varepsilon_{ty} \frac{\partial T}{\partial y}$$

Здесь  $\tau = z/W_0$  — время;  $\Psi$  — функция тока;  $W = W_0 - W_z$  — дефект скорости (с точностью до знака продольная скорость в неподвижной системе координат);  $k, e$  — энергия турбулентности и скорость ее диссипации;  $P$  — генерация турбулентной энергии;  $t = T - T_s(y)$  — отклонение средней температуры от температуры среды;  $\nu, \kappa$  — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — коэффициент термического расширения;  $C_1 = 1,44$ ;  $C_2 = 1,92$ ;  $\text{Pr}_k = 1$ ;  $\text{Pr}_e = 1,3$  — константы [12];  $\langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle, \langle uv \rangle, \langle uw \rangle, \langle vw \rangle, \langle u\theta \rangle, \langle v\theta \rangle$  — рейнольдсовы напряжения и потоки тепла.

Последнее слагаемое в выражении  $Q$  тождественно равно нулю, если для нормальных напряжений Рейнольдса воспользоваться аппроксимацией Колмогорова — Буссинеска

$$\langle v_i v_j \rangle = \frac{2}{3} \delta_{ij} k - C_\mu \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$

Начальные значения средних скоростей, температуры, энергии турбулентности и ее диссипации находятся из расчетов этих полей в конце первой зоны. Например, начальная завихренность определяется окружной компонентой средней скорости

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi)$$

Значения полей на границе следа необходимо задать таким образом, чтобы от границ не происходило отражение внутренних волн. По этой причине граничные значения завихренности, дефекта скорости и температуры будем определять из линейных уравнений внутренних волн, полученных из соответствующих уравнений (1.1) выбрасыванием конвективных и диффузионных членов. Внутренние волны характеризуются нулевыми значениями энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Поэтому постановка граничных условий для этих полей является искусственной. Тем не менее будем полагать, что энергия турбулентности и ее диссипация вне границ следа постоянны по пространству

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial \tau} = -\beta g \frac{\partial t_s}{\partial x}, \quad \frac{\partial t_s}{\partial \tau} = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial x} \frac{\partial T_s}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial k_s}{\partial n} = \frac{\partial e_s}{\partial n} = W_s = 0$$

Граничные значения функции тока  $\Psi_s$  определим из «открытых» граничных условий — условий излучения Зоммерфельда [13]

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial \tau} + c \frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) незамкнуты — они содержат неизвестные коэффициенты турбулентного обмена. Для их определения (параметризации одноточечных моментов пульсаций скорости и температуры) воспользуемся методом, предложенным в [14]. Предварительно сделаем несколько упрощающих предположений.

Турбулентные безимпульсные следы, распространяющиеся в однородной жидкости, асимптотически бессдвиговые. Действительно, согласно расчетам [11], окружная компонента средней скорости (вырождающаяся медленнее, чем радиальная или продольная компоненты) убывает по закону  $\tau^{-0.8}$ , а пульсационная скорость — по закону  $\tau^{-0.7}$ . Поэтому отношение генерации турбулентной энергии к ее диссипации, имеющее порядок  $\tau^{-0.2}$ , при удалении вниз по потоку стремится к нулю. Асимптотически малыми являются и сдвиговые напряжения Рейнольдса по сравнению с нормальными, например:  $\langle v_i v_j \rangle k^{-1} \sim \tau^{-0.1}$ .

Будем считать, что число Фруда  $Fr = W_0/D_0 N$ , вычисленное по скорости движения тела  $W_0$  и его диаметру  $D_0$ , достаточно большое. Тогда в конце первой зоны и во второй зоне можно пренебречь касательными напряжениями по сравнению с нормальными. Пренебрежем также конвекцией и диффузией одноточечных моментов по сравнению с их генерацией или диссипацией. Будем также полагать, что след генерирует внутренние волны, амплитуда которых мала по сравнению с длиной волны, т. е.  $\max |\partial t / \partial x| \ll \max |\partial T / \partial y|$ . При сделанных предположениях алгебраические уравнения для одноточечных моментов пульсаций скорости и температуры линейризуются и могут быть решены

