

УДК 532.546

© 1994 г. В. М. ЕНТОВ, В. В. МУРЗЕНКО

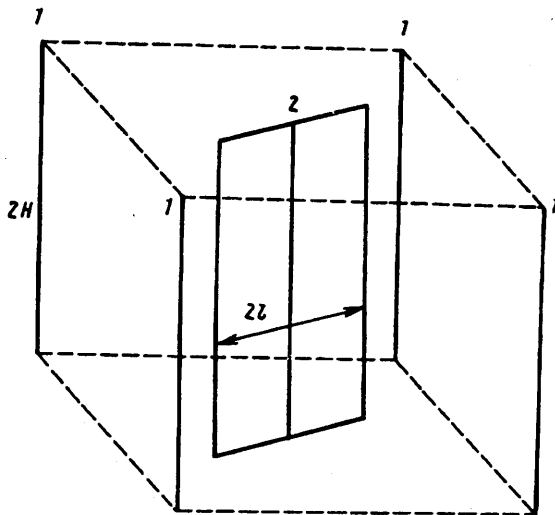
СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕМЕНТЕ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА

Рассматривается плоская задача стационарной фильтрации однородной жидкости в пятиточечном элементе разработки нефтяного пласта с трещиной гидроразрыва конечной проводимости. Предполагается, что движение жидкости в пласте и внутри трещины следует линейному закону сопротивления, проницаемость пласта и эффективная проницаемость трещины резко различны. Получены аналитические решения задачи для случая идеальной трещины (трещины бесконечной проводимости). Течения с учетом конечной проводимости трещины проанализированы численно.

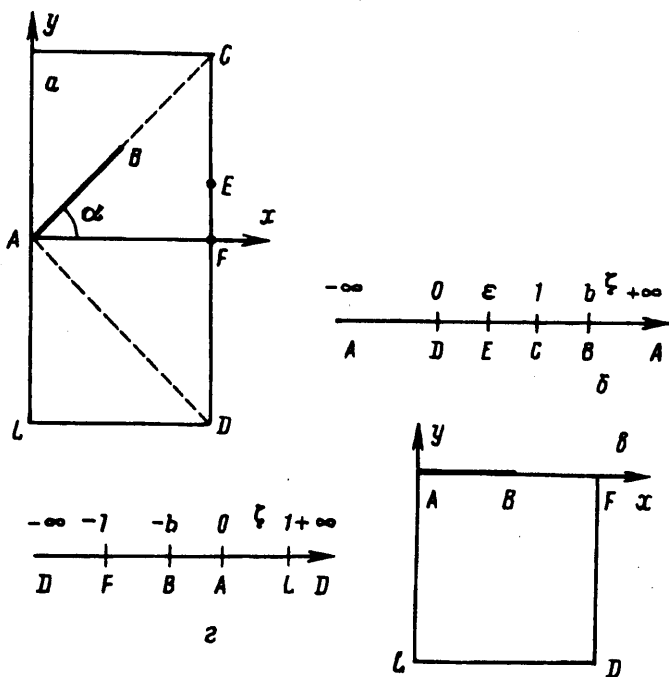
Гидравлический разрыв пласта, традиционно используемый как средство увеличения производительности скважин [1], становится сейчас основой новых технологий разработки месторождений. Связано это с тем, что появилась возможность проведения массивированного или глубоко проникающего гидравлического разрыва пласта, при котором размеры трещины гидроразрыва сопоставимы с расстоянием между скважинами. Естественно, это приводит к кардинальной перестройке потоков в пласте и для полного использования потенциальных возможных глубокопроникающего гидроразрыва, и для предотвращения негативных последствий (прежде всего — ранних прорывов заканчиваемой воды) необходимо детальное исследование влияния трещин на поля течения. Первым этапом является анализ наиболее простых однофазных потоков, которые служат основой для последующего изучения более сложных задач вытеснения и одновременно создают необходимое качественное представление о возможном влиянии трещин на поток.

