МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 533.6.011

© 1993 г. О. М. КИСЕЛЕВ, Ш. Э. МУХАМЕТРАХИМОВ

# ТРАНСЗВУКОВОЕ ИСТЕЧЕНИЕ НЕСОВЕРШЕННОГО ГАЗА ИЗ СОСУДА С ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Трансзвуковые изэнтропические течения несовершенного газа [1] исследовались в одномерной постановке в работах [2—5]. В [6] исследовалась в двумерной постановке задача о трансзвуковом истечении струи термически совершенного газа с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы молекул (газ калорически несовершенный). Ниже рассматривается задача о трансзвуковом истечении из сосуда с плоскими стенками реального (термически и калорически несовершенного) газа. Предлагается метод решения. Приводятся результаты расчета, характеризующие влияние угла между стенками и параметров торможения на трансзвуковое истечение воздуха.

Рассматривается плоское стационарное изэнтропическое истечение невязкого, нетеплопроводного газа из бесконечного симметричного сосуда с прямолинейными стенками, образующими между собой угол $2\theta_0$. В бесконечно удаленной точке, где газ покоится, его состояние характеризуется температурой $T_0$ и давлением $p_0$. Давление окружающей среды $p_a$ таково, что реализуется трансзвуковое истечение с максимальным расходом (выполняется условие $\varepsilon_a \le \varepsilon_{**}$, где $\varepsilon = p_a/p_0$, $\varepsilon_{**}$ — второе критическое отношение давлений, значение которого зависит от состава газа и параметров $T_0$, $p_0$, $\theta_0$).

В верхней половине физической плоскости $x$, $y$ имеется область независимого трансзвукового течения, ограниченная стенкой сосуда $A_1B$, участком $AC$ оси симметрии $x$ и предельной характеристикой $BC$ (фиг. 1, *а*; штриховая кривая $BC$ — звуковая линия, $BD$ — свободная поверхность). Соответствующая область в плоскости $\lambda$, $\theta$ ($\lambda$ — приведенная скорость, $\theta$ — угол наклона скорости к оси $x$) показана на фиг. 1,*б* (отрезку характеристики $BB_1$ в физической плоскости отвечает кромка сосуда $B$).

Термическое уравнение состояния газа будем считать заданным в виде

$$p = \rho_c T_c R \omega \tau \left(1 + \sum_{i=1} \sum_{k=0} b_{ik} \frac{\omega^i}{\tau^k}\right), \quad \omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c} \tag{1}$$

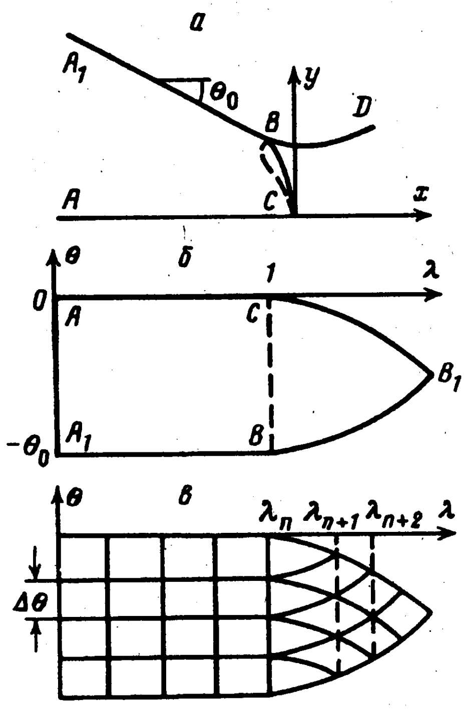
Здесь $p$, $\rho$, $T$ — давление, плотность и температура газа, $R$ — газовая постоянная, $\rho_c$, $T_c$ — значения $\rho$ и $T$ в критической точке диаграммы фазовых переходов, $b_{ik}$ — некоторые постоянные.