$$\begin{aligned} \langle vu \rangle &= -Cs \frac{k^2}{e} \left( q \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad \langle uw \rangle = -Cs q \frac{k^2}{e} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \langle vw \rangle &= -Cs \frac{k^2 [K(1+K)^2 + G]}{e [1+K+0,5G][K(1+K)+G]} \frac{\partial W}{\partial y} \\ \langle u^2 \rangle &= \langle w^2 \rangle = 2sqk, \quad \langle v^2 \rangle = 2sk \\ \langle u\theta \rangle &= -2Cs q \frac{k^2}{e(1+K)} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \langle v\theta \rangle &= -2Cs \frac{k^2 K}{e [K(1+K)+G]} \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$C = C_d A^{-1}, \quad s = \frac{1}{1 + 2q}, \quad q = 1 + \frac{KG}{K(1 + K) + G}$$

$$G_s = \beta g \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial y} = (Nke^{-1})^2$$

Здесь  $G = C^2 G_s$ ;  $G_s$  — квадрат отношения частоты Вайсяля — Брента к частоте турбулентных пульсаций;  $A = 1,3$ ;  $K = 0,05$ ;  $C_d = 0,4$  — константы [14].

В отсутствие стратификации формулы (1.5) для касательных напряжений Рейнольдса с точностью до множителя ( $C_\mu = 0,09$ ;  $C/3 = 0,1$ ) совпадают со стандартной параметризацией (1.2). Совпадают также выражения для турбулентных потоков тепла — температурное турбулентное число Прандтля в (1.5) равно  $0,5(1 + K)$ . Однако нормальные напряжения Рейнольдса в отличие от (1.2) равны — это следствие пренебрежения касательными напряжениями по сравнению с нормальными. При наличии стратификации турбулентная вязкость и теплопроводность становятся анизотропными: при устойчивой стратификации пульсации вертикальной скорости, а вместе с ними вертикальный перенос турбулентного импульса и тепла подавляются. В то же время горизонтальные пульсации скорости, горизонтальный перенос импульса и тепла усиливаются.

Предложенные формулы для коэффициентов турбулентного обмена справедливы в следах за самодвижущимися телами с нулевым интегральным импульсом. В следах за буксируемыми телами касательные напряжения сравнимы с нормальными и коэффициенты обмена должны определяться также безразмерными градиентами скорости  $Z_{ij} = ke^{-1} \partial V_i / \partial x_j$ , имеющими порядок единицы. В этом случае вывод формул для коэффициентов обмена существенно усложняется. Поскольку при больших временах число  $G_s$  стремится к бесконечности, то будем полагать, что формулы (1.5) качественно правильно определяют коэффициенты турбулентного переноса и в случае следов с отличным от нуля импульсом.

Формулы (1.5) аналогичны формулам для коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности, предложенным в [9]. Дополнительной является параметризация касательного напряжения  $\langle v_i v_j \rangle$ , которым пренебрегают в [9] в уравнениях для вертикальной и горизонтальной компонент вектора средней скорости.

Важнейшими характеристиками следов являются интегральный импульс и момент количества движения

$$J = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (W_z W + 0,5 V_\varphi^2) d\varphi r dr \quad (1.6)$$

$$M = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\infty W_z V_\varphi d\varphi r^2 dr$$

Первый характеризует разбалансировку сил трения  $F_c$  и тяги  $F_T$ , действующих на тело, причем при  $J > 0$ ,  $F_c > F_T$ ; при  $J < 0$ ,  $F_c < F_T$ ; а при  $J = 0$  реализуется режим равномерного движения тела. Второй характеризует угловую скорость вращения тела относительно оси, параллельной вектору скорости движения. Чтобы тело, снабженное винтовым движителем, двигалось равномерно и поступательно, импульс и момент количества движения должны быть равны нулю.

2. Основные результаты. Цель настоящего исследования — определение влияния начальной закрутки на эволюцию безымппульсных следов за шарообразными телами.

Уравнения движения, записанные в безразмерной форме, интегрировались численно. В качестве масштабов длины и температуры использовались диаметр тела  $D_0$  и перепад температуры среды на масштабе длины  $D_0 \partial T_s / \partial y$ . В качестве масштаба скорости в ближней зоне использовалась скорость движения тела  $W_0$ ,

а в дальней — величина  $D_0 N^{-1}$ , характеризующая скорость элементов жидкости при коллапсе однородной по плотности области диаметром  $D_0$ .