Задача для трещины эллиптической формы, пересекающей одиночную вертикальную скважину в пласте неограниченной протяженности, решалась в [2] методом комплексного анализа. В [3] получены аналитические решения задачи плоской фильтрации вблизи линейных разломов для двух предельных случаев: когда проницаемость трещины много больше проницаемости пласта и когда разница между ними мала по сравнению с абсолютным значением проницаемости. Численное решение задачи о фильтрации вблизи разлома дано в [4] путем сшивки «грубого» решения вдали от разлома и «точного» — в самом разломе и вблизи от него. Исследование плоской стационарной фильтрации в пласте с вертикальной трещиной гидроразрыва проведено в [5] и проанализировано влияние параметров трещины на распределение фильтрационного потока через поверхность трещины по ее длине при различных формах раскрытия трещины.

1. Рассмотрим фильтрацию однофазной жидкости в пласте с постоянной толщиной $2H$ и однородной проницаемостью k . Пусть фильтрация вызывается действием системы вертикальных нагнетательных 1 и добывающих 2 скважин, расположенных в виде квадратной сетки. При этом нагнетательные скважины находятся в углах квадратов, а добывающие — в их центрах (пятиточечная схема разработки пласта [6]). Добывающие скважины пересекаются одинаково ориентированными вертикальными трещинами гидроразрыва одинаковой высоты $2H$



Фиг. 1



Фиг. 2

и длины $2l$ (фиг. 1). Ориентация трещин задается углом α между ее плоскостью и плоскостью, проходящей через центральные оси нагнетательных скважин (вид сверху половины элемента сетки скважин с трещиной приведен на фиг. 2, а). На добывающей скважине поддерживается постоянное давление $P=0$.

В качестве основного упрощающего предположения принято, что, несмотря на проведение трещины гидроразрыва, границы рассматриваемого элемента остаются непроницаемыми и его можно рассматривать независимо от остальной части пласта. Такое искусственное выделение элемента представляется неизбежным при переходе от реальной технической задачи к ее модели.

Пусть оси координатной системы xu параллельны сторонам элемента; на границах элемента предполагаются выполненными условия отсутствия потока жидкости. Распределение давления в пласте вне трещины описывается уравнением Лапласа с граничными условиями

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad x = -a, \quad x = a, \quad -a < y < a$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad y = -a, \quad y = a, \quad -a < x < a \quad (1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi}$$

Здесь $2a$ — длина стороны элемента; последнее условие (1.2) характеризует особенность в углах элемента; r — расстояние от центра соответствующей нагнетательной скважины, Q — ее расход.

Стационарное движение жидкости в трещине подчиняется уравнению неразрывности и закону Дарси (или его аналогу в случае незаполненной трещины)

$$\frac{d(Su)}{d\xi} = f^+ + f^-, \quad S = 2 \int_{-H}^H w(\xi, Z) dZ \quad (1.3)$$

$$u(\xi) = -\frac{k_c}{\mu} \frac{d\Phi}{d\xi} \quad (1.4)$$

Здесь u — скорость движения жидкости, Φ — давление в трещине, k_c — проницаемость трещины, $2w$ — раскрытие трещины, которое далее будем считать постоянным, μ — вязкость жидкости, ξ — координата, отсчитываемая от центра трещины, Z — поперечная координата, отсчитываемая по вертикали от середины трещины, f^\pm — полный поток жидкости из пласта в трещину через ее поверхность в расчете на единицу длины. Условия сопряжения течения в трещине с течением вне ее имеют вид

$$f^\pm = -2H \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial n^\pm}, \quad P = \Phi \quad (1.5)$$

Здесь n^\pm — координата, отсчитываемая по нормали от поверхности трещины.

Сформулированную задачу для пятиточечного площадного элемента будем называть задачей 1. Изменим эту задачу следующим образом. Пусть вдоль оси u проходит граница, на которой выполнено условие непротекания

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad -a < y < a \quad (1.6)$$

Задачу для половины площадного элемента с граничным условием (1.6) будем называть задачей 2. Ясно, что чем больше угол α , тем сильнее различия в решениях задач 1 и 2. Именно задача 2, как более простая, детально рассматривается ниже.