Будем также считать известными коэффициенты $\alpha_k$, $\beta_k$ в выражении

$$c_p^\circ = R\left(\sum_{k=0} \alpha_k \tau^k + \sum_{k=1} \beta_k \tau^{-k}\right) \tag{2}$$

где $c_p^\circ$ — изобарная теплоемкость в идеально газовом состоянии. (Для целого ряда технически важных газов коэффициенты $b_{ik}$, $\alpha_k$, $\beta_k$, найденные на основе математической обработки экспериментальных данных, приводятся в серии мо-

[1] Следуя [1], будем называть газ совершенным, если для него верно уравнение Клапейрона и удельные изохорная и изобарная теплоемкости постоянны; будем называть газ термически или калорически совершенным, если для него выполняется первое или второе из названных выше условий.




Фиг. 1

нографий, выпущенных Государственной службой стандартных справочных данных. В частности, для воздуха выражения (1), (2) из [7] содержат 50 коэффициентов $b_{ik}$ и 13 пар коэффициентов $\alpha_k$, $\beta_k$.)

Из соотношений (1), (2) с использованием известных дифференциальных уравнений термодинамики находятся (см. [7]) выражения для энтальпии $h$, энтропии $s$, скорости звука $a$ вида

$$h = h(\omega, \tau), \quad s = s(\omega, \tau), \quad a = a(\omega, \tau) \tag{3}$$

Чтобы найти зависимость между газодинамическими параметрами в изэнтропическом течении газа при заданных параметрах торможения $p_0$, $T_0$, поступим следующим образом. Положив в (1) $p = p_0$, $\tau = \tau_0 = T_0/T_c$, найдем из полученного выражения значение $\omega = \omega_0 = \rho_0/\rho_c$ ($\rho_0$ — плотность заторможенного газа). Вычислим $h_0 = h(\omega_0, \tau_0)$ и $s_0 = s(\omega_0, \tau_0)$. Зададимся рядом значений $\tau = \tau_j = T_j/T_c$, где $T_j = jT_0/N$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, $N$ — достаточно большое целое число. Из условия изэнтропичности $s(\omega, \tau) = s_0$ для каждого $\tau_j$ найдем соответствующее значение $\omega = \omega_j = \rho_j/\rho_c$. С помощью соотношений (1), (3) вычислим значения $p_j = p(\omega_j, \tau_j)$, $V_j = \sqrt{2(h_0 - h(\omega_j, \tau_j))}$, $a_j = a(\omega_j, \tau_j)$ ($V_j$ – значения модуля скорости $V$). В результате получим таблицу (назовем ее таблицей А) соответственных значений газодинамических параметров $T$, $p$, $\rho$, $V$, $a$.

С помощью интерполяции таблицы А из условия $V = a = a_*$ найдем критическую скорость $a_*$ и отвечающие ей значения $T = T_*$, $p = p_*$, $\rho = \rho_*$. Построим таблицу Б соответственных значений приведенной скорости $\lambda = V/a_*$ и числа Маха $M = V/a$. Для аналитического выражения зависимости одного газодинамического параметра от другого будем использовать интерполяционные кубические сплайны, построенные на основе таблиц А и Б.

Рассматриваемое течение является баротропным и потенциальным (см. [8, гл. 6]), поэтому, введя функцию тока $\psi$ с помощью соотношения

$$d\psi = -\rho V \sin\theta dx + \rho V \cos\theta dy$$

можно воспользоваться известными приемами (см. [9, § 62]) и получить для $\psi$ дифференциальное уравнение

$$V\frac{d}{dV}\left(\frac{1}{\rho V}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial V}\right) \tag{4}$$

С помощью уравнения Эйлера $\rho V dV + dp = 0$ и соотношения $dp/d\rho = a^2$ преобразуем (4) к виду

$$(1 - \mathrm{M}^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \lambda^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} + \lambda(1 + \mathrm{M}^2)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0 \tag{5}$$

