

УДК 532.59

© 1994 г. А. А. БОРИСОВ, Г. А. ХАБАХПАШЕВ

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Теоретически исследована динамика внутренних волн малой, но конечной амплитуды в двухслойной жидкости, ограниченной твердыми горизонтальными дном и крышкой. Для линейных возмущений границы раздела предложена полиномиальная аппроксимация дисперсионного соотношения, имеющая одинаковые асимптотики с точной формулой в предельных ситуациях очень длинных и коротких волн. В случае трехмерных слабонелинейных возмущений с медленно изменяющейся формой (в системе координат, движущейся вместе с волной) получено уравнение волнового типа. Это уравнение обладает стоксовскими решениями, которые совпадают с известными результатами для бесконечно глубоких слоев. При достаточной длине возмущений определены уединенные решения модельного волнового уравнения, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

В работе [1] предложена простейшая аппроксимация дисперсионного соотношения для волн на воде полиномиальным выражением. Это позволило вывести приближенную модель (два дифференциальных уравнения), пригодную в случае линейных возмущений произвольной формы и пологих неровностей дна. В [2] с помощью подхода [1] решена задача о накате гравитационных волн на откос постоянного уклона. Первый вариант «дифференциальной» модели для плоских возмущений небольшой, но конечной амплитуды, распространяющихся по свободной поверхности слоя жидкости постоянной глубины, получен в [3].

Целью данной статьи является применение изложенного в работах [1—3] метода к случаю волн в двухслойной жидкости, находящейся между твердыми горизонтальными дном и крышкой, а также исследование влияния параметров системы на точность найденных решений.

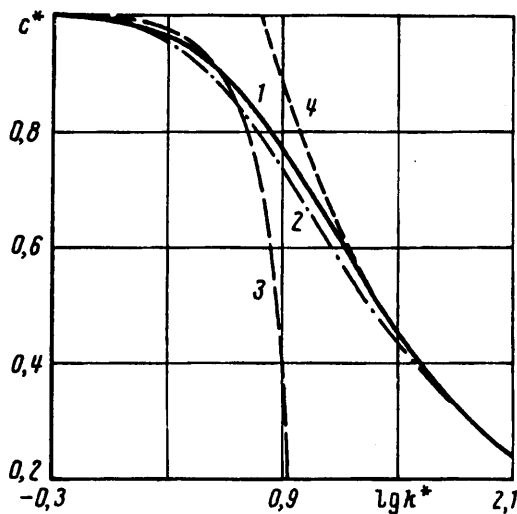
1. Полиномиальная аппроксимация дисперсионного соотношения. Хорошо известно (например, [4]) выражение, связывающее частоту  $\omega$  и волновое число  $k$  линейных монохроматических возмущений границы раздела двух идеальных, несжимающихся и несжимаемых жидкостей

$$\omega^2 [\rho_1 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)] = gk(\rho_2 - \rho_1) \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $h$  — глубина слоя,  $g$  — ускорение свободного падения; индексами 1 и 2 помечены величины, относящиеся к верхней и нижней жидкостям соответственно. При этом предполагается, что вся система первоначально находилась в состоянии покоя, а возникающее течение потенциально. Заменим приближенно трансцендентное уравнение (1.1) следующей полиномиальной связью:

$$\omega^2 + \omega^4 \frac{\beta}{g_+} = k^2 g \delta \quad (1.2)$$

$$\beta = \frac{h_1 h_2 (\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}, \quad \delta = \frac{h_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}, \quad g_+ = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$



Фиг. 1

Формулы (1.1) и (1.2) имеют одинаковые асимптотики в предельных ситуациях очень длинных ( $kh_1 \ll 1$ ;  $l = 1, 2$ ) и коротких ( $kh_1 \gg 1$ ) волн

$$\omega^2 \approx k^2 g \delta = k^2 c_0^2, \quad \omega^2 \approx |k| g_+ \quad (1.3)$$

Решения с комплексной  $\omega$  не рассматриваем. Ошибка аппроксимации определяется не только частотой возмущения, но и отношениями глубин слоев и плотностей жидкостей.