Введем безразмерные переменные соотношениями

$$P = Q_0 P', \quad Q = Q_0 Q', \quad x = lx', \quad y = ly', \quad \xi = l\xi', \quad \theta = 2w_0 k_c (kl)^{-1}$$

где w_0 — полуширина раскрытия трещины в точке $\xi = 0$, усредненная по Z , Q_0 — некоторое характерное значение расхода.

Тогда уравнения (1.3)—(1.5) примут вид (штрихи при безразмерных переменных опущены)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\theta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial P}{\partial n^+} + \frac{\partial P}{\partial n^-} = 0 \quad (1.7)$$

а уравнения (1.1), (1.2), (1.6)—(1.7) останутся без изменений.

2. Рассмотрим случай, когда трещина обладает бесконечной проводимостью по сравнению с проводимостью пласта. Тогда давление $\Phi = 0$ вдоль всей трещины и трещина представляет собой границу области течения, на которой $P = 0$. При этом легко получить точное решение задачи 1 методом конформных отображений.

Случай $\alpha = 45^\circ$. На фиг. 2, а схематически представлено расположение скважин и трещины. Предполагается, что скважины C и D имеют разные расходы — Q и q соответственно. Элементом симметрии течения является равнобедренный прямоугольный треугольник ACD .

Отобразим элемент симметрии в верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной ζ со следующим соответствием точек (фиг. 2, б): $\zeta(D) = 0$, $\zeta(C) = 1$, $\zeta(A) = +\infty$, $\zeta(B) = +b$, где b определяется из условий соответствия геометрии исходной задачи после решения. Для производной $F'(\zeta)$ отображения $z = x + iy = F(\zeta)$ имеем

$$\chi = \arg F'(\zeta) = \operatorname{Im} [\ln F'(\zeta)] = -\frac{\pi}{4}, \zeta \in DA; \chi = \frac{\pi}{2}, \zeta \in DC; \chi = \frac{5\pi}{4}, \zeta \in CA$$

Нетрудно найти

$$\frac{dz}{d\zeta} = F'(\zeta) = \mu_0 e^{i\pi/4} [(\zeta - 1)\zeta]^{-3/4} \quad (2.1)$$

где μ_0 — подлежащая определению вещественная константа.

Рассмотрим комплексный потенциал $W = -\varphi + i\psi$ и комплексную скорость $\omega = dW/dz$ как функции ζ . Имеем (см. фиг. 2, б)

$$\varphi = 0, \zeta \in AB; \psi = 0, \zeta \in AD; \psi = \frac{q}{8}, \zeta \in CD; \psi = \frac{q+Q}{8}, \zeta \in BC \quad (2.2)$$

$$\arg \omega = \theta(\zeta) \equiv \operatorname{Im} [\ln \omega] = \frac{\pi}{4}, \zeta \in AB, AD, BC; -\frac{\pi}{2}, \zeta \in EC; \frac{\pi}{2}, \zeta \in DE \quad (2.3)$$

При этом $\omega = 0$ в критической точке потока E , координата которой ε на плоскости ζ заранее неизвестна.

Используя (2.3), имеем [7]

$$\omega = C_1 e^{i\pi/4} \frac{\zeta - \varepsilon}{\sqrt{\zeta(\zeta - 1)} \sqrt{(\zeta - b)}} \quad (2.4)$$

Постоянная C_1 , определяющая нормировку скорости, остается при этом неопределенной.