Характеристики уравнения (5) имеют вид

$$\theta = \pm\int_1^\lambda \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{d\lambda}{\lambda} + \mathrm{const} \tag{6}$$

Для совершенного газа зависимость $\mathrm{M}(\lambda)$ хорошо известна, интеграл (6) выражается через элементарные функции, а уравнение (5) эквивалентно уравнению Чаплыгина. Для несовершенного газа функция $\mathrm{M}(\lambda)$ может быть определена способом, описанным выше (в этом случае функция $\mathrm{M}(\lambda)$ для выбранного газа зависит от параметров торможения $p_0$, $T_0$).

Краевые условия для $\psi$ в плоскости $\lambda$, $\theta$ имеют вид

$$AC: \psi = 0, \quad AA_1: \psi = -\frac{1}{2}Q\frac{\theta}{\theta_0}, \quad A_1BB_1: \psi = \frac{1}{2}Q \tag{7}$$

где $Q$ — расход газа через горловину сосуда в слое единичной толщины. Таким образом, для $\psi$ имеет место задача Трикоми (5), (7).

Для численного решения задачи Трикоми применяется конечно-разностный метод, предложенный в [10]. В области $\lambda \leq 1$ используется прямоугольная сетка с постоянными шагами по $\lambda$ и $\theta$, при $\lambda > 1$ за узлы сетки принимаются точки пересечения характеристик, исходящих из узлов на прямой $\lambda = 1$. Для определения значений $\lambda$ в узловых точках области $\lambda > 1$ ($\lambda = \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$) используются условия

$$\frac{1}{2}\Delta\theta = \int_1^{\lambda_{n+1}} \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_{n+2}} \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \ldots$$

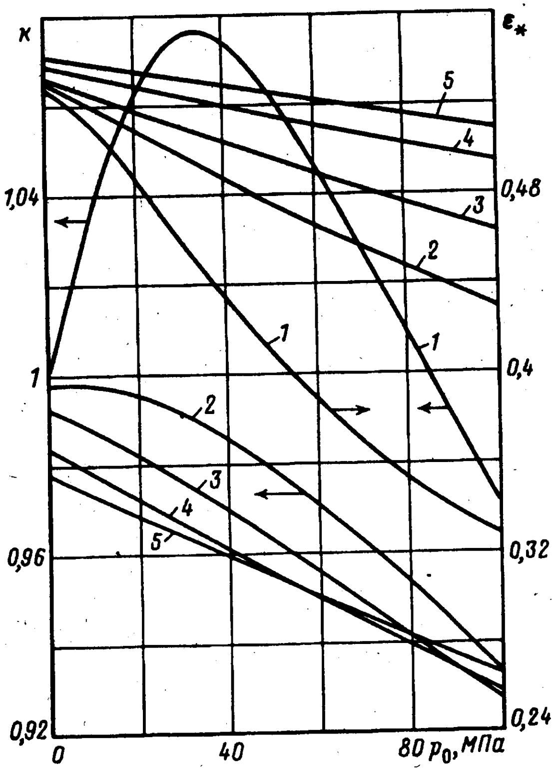
где $\Delta\theta$ — шаг по $\theta$ (см. фиг. 1, *в*).

Система алгебраических уравнений, получающаяся в результате конечно-разностной аппроксимации задачи (5), (7), решается с применением метода последовательной верхней релаксации.

Переход из плоскости годографа в физическую плоскость осуществляется по формулам, имеющим тот же вид, что и для совершенного газа. В частности, имеет место равенство

$$\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho a_*}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\sin\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta\right) \tag{8}$$

Основной интегральной характеристикой течения является коэффициент рас-




Фиг. 2

хода, который можно определить по формуле $\sigma = Q(2\rho_* a_* L)^{-1}$, где $L$ — ордината кромки сосуда $B$. С учетом (8)

$$L = \frac{1}{\rho_* a_*} I, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{Q}{I}, \quad I = \int\limits_0^{-\theta_0} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \sin\theta + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \cos\theta \right)_{\lambda=1} d\theta$$