При представлении уравнений в конечно-разностной форме конвективные члены аппроксимировались направленными разностями, а диффузионные — центральными. Использование аппроксимации Самарского [15] для диффузионных членов обеспечивало второй порядок точности схемы по поперечным координатам и первый — по продольной. Количество узлов разностных уравнений скорости, энергии и диссипации турбулентности менялось от 150 до 300. Поле температуры в ближней зоне рассчитывалось на сетке  $129 \times 129$ . В дальней зоне для поля скорости, температуры, энергии и диссипации турбулентности использовалась сетка  $129 \times 82$ . Когда границы следа достигали границ расчетной области, расчетная сетка сжималась в соответствующем направлении (вдоль осей  $x$ ,  $y$  или  $r$ ) в 2 раза.

Исследовалась эволюция закрученных следов за телом, представляющим собой сферу. Числа Рейнольдса и Фруда составляли  $R_e = W_0 D_0 / \nu = 10^6$  и  $Fr = W_0 / D_0 N = 10^4$ .

Начальные значения скорости, энергии турбулентности и диссипации задавались в соответствии со следующими формулами:

$$R \leq \sqrt{2} : W = W_m (1 - 0,5R^2)(1 - 1,5R^2)$$

$$V_\varphi = V_m R (1 - 0,5R^2)[1,84\delta + 3,14(1 - \delta)(1 - R^2)] \quad (2.1)$$

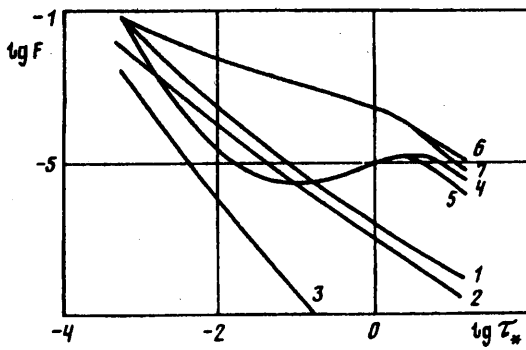
$$k = (k_m - k_s)(1 - 0,5R^2) + k_s, \quad e = (e_m - e_s)(1 - 0,5R^2) + e_s$$

$$R > \sqrt{2} : W = V_\varphi = 0, \quad k = k_s, \quad e = e_s \quad (2.2)$$

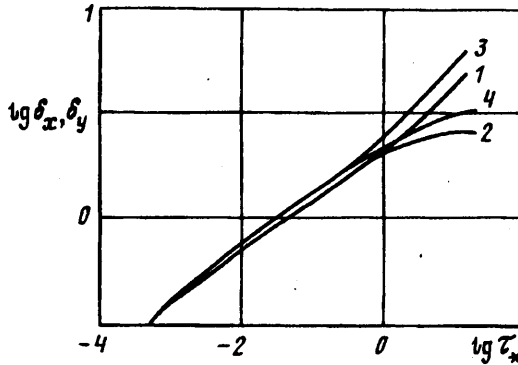
Здесь  $R = r/r_*$  — безразмерная радиальная координата ( $r_*$  — полутолщина следа);  $W_m, V_m, k_m, e_m = 2,5C_d k_m^{1,5} r_*^{-1}$  — максимальные значения соответствующих полей;  $\delta$  — параметр, задающий момент количества движения. Величины  $V_m/W_0, k_m/W_0^2, r_*/D_0$  брались на расстоянии пяти диаметров тела вниз по потоку в соответствии с экспериментальными данными [10], а максимальное значение дефекта скорости определялось из условия безымппульсности следа  $J = 0$ . Значения энергии турбулентности среды  $k$ , и скорости ее диссипации  $e$ , полагались равными 1% от значений  $k_m$  и  $e_m$ . Считалось также, что начальные возмущения температуры равны нулю. Иначе говоря, нагревом жидкости телом, а также смещением элементов жидкости относительно уровня нейтральной плавучести за счет эффекта вытеснения пренебрегалось.

В работе [11] исследована эволюция закрученных следов в однородной жидкости при малых дисбалансах сил. Поэтому останавливаться на обсуждении результатов при малых  $\tau_* = \tau N Fr^{-1} z D_0^{-1}$  не будем.