На фиг. 1 показана зависимость фазовой скорости возмущений от волнового числа для  $\rho_1/\rho_2 = 0,95$  и  $h_1/h_2 = 9$  (при этих значениях параметров системы выполнялся эксперимент [5]). Здесь  $c^* = c/c_0$ ,  $c = \omega/k$ ;  $k^* = kH$ ,  $H = h_1 + h_2$  — расстояние между дном и крышкой; линия 1 рассчитана по соотношению (1.1), 2 — (1.2), 3 вычислена по формуле

$$c^* = \sqrt{1 - (\beta k)^2/2} \quad (1.4)$$

полученной из равенства (1.2) в случае умеренно длинных волн, 4 — вторая асимптотика (1.3). Максимальное относительное отклонение приближенной дисперсионной кривой (1.2) от точной (1.1) составляет 6,6% и достигается при  $k^* \approx 13$ . Легко также найти области, в которых нельзя пользоваться выражениями (1.3) и (1.4).

2. Уравнения для возмущений небольшой амплитуды. Предположим, что волны характеризуются слабой нелинейностью;  $\eta_0 k / \text{th}(kh_m) \sim \varepsilon$ , где  $\eta_0$  — амплитуда возмущения границы раздела,  $h_m$  — глубина меньшего слоя,  $\varepsilon$  — малый параметр. Будем пренебрегать величинами третьего порядка малости. Допущение о том, что возникающее течение является безвихревым, приводит к соотношениям

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \nabla w_i \quad (2.1)$$

Здесь  $u$  — горизонтальная компонента вектора скорости жидкости,  $z$  — вертикальная координата, оператор  $\nabla$  определен в горизонтальной плоскости,  $w$  — вертикальная составляющая скорости жидкости.

В качестве исходных уравнений возьмем систему уравнений Эйлера, которую для рассматриваемой ситуации запишем в виде

$$\operatorname{div} u_i + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (u_i^2 + w_i^2) + \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_i^2 + w_i^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} + g = 0 \quad (2.4)$$

Здесь операция  $\operatorname{div}$  определена в горизонтальной плоскости;  $t$  — время,  $p$  — давление. Поставим обычные кинематические и динамические граничные условия на крышке, дне и границе раздела

$$w_1 = 0 \quad (z = h_1); \quad w_2 = 0 \quad (z = -h_2) \quad (2.5)$$

$$w_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_i \nabla) \eta, \quad p_1 = p_2 = p_i(t, x, y) \quad (z = \eta) \quad (2.6)$$

где  $\eta = \eta(t, x, y)$  — возмущение границы раздела. Проинтегрировав вертикальную компоненту уравнения движения (2.4) по  $z$ , имеем

$$p_i = p_i + \rho_i g (\eta - z) + \rho_i \int_z^{\eta} \frac{\partial w_i}{\partial t} dz + \frac{\rho_i}{2} \left[ u_i^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - u_i^2 - w_i^2 \right] \quad (2.7)$$

Здесь  $u_{ii}$  — значения горизонтальных составляющих скоростей жидкостей у границы раздела. При выводе данной зависимости использованы краевые условия (2.6).

Подставив выражение (2.7) в уравнение (2.3) и изменив порядок дифференцирования в этом уравнении, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i}{\partial t} + g \nabla \eta + \nabla \left( \int_z^{\eta} \frac{\partial w_i}{\partial t} dz \right) + u_{ii} \nabla u_{ii} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \nabla \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\nabla p_i}{\rho_i} = \\ & = \frac{\partial u_i}{\partial t} + g \nabla \eta + \int_z^{\eta} \frac{\partial \nabla w_i}{\partial t} dz + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta + u_{ii} \nabla u_{ii} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \nabla \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\nabla p_i}{\rho_i} = \\ & = \frac{\partial u_i}{\partial t} + g \nabla \eta + \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_z^{\eta} \nabla w_i dz \right) + u_{ii} \nabla u_{ii} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta + \frac{\nabla p_i}{\rho_i} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