Задача для потенциала с условиями (2.2) по симметрии имеет следующее решение. Рассмотрим течение в плоскости ζ во внешности луча $b \leq \operatorname{Re} \zeta < \infty$, на котором фиксировано постоянное значение потенциала $\Phi = 0$. Если положить, что в точках $D(\zeta = 0)$ и $C(\zeta = 1)$ действуют стоки с интенсивностями $q_D = q/4$ и $q_C = Q/4$, то это течение совпадет с искомым течением. Полагая $t = \sqrt{\zeta - b}$, получим для $W(t)$ задачу о течении в верхней полуплоскости, создаваемом источниками интенсивностей $-q/4$ и $-Q/4$, расположенными в точках $t_D = i\sqrt{b}$ и $t_C = i\sqrt{b} - 1$, при потенциале на вещественной оси $\Phi = 0$. Тогда, используя отражение относительно вещественной оси, имеем

$$W(\zeta) = -\frac{q}{8\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta - b} - i\sqrt{b}}{\sqrt{\zeta - b} + i\sqrt{b}} - \frac{Q}{8\pi} \ln \frac{\sqrt{\zeta - b} - i\sqrt{b} - 1}{\sqrt{\zeta - b} + i\sqrt{b}} \quad (2.5)$$

Выражения (2.1), (2.4) и (2.5) полностью определяют искомое отображение, так как, интегрируя (2.1), можно получить параметрическую зависимость W , ω и z от вспомогательной переменной ζ . При этом решение содержит вещественные постоянные μ_0 , C_1 , b , ε , для отыскания которых, принимая за нуль комплексную координату точки $A(z_A = 0)$, имеем условия

$$z_D = z(1) = a(1 - i), \quad z_B = z(b) = \exp(i\sqrt{4}i\pi)$$

Используя соотношение $\omega = \omega(\varepsilon) = 0$, с учетом (2.5) и (2.1) имеем

$$\varepsilon = \frac{q\sqrt{b}}{Q\sqrt{b-1} + q\sqrt{b}} \quad (2.6)$$

$$\omega = \frac{dW/d\zeta}{dz/d\zeta} = - \frac{\exp(-3\pi i/4) q\sqrt{b}}{8\mu_0\pi\varepsilon\sqrt{\zeta-b}} \frac{\zeta - \varepsilon}{[\zeta(\zeta-1)]^{3/4}}$$

Сравнивая это выражение с (2.4), находим

$$C_1 = \frac{q\sqrt{b}}{8\mu_0\pi\varepsilon} = \frac{Q\sqrt{b-1} + q\sqrt{b}}{8\pi\mu_0} \quad (2.7)$$

Для определения константы μ_0 воспользуемся условием $z(B) = l \exp(i\pi/4)$ и уравнением (2.1)

$$l = \mu_0 I_0(b), \quad I_0(b) = \int_b^{\infty} \frac{dt}{[(t-1)t]^{3/4}} \quad (2.8)$$

Отсюда с учетом условия $z(D) = a(1-i)$ и соотношения (2.1) получим

$$\mu_0 = \frac{a\sqrt{2}}{I_1}, \quad I_1 = I_0(1) \quad (2.9)$$

Таким образом, соотношения (2.6)–(2.9) позволяют определить все недостающие параметры задачи.

Для анализа задач, в которых заданы не дебиты скважин, а забойные давления, полезно знать асимптотику потенциала вблизи точек потока.

Из (2.5), (2.9) и (2.1) при $\zeta \rightarrow 1 (z \rightarrow z_C)$ имеем

$$\Phi_C = QJ(\rho_C, b-1) - qM$$

$$J(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{xI_1}{8ay^{3/4}}, \quad M = \frac{1}{8\pi} \ln \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b-1}}{\sqrt{b} - \sqrt{b-1}}$$

Здесь ρ_C — малое расстояние от точки C — «радиус скважины в точке C ». Аналогичным образом в окрестности точки D имеем из (2.5) и (2.1)

$$\Phi_D = qJ(\rho_D, b) - 4QM \quad (2.10)$$

При заданных значениях Φ_C и Φ_D (напомним, что за нуль взято значение потенциала на трещине) и радиусах скважин ρ_C и ρ_D соотношения (2.10) с учетом (2.8) и (2.9) позволяют рассчитать дебиты скважин Q и q . Формулы (2.10) далее используются для верхней оценки продуктивности скважин, когда трещина гидроразрыва имеет конечную проводимость.