На фиг. 1 показаны зависимости  $\lg F$  от  $\lg \tau_*$ , где  $F$  — максимальные значения горизонтальной  $U_* = \max |U|/W_0$ , вертикальной  $V_* = \max |V|/W_0$  и продольной  $W_* = \max |W|/W_0$  компонент средней скорости, энергии  $k_* = \max k/W_0^2$  и диссипации турбулентности  $e_* = \max D_0 e/W_0^3$ . Дефект продольной скорости (кривая 1), энергия и диссипация турбулентности (кривые 2, 3) в следах с нулевым (в (2.1)  $\delta = 0$ ) и отличным от нуля ( $\delta = 1$ ) моментом количества движения вырождаются практически одинаково, согласно закону  $\tau_*^{-1,6}, \tau_*^{-1,4}, \tau_*^{-2,4}$ . В то же время горизонтальные и вертикальные скорости при  $\tau_* < 10^{-2}$  в следах с нулевым моментом вырождаются быстрее ( $\tau_*^{-3}$ ), чем в следах с отличным от нуля моментом количества движения ( $\tau_*^{-0,8}$ , кривые 4, 5 и 6, 7 соответственно). Это обусловлено тем, что в следах, распространяющихся в однородной жидкости, компоненты средней скорости представимы в виде суммы мод, каждая из которых убывает по степенному



Фиг. 1



Фиг. 2

закону с различным показателем [16]. Поэтому вырождение окружной и продольной компонент скорости определяется ее начальным распределением. В следах с  $M = 0$  при  $\tau_* \sim 10^{-1}$  вертикальная и горизонтальные компоненты скорости сравниваются со скоростями, обусловленными силами плавучести и далее вниз по потоку благодаря им начинают осциллировать. При  $\tau_* \sim 10$  скорости  $U_*$ ,  $V_*$  в следах с  $M = 0$  и  $M \neq 0$  становятся сравнимыми.

Энергия и диссипация турбулентности в первом и втором случаях вырождаются по законам  $\tau^{-1,4}$  и  $\tau^{-2,4}$ . В отличие от работы [8] более быстрого вырождения величины  $k_*$  (из-за превращения части турбулентной энергии в потенциальную) не наблюдается. Это обусловлено тем, что в [8] исследовался коллапс перемещенной турбулизованной и первоначально покоящейся жидкости. Здесь же в потенциальную энергию превращается часть кинетической энергии среднего движения.

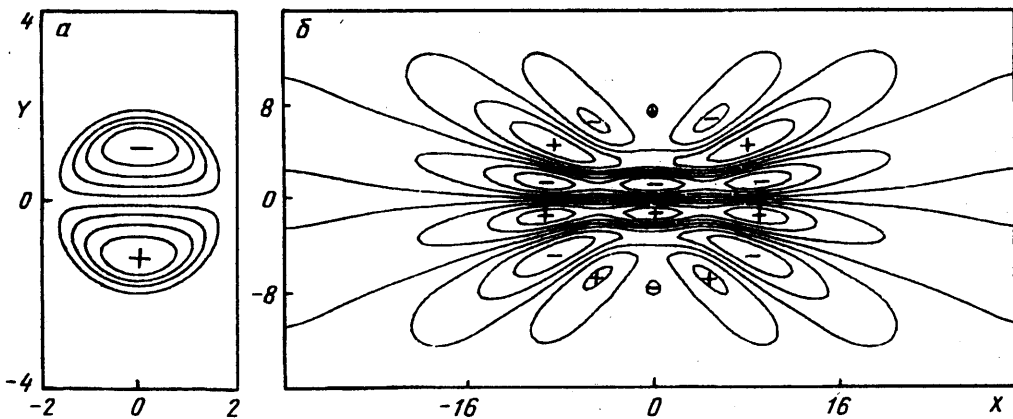
Рост вертикальной (кривые 1, 2) и горизонтальной (кривые 3, 4) толщин следов представлен на фиг. 2. Эти величины определялись как