С помощью равенства (2.1) исключим вертикальную компоненту скорости жидкости из горизонтальной составляющей уравнения движения

$$\frac{\partial u_{ii}}{\partial t} + g \nabla \eta + u_{ii} \nabla u_{ii} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta + \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i = 0 \quad (2.9)$$

Теперь проинтегрируем уравнения неразрывности (2.2) по координате  $z$  в пределах от  $\eta$  до  $h_1$  при  $l=1$  и от  $-h_2$  до  $\eta$  при  $l=2$ . Тогда

$$\partial \eta / \partial t + (-1)^l h_l \operatorname{div} \langle u_i \rangle + \operatorname{div} \langle (u_i) \eta \rangle = 0 \quad (2.10)$$

где угловыми скобками помечены средние по глубине слоев значения горизонтальных компонент скоростей жидкостей. При получении закона сохранения массы в форме (2.10) использованы кинематические краевые условия на крышке, дне и границе раздела.

Чтобы исключить переменные  $u_{ii}$ , необходимо связать их с величинами  $\langle u_i \rangle$  и  $\eta$ . В случае линейных волн это можно сделать приближенно с помощью известных зависимостей для вертикальных профилей горизонтальных составля-

ющих скоростей жидкостей [4]. В результате находим формулы для фурье-компонент  $u_{ii}$  и  $\langle u_{ii} \rangle$

$$u_{ii} = \langle u_{ii} \rangle kh_i / \text{th}(kh_i) \quad (2.11)$$

Сравнение соотношений (1.1) и (1.2) приводит к выражениям  $kh_i / \text{th}(kh_i) \approx 1 + \omega^2 h_i / g_+^*$ , благодаря чему равенства (2.11) запишем в виде

$$u_{ii} = \langle u_{ii} \rangle (1 + \omega^2 h_i / g_+^*) \quad (2.12)$$

а после обратного фурье-преобразования имеем

$$u_{ii} = \langle u_{ii} \rangle - \frac{h_i}{g_+^*} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

В случае слабонелинейных возмущений зависимости (2.11) и (2.12) остаются справедливыми, а соотношение (2.13) — нет. Решению типа волн Стокса для двух бесконечно глубоких слоев различной плотности [6] и длинноволновому пределу удовлетворяют формулы

$$u_{ii} = \langle u_{ii} \rangle - \frac{h_i + (-1)^j \eta}{g_+^*} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} - (-1)^j \frac{3h_i}{(g_+^*)^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} + 4u_{ii}' \quad (2.14)$$

Здесь  $u_{ii}'$  — скорости поступательного перемещения частиц жидкости у границы раздела бесконечно глубоких слоев в направлении движения волны, имеющие второй порядок малости и не зависящие ни от горизонтальных координат, ни от времени. Следовательно, в рассматриваемом приближении члены  $\partial u_{ii} / \partial t$  и  $u_{ii} \nabla u_{ii}$ , входящие в уравнение (2.9), не содержат величину  $u_{ii}'$ .