Случай $\alpha = 0^\circ$. Предположим, что интенсивности всех скважин, расположенных по углам элемента, равны q . Тогда вместо исходного квадрата можно рассмотреть его четверть — например, расположенную в третьем квадранте (фиг. 2, в). При этом точки A и B соответствуют середине и концу трещины, а D — нагнетательной скважине.

Как и в предыдущем случае, отобразим выделенную четверть элемента на верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной ζ со следующим соответствием точек (фиг. 2, z):

$$\zeta(A) = 0, \zeta(L) = 1, \zeta(D) = +\infty \quad (2.11)$$

Значение $\zeta(B) = -b$ определяется в процессе решения из соответствия исходной геометрии задачи. Значение $\zeta(F) = -1$ получено из условия $\zeta(L) = 1$ в силу симметрии отображения $\zeta(z)$.

Если ввести потенциал $W = -\Phi + i\psi$, то легко найти отображение $\zeta(W)$

$$\zeta = 1/2 \{ \operatorname{ch}(4iW\pi/q) - 1 \} b \quad (2.12)$$

В соответствии с условиями (2.11) уравнение для $\zeta(z)$ имеет вид

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{I_2 \sqrt{\zeta(\zeta^2 - 1)}}, \quad I_2 = I_3(1), \quad I_3(b) = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} \quad (2.13)$$

где учтено, что координата точки $Ez = -i$, а $C-z = 1$.

Пусть ρ_D — радиус скважины D . Тогда из (2.12) и (2.13) находим (при $\rho \ll 1$)

$$\Phi_D = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{I\rho_D \sqrt{b}}{4a}, \quad I = aI_3(b) \quad (2.14)$$

Второе уравнение, полученное из (2.13), позволяет найти параметр b по известному a .

Формула (2.14) далее также будет использована для оценки максимальной продуктивности скважины, когда трещина гидроразрыва имеет конечную проводимость.

3. В общем случае для численного решения уравнения (1.1) использована галеркинская формулировка метода конечных элементов [8].

Применялись четырехугольные серендиповы базисные элементы и базисные функции в виде полиномов второй степени по каждой координате. Для расчета на криволинейных сетках использовались изопараметрические элементы, когда координаты x и y представляются в виде суммы по тем же базисным функциям, что и P . При решении соответствующих алгебраических систем уравнений применялся метод факторизации [9].

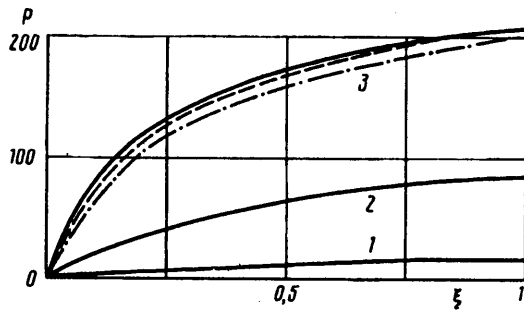
Давление вблизи скважины при заданном расходе рассчитывалось на основе точного решения уравнения для точечного источника с учетом значений давления в ближайших к скважине узлах базисного элемента. Относительная погрешность такого расчета не превышала 2%.

Результаты расчетов при $a = 1, 2$ и $Q = 400$ представлены на фиг. 3—5. Распределение давления P вдоль трещины приведено на фиг. 3 для случаев $\theta = 6,67, 0,833$ и $0,104$ (линии 1—3). На фиг. 4 приведено распределение потока вдоль трещины $u = \theta \partial P / \partial \xi$ для тех же значений параметров, а плотность потока жидкости в трещину, определяемая величиной $f = f^* + f$, — на фиг. 5.

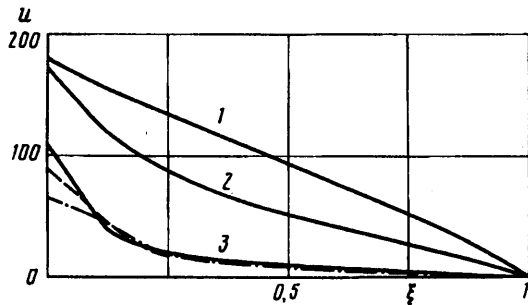
Из приведенных результатов видно, что при $\theta > 5$ проводимость можно считать бесконечной (а трещину идеальной).