$$\delta_x = (x_+ + x_-)/2D_0, \quad \delta_y = (y_+ + y_-)/2D_0$$

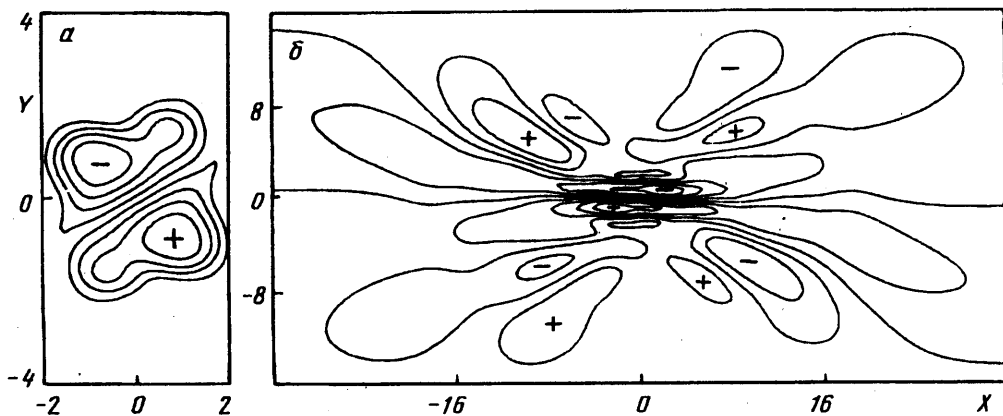
$$k(\pm x_{\pm}, 0) - k(\pm\infty, 0) = 0,5 [k(0, 0) - k(\pm\infty, 0)]$$

$$k(0, \pm y_{\pm}) - k(0, \pm\infty) = 0,5 [k(0, 0) - k(0, \pm\infty)]$$

На временах, меньших  $N^{-1}$ , величины  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  растут пропорционально  $\tau^{0,25}$ . При  $\tau > N^{-1}$  ширина следа растет, как  $\tau^{0,34}$ . В то же время рост толщины следов при  $\tau > 10N^{-1}$  прекращается и далее вниз по потоку следы сплющиваются. Интересно отметить, что в следах с нулевым моментом различие толщин



Фиг. 3



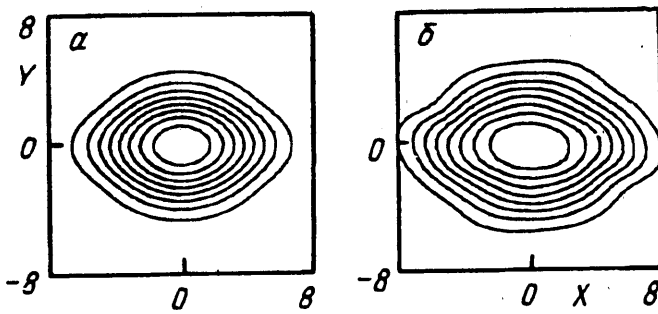
Фиг. 4

$\delta_x, \delta_y$  наступает несколько позже (кривые 1, 2), чем в следах с отличным от нуля моментом количества движения (кривые 3, 4).

Различие распределений окружной скорости в следах с  $M=0$  и  $M \neq 0$  предопределяет и различие начальных полей температуры при расчетах в дальней зоне. Вследствие противокрутки жидкость в следах с нулевым моментом перемешивается в меньшей степени, чем в следах с отличным от нуля моментом (фиг. 3,а и 4,а соответственно). Здесь показаны изолинии температуры  $\theta = tD_0^{-1} (\partial T_s / \partial y)^{-1}$ , соответствующие времени  $\tau_* = 0,1$ . На этих фигурах горизонтальная и вертикальная координаты нормированы на диаметр тела. Знаками плюс и минус помечены локальные максимумы и минимумы температуры. Представлены восемь изолиний с постоянным шагом, которые соответствуют изменениям температуры в пределах от  $-0,26$  до  $0,26$  и от  $-0,52$  до  $0,52$ . Если в первом случае возмущения плотности симметричны, то во втором наблюдается их асимметрия.

Выведенные из состояния гидростатического равновесия элементы жидкости стремятся вернуться к уровню нейтральной плавучести. Вследствие этого в поле течения при  $\tau_* \sim 0,1$  рождаются две пары вихрей, разбегающихся друг от друга вдоль оси  $x$  и сплюсчивающихся вдоль оси  $y$ . С течением времени на месте ушедших вихрей формируются новые пары и картина течения становится все более сложной [8]. В результате в следах с  $M=0$  формируется симметричное





Фиг. 5

поле внутренних волн (фиг. 3,б;  $\tau_* = 10$ ). Показанные изолинии соответствуют изменениям  $\theta$  от  $-0,059$  до  $0,059$ .

В начальный момент времени в следах с  $M \neq 0$  имеется вихревой жгут с положительной завихренностью. Асимметричное распределение плотности (фиг. 4, а), вызванное вихрем, обуславливает появление движения, противоположного первоначальной закрутке жидкости. Вследствие этого первоначальный вихрь дробится и, например при  $\tau_* = 5$ , в каждом из квадрантов плоскости  $xu$  появляются два вихря с противоположной завихренностью. Такое же количество вихрей наблюдается при  $\tau_* = 5$  в следах с нулевым моментом количества движения.