Подставив выражения (2.14) в уравнения (2.9), приходим к закону сохранения горизонтальной составляющей количества движения в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_{ii} \rangle}{\partial t} + g \nabla \eta - \frac{h_i}{g_+^*} \frac{\partial^3 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^3} - \frac{(-1)^j}{g_+^*} \frac{\partial}{\partial t} \left( \eta \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) - (-1)^j \frac{3h_i}{(g_+^*)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta + \frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \left( \langle u_{ii} \rangle - \frac{h_i}{g_+^*} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) \left[ \nabla \langle u_{ii} \rangle - \frac{h_i}{g_+^*} \frac{\partial^2 (\nabla \langle u_{ii} \rangle)}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для исключения величин  $\langle u_{ii} \rangle$  из системы законов сохранения (2.10) и (2.15) применим скалярно оператор  $\nabla$  к уравнению (2.15)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\text{div} \langle u_{ii} \rangle)}{\partial t} + g \Delta \eta - \frac{h_i}{g_+^*} \frac{\partial^3 (\text{div} \langle u_{ii} \rangle)}{\partial t^3} + \frac{1}{\rho_i} \Delta p_i + \text{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + (\nabla \langle u_{ii} \rangle)^2 + \langle u_{ii} \rangle \Delta \langle u_{ii} \rangle - \\ & - \frac{(-1)^j}{g_+^*} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{div} \left( \eta \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) \right] - \frac{h_i}{g_+^*} \Delta \left( \langle u_{ii} \rangle \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) - \frac{(-1)^j 3h_i}{(g_+^*)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) \right] + \\ & + \left[ \frac{h_i}{g_+^*} \nabla \left( \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) \right]^2 + \left( \frac{h_i}{g_+^*} \right)^2 \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \Delta \left( \frac{\partial^2 \langle u_{ii} \rangle}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Появившийся оператор Лапласа  $\Delta$  определен в горизонтальной плоскости. Далее, уравнение (2.10) перепишем в более удобной форме

$$(-1)^{j+1} h_i \text{div} \langle u_{ii} \rangle = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \text{div} \langle u_{ii} \rangle + (\langle u_{ii} \rangle \nabla) \eta$$

Подставив эти равенства в линейные члены уравнений (2.16) и умножив все члены данных уравнений на  $(-1)^{j+1} h_i$ , находим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)' (gh_i \Delta \eta + \frac{h_i}{\rho_i} \Delta p_i) - \frac{h_i}{g_+} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( 1 - \frac{h_i}{g_+} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [\eta \operatorname{div} \langle u_i \rangle + (\langle u_i \rangle \nabla) \eta] \right\} + \\
& + \frac{h_i}{g_+} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \nabla \right) \eta + \eta \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \langle u_i \rangle)}{\partial t^2} \right] + \frac{3h_i^2}{(g_+)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \nabla \eta}{\partial t^2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \langle u_i \rangle)}{\partial t^2} \right] - (-1)' h_i \left\{ \operatorname{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + (\nabla \langle u_i \rangle)^2 + \langle u_i \rangle \nabla \langle u_i \rangle - \right. \\
& - \frac{h_i}{g_+} \left[ \langle u_i \rangle \frac{\partial^2 \Delta \langle u_i \rangle}{\partial t^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \nabla \langle u_i \rangle \right) + \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \Delta \langle u_i \rangle \right] + \\
& \left. + \left( \frac{h_i}{g_+} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Delta \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \right] \right\} = 0 \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Для упрощения нелинейных членов уравнений (2.17) необходимо сделать ряд дополнительных предположений.

**3. Приближение квазистационарности возмущений.** Будем считать, что в системе отсчета, движущейся вместе с волной, форма возмущения меняется медленно, т. е.  $\eta = \eta(t - x/U, \epsilon x)$ , где  $x = (x, y)$ , а  $U$  — вектор скорости распространения волны. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
& \eta \operatorname{div} \langle u_i \rangle \approx (\langle u_i \rangle \nabla) \eta, \quad (\nabla \langle u_i \rangle)^2 \approx \langle u_i \rangle \Delta \langle u_i \rangle \\
& \left( \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \nabla \right) \eta \approx \eta \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \langle u_i \rangle)}{\partial t^2}, \quad \left( \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \nabla \eta}{\partial t^2} \right) \approx \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \langle u_i \rangle)}{\partial t^2} \\
& \langle u_i \rangle \frac{\partial^2 \Delta \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \approx \left( \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \nabla \langle u_i \rangle \right) \approx \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \Delta \langle u_i \rangle, \quad \left( \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \right)^2 \approx \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Delta \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Эти равенства являются точными для линейных волн:  $\eta = \eta_a \times \exp(i kx - i \omega t)$ . В нелинейных членах можно использовать простейшие связи средних значений скоростей и возмущения границы