Пусть $\psi^\circ(\lambda, \theta)$ — решение задачи (5), (7), полученное при условии $^1/_2 Q = 1$. Тогда

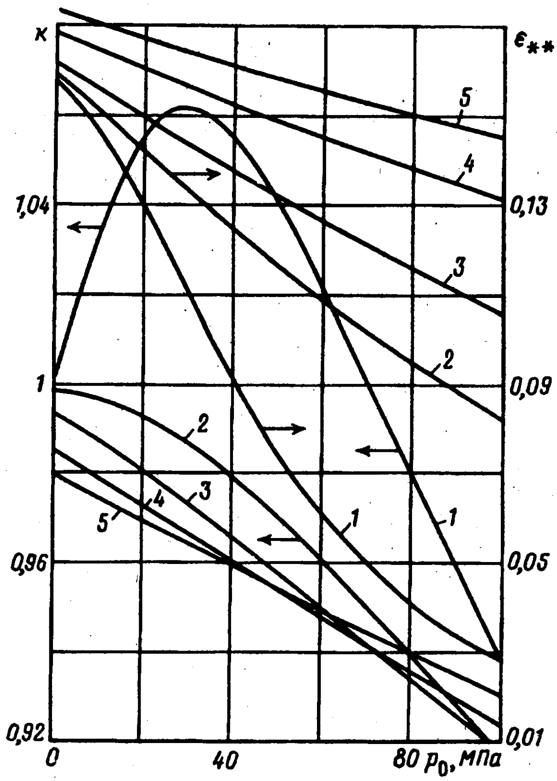
$$\sigma = \frac{1}{I^\circ}, \quad I^\circ = \int\limits_0^{-\theta_0} \left( \frac{\partial\psi^\circ}{\partial\lambda} \sin\theta + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\psi^\circ}{\partial\theta} \cos\theta \right)_{\lambda=1} d\theta$$

Введенное определение коэффициента расхода не является единственно возможным. Очевидно, более удобно определение

$$\mu = Q\,(2\rho_*{}^\circ a_*{}^\circ L)^{-1} = \sigma q_*, \quad q_* = \frac{\rho_* a_*}{\rho_*{}^\circ a_*{}^\circ}$$

$$a_*{}^\circ = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} R T_0}, \quad \rho_*{}^\circ = \frac{p_0}{R T_0} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

| Источник | $\theta_0{}^\circ = 15$ | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Данная работа | 0,9759 | 0,9471 | 0,9195 | 0,8941 | 0,8712 | 0,8508 | 0,8327 | 0,8170 |
| [6] | 0,9753 | 0,9468 | 0,9193 | 0,8939 | 0,8710 | 0,8505 | — | — |
| [11, 12] | — | 0,9472 | — | 0,8937 | — | 0,8497 | — | 0,8153 |




Фиг. 3

Здесь $\rho_*^\circ$, $a_*^\circ$ — критические плотность и скорость совершенного газа того же состава, что и рассматриваемый несовершенный (с той же газовой постоянной $R$ и с показателем адиабаты $\gamma$, определяемым по формулам

$$\gamma = \frac{\beta}{\beta - 1}, \quad \beta = 2{,}5 + \xi_l + 1{,}5\xi_n \tag{9}$$