Из распределения f следует, что основная часть потока жидкости попадает в трещину вблизи ее центра, в особенности при малых θ . При $\theta \ll 1$ более 75% притока осуществляется на $1/4$ трещины, что отчетливо видно по распределению величины u , которая представляет собой интеграл от f по ξ (как следует из (1.7)). Для идеальной трещины приток осуществляется почти равномерно по всей длине трещины, причем имеет место некоторое возрастание f с приближением к концу трещины, отражающее наличие здесь стандартной корневой особенности потока.

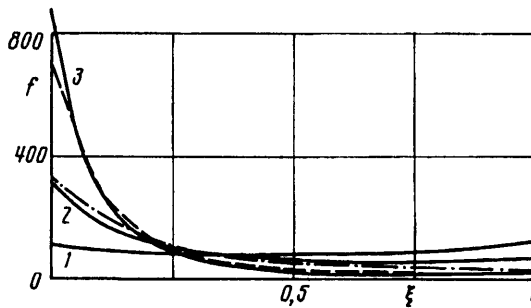
Расчеты с различными значениями a и $\theta = 0,104$ представлены штриховыми ($a = 2,5$) и штрихпунктирными ($a = 5$) линиями. Из приведенных результатов



Фиг. 3



Фиг. 4



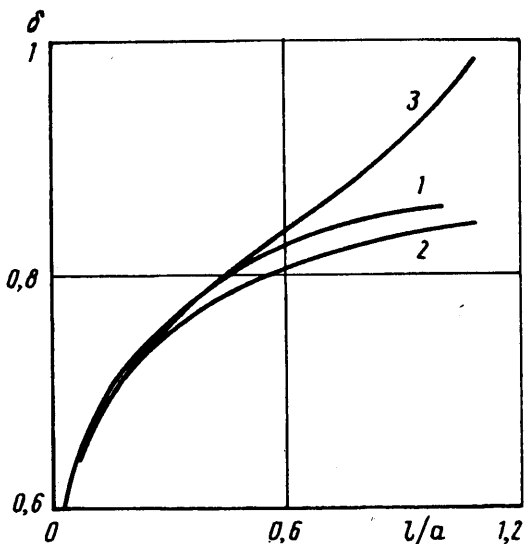
Фиг. 5

видно, что распределения характеристик потока вдоль трещины при различных a оказываются приблизительно одинаковыми. С увеличением a уменьшается значение интенсивности потока f в середине трещины (точка $x=0$).

Для определения влияния ориентации трещины на стационарную фильтрацию в пятиточечном площадном элементе были проведены расчеты при $\alpha = 22,5$ и 45° для тех же a . Значения параметра θ брались такими же, как и в предыдущих случаях. Анализ распределений давления, скорости фильтрации и потока вдоль трещины показал, что при выбранных соотношениях размеров элемента и трещины они практически не отличаются от соответствующих распределений для случая $\alpha = 0^\circ$.

При α , отличных от нуля, решения задач 1 и 2, сформулированных выше, различны. Для характеристики отклонения решения задачи 2 от решения задачи 1 используем различия в распределении P вдоль линии $x=0$ по разные стороны от точки $y=0$.

Из результатов расчетов следует, что с уменьшением параметра гидравлической проводимости трещины θ различия в распределении давления уменьшаются. При больших θ эти различия значительны — относительно среднего значения они



Фиг. 6

составляют 60% для $\alpha = 45^\circ$ и 30% для $\alpha = 22,5^\circ$ при $\theta = 104,2$. При $\theta = 0,104$ и $\alpha = 45^\circ$ отклонение не превышает 5%.

С уменьшением длины трещины различие между решениями задач 1 и 2 уменьшается. Так, при $a = 5$ и тех же параметрах задачи, что и в случае $a = 1, 2$, даже при «неблагоприятных» значениях параметров $\alpha = 45^\circ$ и $\theta = 104,2$ отклонение не превышает 10%.