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \langle u_i \rangle \approx - \frac{1}{h_i} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (\nabla \langle u_i \rangle)^2 \approx \frac{1}{h_i^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \\
& \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \nabla \langle u_i \rangle \approx \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \left( \frac{\partial^2 \nabla \langle u_i \rangle}{\partial t^2} \right)^2 \approx \frac{1}{h_i^2} \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right)^2 \tag{3.2}
\end{aligned}$$

В результате с помощью формул (3.1) и (3.2) из уравнений (2.17) легко исключаются горизонтальные компоненты скоростей жидкостей

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{h_i}{g_+} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - (-1)' \left\{ gh_i \Delta \eta + \frac{h_i}{\rho_i} \Delta p_i + \frac{2}{h_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{h_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( 1 - \frac{h_i}{g_+} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{2}{g_+} \frac{\partial}{\partial t} \left( \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right) - \frac{4}{g_+} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} + h_i \operatorname{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + \frac{2h_i}{(g_+)^2} \left[ 3 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right)^2 \right] \left. \right\} = 0 \tag{3.3}
\end{aligned}$$

В случае квазистационарных волн с точностью до членов второго порядка малости выполняются равенства

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}\right)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}\right) \quad (3.4)$$

Они опять-таки точны для линейных монохроматических возмущений. Таким образом, подстановка соотношений (3.4) в уравнения (3.3) позволяет записать эти уравнения в более компактном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{h_l}{g_+} \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - (-1)^l \left[ gh_l \Delta \eta + \frac{3}{2h_l} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial t^2} - \frac{1}{g_+} \frac{\partial^4 \eta^2}{\partial t^4} + h_l \operatorname{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) + \right. \\ \left. + \frac{7h_l}{2(g_+)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right)^2 \right] = (-1)^l \frac{h_l}{\rho_l} \Delta p_l \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если умножить уравнение (3.5) при  $l=1$  на  $h_2/\rho_2$ , а при  $l=2$  на  $h_1/\rho_1$  и сложить их, то получим для возмущений границы раздела двухслойной жидкости следующее уравнение волнового типа:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \eta - c_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - c_2 \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial t^2} - c_3 \frac{\partial^4 \eta^2}{\partial t^4} - c_4 \operatorname{div} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \nabla \eta \right) - c_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right)^2 = 0 \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) все коэффициенты определяются только физическими ( $\rho_1, \rho_2, g$ ) и геометрическими ( $h_1, h_2$ ) параметрами системы

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{\beta}{g_+}, \quad c_2 = \frac{3}{2} \frac{(\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2)}{h_1 h_2 (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} \\ c_3 = \frac{\rho_1 h_2 - \rho_2 h_1}{g_+ (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}, \quad c_4 = \delta, \quad c_5 = \frac{7\delta}{2(g_+)^2} \end{aligned}$$

Уравнение (3.6) выведено для трехмерных слабонелинейных квазистационарных возмущений произвольной длины.

4. Плоские бегущие решения модельного уравнения. Уравнение (3.6) обладает решениями типа волн Стокса, найденными в форме

$$\eta = a \cos \theta + \frac{a^2 \cos 2\theta}{12c_1 \omega^2} \left[ 2c_2 - \left( 8c_3 + \frac{1}{g} \right) \omega^2 + \frac{6\delta \omega^4}{(g_+)^2} \right] \quad (4.1)$$

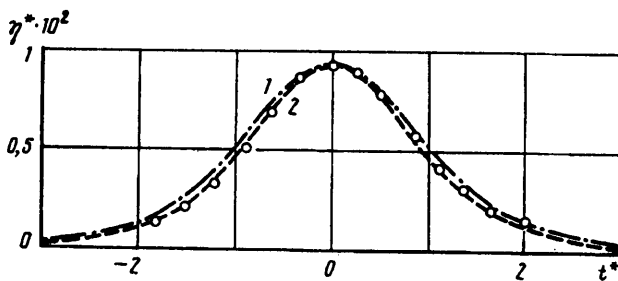
где  $\theta = kx - \omega t$ . Из-за нестандартного вида дисперсионного и нелинейных членов уравнения (3.6) в коэффициенты при гармонических функциях входит частота, а не волновое число, как в классическом разложении Стокса. В случае очень глубоких слоев выражение (4.1) упрощается и совпадает с первыми двумя слагаемыми ряда, приведенного в [6].