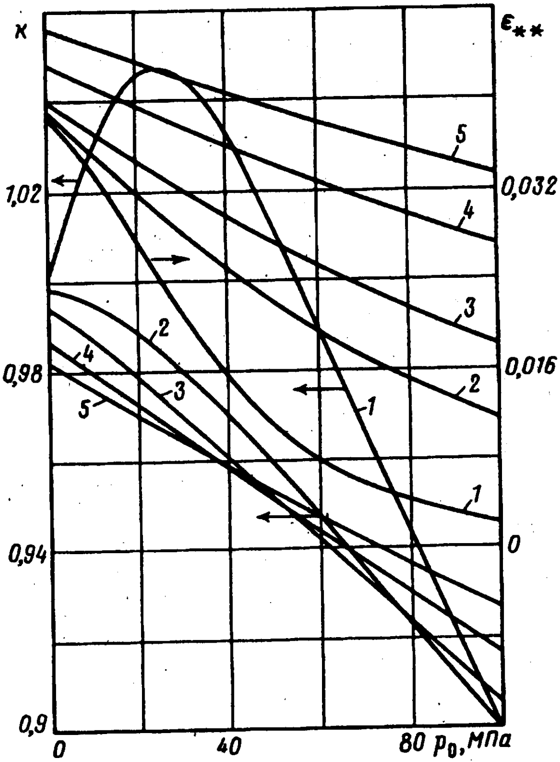
где $\xi_l$, $\xi_n$ — молярные доли компонентов, состоящих из линейных и нелинейных молекул).

Наряду с коэффициентом расхода $\mu$ введем в рассмотрение коэффициент $k = \mu/\mu^\circ$, где $\mu^\circ = \mu^\circ(\theta_0)$ – коэффициент расхода, вычисленный для соответствующего совершенного газа (представление $\mu = k\mu^\circ$ будет полезным, если окажется, что при каких-то условиях $k$ зависит только от $\rho_0$, $T_0$, но не зависит от $\theta_0$).

Для ряда значений $\theta_0$ была решена задача Трикоми и найден коэффициент расхода $\mu^\circ$ совершенного газа, соответствующего воздуху ($\gamma = 1{,}4$). Результаты, полученные на сетке с 5600 ячейками в области $\lambda \leq 1$ (81 узел на отрезке $\lambda = 1$, $-\theta_0 \leq \theta \leq 0$), и значения $\mu^\circ$ из [6, 11, 12] приведены в таблице (согласование результатов достаточно хорошее).

С использованием данных [7] рассчитано трансзвуковое истечение воздуха в диапазоне изменения $p_0$ от 0,1 до 100 МПа и $T_0$ от 300 до 1500 К (применялась сетка с тем же количеством узлов, которое указано выше, при построении таблиц А, Б полагалось $N = 200$). Результаты вычислений представлены на фиг. 2—5 (кривые 1—5 отвечают значениям $T_0 = 300$, 500, 700, 1100, 1500 К).

На фиг. 2 показаны зависимости от $p_0$ и $T_0$ безразмерного критического давления $\varepsilon_* = p_*/p_0$ и коэффициента $k$ при $\theta_0 \to 0$ (в этом случае течение




Фиг. 4

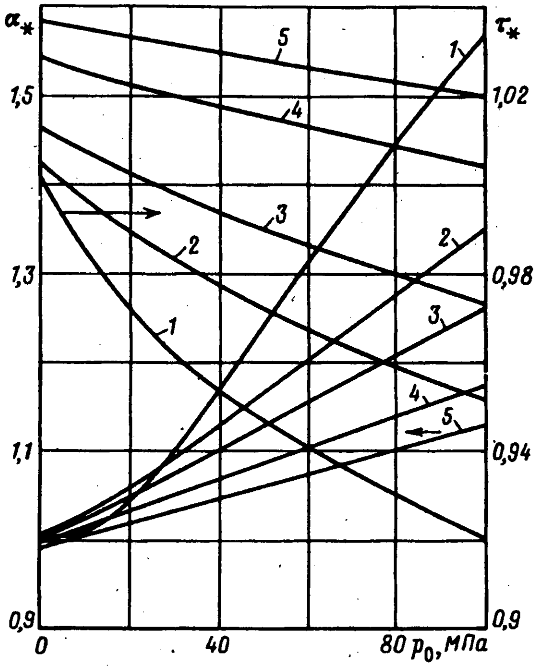
одномерное, $\mu^\circ = 1$, $\mu = k = q_*$). На фиг. 3 и 4 показаны зависимости $k$ и $\varepsilon_{**} = p_{**}/p_0$ при $\theta_0 = 45$ ($\mu^\circ = 0{,}9195$) и 90° ($\mu^\circ = 0{,}8508$) соответственно ($p_{**}$ — давление в точке $B_1$, $\varepsilon_{**}$ — второе критическое отношение давлений). На фиг. 5 показаны зависимости безразмерной критической скорости $\alpha_* = a_*/a_*^\circ$ и безразмерной критической температуры $\tau_* = T_*/T_*^\circ$ ($T_*^\circ = 2/(\gamma + 1)\, T_0$) от $p_0$ и $T_0$.