Распределение плотности в следах с  $M \neq 0$  с течением времени остается асимметричным. Это следует из фигуры 4,б, на которой представлены изолинии дефекта температуры, соответствующие времени  $\tau_* = 10$ . Температура изменяется в пределах от  $-0,23$  до  $0,23$ .

Движение в следах можно условно разбить на «турбулентное» и «волновое». Такое разбиение является следствием того, что область течения, в которой энергия турбулентности отлична от энергии окружающей среды, существенно меньше области возмущений плотности. В качестве иллюстрации на фиг. 5 приведены изолинии турбулентной энергии при  $\tau_* = 10$  в следах с нулевым (а) и отличным от нуля (б) моментом количества движения. Изолинии нанесены с постоянным шагом и соответствуют изменениям энергии  $10^9 \cdot k_*$  от 1,9 до 3 и от 2 до 4.

На временах, меньших  $10N^{-1}$ , средние скорости в следах малы по сравнению с пульсационными (фиг. 1). Поэтому генерация турбулентной энергии мала по сравнению с конвекцией и энергия играет роль пассивной примеси. Этим обусловлено симметричное распределение энергии в следах с нулевым моментом (фиг. 5,а) и слегка асимметричное в следах с ненулевым моментом количества движения (фиг. 5, б).

При возрасте следа, большем  $10N^{-1}$ , число Рейнольдса, вычисленное по горизонтальной скорости и размерам следа, порядка критического и след необходимо рассматривать с позиций теории устойчивости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schooley A. H., Stewart R. W. Experiments with self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient//J. Fluid Mech. 1963. V. 15. № 1. P. 83—96.
2. Wu J. Mixed region collapse with internal wave generation in a density-stratified medium//J. Fluid Mech. 1969. V. 35. № 3. P. 531—544.
3. Merritt G. E. Wake growth and collapse in stratified flow//AIAA Journal. 1974. V. 12. № 7. P. 940—949.
4. Lin J. T., Pao Y. H. Wakes in stratified fluids//Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 317—338.

5. *Young J. A., Hirt C. W.* Numerical calculation of internal wave motions//*J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. № 2. P. 265—276.
6. *Бунз А. В., Грязнов В. Л., Полежаев В. И.* Некоторые математические модели конвекции и внутренних волн в стратифицированной жидкости//*Соврем. вопр. мех. сплошной среды.* М., 1985. С. 41—46.
7. *Гордцов В. А.* Коллапс асимметричных возмущений в стратифицированной жидкости//*Изв. АН СССР. МЖГ.* 1991. № 6. С. 51—58.
8. *Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.* Подobie течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде//*Динамика сплошной среды.* Вып. 47. Новосибирск. 1980. С. 70—89.
9. *Hassid S.* Collapse of turbulent wakes in stably stratified media//*J. Hydronaut.* 1980. V. 14. № 1. P. 25—31.
10. *Костомаха В. А., Деснова Н. В.* Развитие турбулентного закрученного следа с нулевым избыточным импульсом//*Всесоюз. конф. «Проблемы стратифицированных течений».* Тез. докл. Канев, 1991. Т. 1. Канев, 1991. С. 30—31.
11. *Гумилевский А. Г.* Нарушение автомодельности в турбулентных осесимметричных следах с закруткой//*Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 1. С. 41—47.
12. *Лойцянский Л. Г.* *Механика жидкости и газа.* М.: Наука, 1978. 736 с.
13. *Han T. Y., Meng J. C. S., Innis G. E.* An open boundary condition for incompressible stratified flows//*J. Comput. Phys.* 1983. V. 49. № 2. P. 276—297.
14. *Гумилевский А. Г.* Применение уравнений Ланжевена к расчету коэффициентов турбулентного переноса//*Изв. РАН. МЖГ.* 1992. № 2. С. 47—54.
15. *Полежаев В. И., Бунз А. В., Везуб Н. А. и др.* Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
16. *Гумилевский А. Г.* Автомодельность и законы вырождения в следах с компенсацией по импульсу и моменту количества движения//*Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 5. С. 35—41.

Москва

Поступила в редакцию  
23.XII.1992