Если возмущения являются достаточно длинными ( $kh_m \leq \sqrt{\varepsilon}$ ), то можно пренебречь последними тремя членами в уравнении (3.6), а члены, опущенные в предыдущих разделах, будут иметь порядок малости не ниже четвертого. Поэтому для укороченного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - c_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^4} - c_2 \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

легко найти решения с точностью до слагаемых  $\sim a^3$  включительно

$$\begin{aligned} \eta = a \cos \theta + a^2 \frac{c_2 \cos 2\theta}{6c_1 \omega^2} + a^3 \frac{c_2^2 \cos 3\theta}{48c_1^2 \omega^4} \\ k^2 c_0^2 = \omega^2 + c_1 \omega^4 - a^2 c_2^2 / (6c_1) \end{aligned} \quad (4.3)$$



Фиг. 2

Формула (4.3) в отличие от (1.2) представляет собой дисперсионное соотношение, учитывающее амплитуду длинных возмущений.

Установившимися бегущими решениями уравнения (4.2) являются и кноидальные волны. В частности, для уединенных волн получаем

$$\eta = \eta_a \operatorname{sech}^2 \xi^*, \quad \eta_a^* = 2/3 c_2 \eta_a \quad (4.4)$$

$$\xi^* = \frac{x - Ut}{L}, \quad U = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \eta_a^*}}, \quad L = \frac{2\beta}{\sqrt{\eta_a^* (1 - \eta_a^*)}}$$

где  $\eta_a$ ,  $U$  и  $L$  — соответственно амплитуда, скорость и ширина солитона. Сравнение выражений (4.4) с аналогичными для уединенного возмущения модифицированного уравнения Буссинеска [7] обнаруживает, что при одинаковых амплитудах солитон (4.4) характеризуется почти такой же скоростью, а отношение ширины волн заметно зависит от отношений плотностей и глубин жидкостей.

На фиг. 2 изображены профили уединенных возмущений при  $\rho_1/\rho_2 = 0,95$  и  $h_1/h_2 = 9$ . Здесь  $\eta^* = \eta/H$ ,  $t^* = tc_0/H$ ; кривая 1 рассчитана по равенствам (4.4), линия 2 — по формулам (3.1) статьи [7], точками изображены экспериментальные данные [5]. Строго говоря, в опытах [5] не было крышки. Однако это не существенно, когда  $\rho_1 \approx \rho_2$  [8].

Таким образом, выведенное дифференциальное уравнение пригодно для описания эволюции внутренних волн при произвольных соотношениях глубин жидкостей и характерного горизонтального размера возмущения.

В заключение авторы выражают признательность Е. Н. Пелиновскому за плодотворное обсуждение ряда вопросов и ценные советы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелиновский Е. Н. «Дифференциальная» модель волн на воде//Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1231—1234.
2. Козлов С. И., Пелиновский Е. Н. Приближенный метод описания поверхностных волн в бассейне переменной глубины//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. № 12. С. 1321—1325.
3. Борисов А. А., Хабахнашев Г. А. «Дифференциальная» модель слабонелинейных волн на воде//Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 2. С. 450—452.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. Segur H., Hammack J. L. Soliton models of long internal waves//J. Fluid Mech. 1982. V. 118. P. 285—304.
6. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
7. Хабахнашев Г. А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 118—123.
8. Keulegan G. H. Characteristics of internal solitary waves//J. Res. Nat. Bureau Standards. 1953. V. 51. № 3. P. 133—140.