Как показывает анализ полученных результатов, отношения $a_*/a_*^\circ$, $\rho_*/\rho_*^\circ$, $T_*/T_*^\circ$, $p_*/p_*^\circ$ ($p_*^\circ = p_0 (2/(\gamma + 1)^{\gamma/(\gamma-1)})$ близки к единице только при малых $p_0$ и $T_0$ и, вообще говоря, сильно зависят от параметров торможения. Зависимость эта такова, что при достаточно больших значениях $T_0$ или $p_0$ частные производные от указанных безразмерных параметров по $p_0$ убывают по абсолютной величине с ростом $T_0$.

Параметр $\varepsilon_{**}$ ($\varepsilon_{**} \to \varepsilon_*$ при $\theta_0 \to 0$) при фиксированном $\theta_0$ сильно зависит от $p_0$, $T_0$. В исследованном диапазоне параметров $\max \varepsilon_{**}$ реализуется при $T_0 = \max T_0$, $p_0 = \min p_0$, а $\min \varepsilon_{**}$ — при $T_0 = \min T_0$, $p_0 = \max p_0$. Отношение $\max \varepsilon_{**}/\min \varepsilon_{**}$ быстро растет с ростом $\theta_0$ и составляет 1,653, 6,191, 19,65 для $\theta_0 = 0, 45, 90°$ соответственно.

Коэффициент $k$, характеризующий расход газа, в меньшей степени зависит от $\theta_0$, чем $\mu = k\mu^\circ$. Наибольшие различия между значениями $k$ при различных значениях $\theta_0$ проявляются при $p_0 = \max p_0$. Так, $k(\theta_0 = 0)/k$ ($\theta_0 = 90°$) = 1,080, 1,038, 1,024, 1,013, 1,006 при $p_0 = 100$ МПа и $T_0 = 300$, 500, 700, 1100, 1500 К соответственно. Таким образом, зависимость $k$ от $\theta_0$ ослабевает с ростом $T_0$, при достаточно больших $T_0$ коэффициент расхода $\mu$ можно определять по приближенной формуле $\mu = q_*\mu^\circ$.

Зависимость $k$ от $p_0$ и $T_0$ достаточно сложная. При $T_0 = 300$ К $k$ сначала




Фиг. 5

растет с увеличением $p_0$, затем убывает (для $\theta_0 \to 0$ max $k \approx 1{,}076$ при $p_0 \approx 0{,}33$ МПа). С увеличением $T_0$ при фиксированном $\theta_0$ максимум функции $k(p_0)$ убывает и смещается влево; при $T_0 \geq 700$ К максимум $k$ приходится на $p_0 = 0$, а функция $k(p_0)$ является монотонно убывающей.

Результаты вычисления параметров $\varepsilon_*$ и $q_*$ ($q_* = k$ при $\theta_0 \to 0$) хорошо согласуются с результатами [4], полученными для $T_0 = 300$ К, $p_0 \leq 70$ МПа. Значения $\mu$, полученные в [6] для газовой смеси, состоящей на 80% из молекул $N_2$ и на 20% из молекул $O_2$ с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы, весьма близки к полученным в настоящей работе при $p_0 = 0{,}1$ МПа для всех значений $\theta_0$ и $T_0$ (термически совершенный газ с равновесно возбужденными колебательными степенями свободы молекул является хорошей моделью реального газа при малых $p_0$ и не слишком больших $T_0$).