Таким образом, в области больших проводимостей и малых длин трещин, когда одновременно $\theta \geq 30$ и $a \leq 2$, решения задач 2 и 1 значительно отличаются друг от друга. Косвенно это указывает также на заметное влияние на поток условий на фиктивных границах элементов, т. е. на «интерференцию» элементов.

На основе данных расчета давления в скважинах были вычислены эффективные коэффициенты продуктивности $\delta = Q/P$.

Зависимость эффективного коэффициента продуктивности от длины трещины с постоянным раскрытием приведена в таблице при $\alpha = 0^\circ$ (разд. 1) для различных значений θ . Точное решение для трещины бесконечной проводимости приведено в колонке А.

Из результатов расчетов видно, что продуктивность увеличивается на 35% при $a = 1, 2$ и на 30% при $a = 5$, когда θ увеличивается в приведенном в расчетах интервале.

Увеличение размеров трещины также повышает продуктивность. При $\theta = 0,104$ продуктивность δ возрастает на 13% при увеличении относительной длины трещины l/a с 0,2 до 0,83, а при $\theta = 104$ — на 17%.

Зависимость δ от приведенной длины трещины l/a при $\alpha = 45^\circ$ также представлена в таблице, при этом рассчитывался дебит скважины, направление к которой перпендикулярно плоскости трещины (разд. 2). Аналогичные зависимости для другой скважины, в сторону которой обращена трещина, приведены в разд. 3. Видно, что расчетные зависимости удовлетворительно согласуются с точным решением.

Из приведенных результатов следует, что изменение угла ориентации трещины от $\alpha = 0$ до 45° приводит к увеличению продуктивности скважины, в сторону которой направлена трещина, на 8% при $a = 1, 2$ и $\theta = 104,2$. При тех же условиях продуктивность скважины, к которой трещина обращена своей плоскостью, с увеличением α уменьшается на 6%. При $\theta = 0,104$ продуктивности скважин практически не зависят от α . Для сравнения на фиг. 6 приведены

№№ п.п.	l/a	A	θ			
			104	6,67	0,83	0,1
1	0,83	0,851	0,848	0,828	0,748	0,625
	0,4	0,786	0,784	0,766	0,692	0,584
	0,2	0,724	0,723	0,707	0,644	0,552
2	0,83	0,830	0,795	0,783	0,726	0,629
	0,4	0,773	0,749	0,735	0,676	0,585
	0,2	0,715	0,704	0,691	0,636	0,556
3	0,83	0,898	0,917	0,890	0,778	0,636
	0,4	0,785	0,794	0,775	0,698	0,586
	0,2	0,718	0,722	0,707	0,644	0,557

зависимости δ от l/a , полученные из аналитических решений при $\alpha = 0$ и 45° (обозначения соответствуют таблице).

Таким образом, ориентационные эффекты оказываются неожиданно малыми, что существенно упрощает гидродинамические расчеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Константинов С. В., Гусев В. Н. Техника и технология проведения гидравлического разрыва пластов за рубежом//Обз. ВНИИОЭНГ, 1985. № 12/101. 60 с.
2. Кадет В. В., Селяков В. И. Фильтрация флюида в среде, содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва//Изв. вузов. Нефть и газ. 1988. № 5. С. 54—60.
3. Мальковский В. И., Пэк А. А., Арсеньев П. А., Топор Д. Н. Моделирование конвективного тепло- и массопереноса при фильтрации флюидов по зонам разломов//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 12. С. 63—68.
4. Гуревич А. В., Крылов А. Л., Топор Д. Н. Решение плоских задач гидродинамики пористых сред вблизи разрывных нарушений методом комплексного потенциала//Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 846—850.
5. Зазовский А. Ф., Тодуа Г. Т. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 107—116.
6. Фазлыев Р. Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений. М.: Недра, 1979. 255 с.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
8. Huyakorn P. S., Pinder G. F. Computational methods in subsurface flow. N. Y. et al.: Acad. Press, 1983. 473 p.
9. Норри Д., Фриз Ж. де. Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1982. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1992