Утверждение авторов [4] о том, что с увеличением $T_0$ состояние газа (воздуха) приближается к состоянию совершенного газа (с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$), сделанное на основе анализа результатов расчета для $T_0 = 220$—$450$ К, вообще говоря, неправомерно. Из приведенных данных видно, в частности, что $k$ отнюдь не стремится к единице с ростом $T_0$.

С ростом $\theta_0$ при фиксированных $p_0$, $T_0$ значения $\lambda$, M в точке $B_1$ увеличиваются, а $T$ и $p$ падают. При достаточно больших $\theta_0$, $p_0$ и достаточно малом $T_0$ в окрестности точки $B_1$ создаются условия, при которых происходит переход газа в твердую фазу (для воздуха при давлении ниже атмосферного температуры начала и конца затвердевания близки к 60 и 56 К соответственно, при возрастании $p_0$ до 100 МПа эти значения увеличиваются не более чем на 20 К [7]). При этом результаты расчета по изложенной методике теряют смысл, поскольку уравнение состояния (1) не пригодно для описания твердой фазы.

Так, рассматривая истечение воздуха при $\theta_0 = 105°$, $p_0 = 100$ МПа, $T_0 = 300$ К, в точке $B_1$ получим $T = 58{,}8$ К, $p_0 = 0{,}0949$ МПа (условия, соответствующие началу затвердевания). При $\theta_0 = 120°$, $T_0 = 300$ К условия затвердевания воздуха в окрестности точки $B_1$ реализуются при $p_0 \gtrsim 41$ МПа, в то же время при $\theta_0 = 120°$, $T_0 \geq 500$ К, $p_0 \leq 100$ МПа условий появления твердой фазы не возникает.

Следует также иметь в виду, что при превышении $\theta_0$ некоторого критического значения начинается взаимодействие струи с внешней поверхностью стенки сосуда, что приводит к изменению схемы течения [12]. Как показано в [12], для совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ критическим является значение $\theta_0 = 124,5°$.

Авторы благодарны Г. Ю. Степанову за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. *Ершов Н. С., Селифанов В. С.* Расчет параметров при течении реального газа (воздуха)//Изв. вузов. Авиац. техника. 1969. № 2. С. 143—148.
3. *Зыков Н. А., Севастьянов Р. М.* Таблицы термодинамических и газодинамических функций воздуха при высоких давлениях и температурах торможения от 600 до 3000 К//Тр. ЦАГИ. 1972. Вып. 1389. С. 3—41.
4. *Давыдов Л. М., Жиравов В. М.* Изэнтропические течения воздуха при высоких давлениях торможения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 157—161.
5. *Бебяков А. П., Левин В. Я.* Некоторые особенности энергоизолированного течения газа при высоких давлениях//Изв. вузов. Авиац. техника. 1984. № 1. С. 71—74.
6. *Киселев О. М., Козырев О. Р.* О трансзвуковом истечении струи газа из сосуда с плоскими стенками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 128—136.
7. *Сычев В. В., Вассерман А. А., Козлов А. Д. и др.* Термодинамические свойства воздуха. М.: Изд-во стандартов, 1978. 275 с.
8. *Кларк Дж., Макчесни М.* Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967. 566 с.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
10. *Fenain M., Dutouquet L., Solignac J.-L.* Calcul des performances d'une tuyère propulsive convergence. Comparaison avec l'experience//Rech. Aérospat. 1974. № 5. P. 261—276.
11. *Косолапов Ю. С.* Численное решение задачи об истечении газа из сосуда с плоскими стенками//Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 177—181.
12. *Косолапов Ю. С.* Об истечении газа из плоских сосудов с большими углами наклона стенок//Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 144—151.


Казань

Поступила в редакцию
12.VIII.1992