

УДК 532.546

© 1993 г. В. В. КАДЕТ, Р. М. МУСИН, В. И. СЕЛЯКОВ

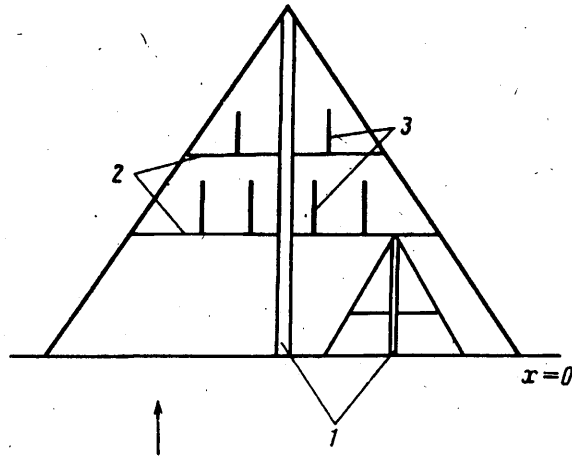
МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Рассматривается нестационарная двухфазная фильтрация в микронеоднородной среде. Для описания динамики процесса предлагается модель «роста леса» — перколяционная модель, позволяющая учитывать неравновесные эффекты такой фильтрации. В случае плоской задачи получены выражения для определения насыщенности и характерных размеров целиков защемленной фазы за фронтом вытеснения.

В настоящее время описание нестационарной фильтрации несмешивающихся жидкостей проводится с использованием равновесных фазовых проницаемостей и кривой капиллярного давления. Это означает, что указанные функции полностью определяются насыщенностью пористой среды любой из фаз и не зависят от времени и пространственных координат. Фазовые проницаемости в этом случае определяются по результатам исследования стационарной двухфазной фильтрации в лабораторном эксперименте, а функция Леверетта находится из порометрической кривой. Однако экспериментальные данные [1, 2] указывают на релаксационный характер установления межфазного равновесия при нестационарной фильтрации. Для описания двухфазной фильтрации с учетом этого эффекта в [3] предложена феноменологическая модель, включающая зависящие от времени фазовые проницаемости с характерным временем релаксации τ к равновесному значению. Однако экспериментальное определение таких величин сопряжено со значительными техническими трудностями.

1. **Физические предпосылки.** В решеточной модели неоднородной среды [4] капилляры образуют бесконечный кластер, проводимость которого определяется ориентированными в направлении фильтрации цепочками капилляров, составляющих его скелет. Эти цепочки сообщаются между собой через аналогичные цепочки капилляров, обеспечивающих фильтрацию в поперечном направлении. В совокупности проводящие цепочки капилляров образуют решетку неправильной формы. Как показано в [4], существует иерархия цепочек по величине их средней проводимости, поэтому скорости движения фаз, в том числе и при вытеснении одной фазы другой, в них различны. При двухфазной фильтрации вытесняющая фаза поступает в ориентированные в направлении приложенного градиента давления цепочки, которые в дальнейшем будем называть «стволами деревьев», и через них попадает в «ветви деревьев» — цепочки капилляров, обеспечивающих фильтрацию в поперечном направлении. В результате по мере поступления вытесняющей фазы имеет место рост деревьев, образованного стволом и ветвями. В свою очередь ветви обеспечивают поступление вытесняющей фазы в «листья» — цепочки капилляров, ориентированные параллельно стволу. Листья также могут иметь сложную древовидную форму. На фиг. 1 схематически представлены два взаимодействующих дерева, где 1 — стволы растущих деревьев, 2 — ветви, 3 — листья.

Таким образом, одни и те же цепочки капилляров, ориентированные в направлении фильтрации, могут участвовать в образовании как стволов, так и листьев, в зависимости от того, как в них поступает вытесняющая фаза. Будем считать, что листья принадлежат данному дереву, если вытесняющая фаза поступает в них через ветви данного дерева. В процессе фильтрации деревья растут с разной скоростью, в результате чего быстро растущие деревья обгоняют



Фиг. 1

в росте дерева, растущие медленнее, и блокируют их дальнейшее развитие, что приводит к уменьшению концентрации последних.

Аналогичная ситуация имеет место и при росте листьев, которые растут до тех пор, пока образующие их цепочки капилляров не перерезают следующий ярус ветвей. В результате происходит защемление вытесняемой фазы в таких цепочках. Этот эффект обусловлен динамическим характером процесса вытеснения, а доля защемленной при этом фазы определяется соотношением скоростей роста ствола и листьев дерева.

Остаточная насыщенность защемленной на динамической стадии вытесняемой фазы может релаксировать к равновесному значению. Это возможно, если в макрообъеме существует бесконечный кластер вытесняемой фазы, поступлению в который вытесняющей фазы препятствуют капиллярные силы. Если давление вытесняющей фазы P больше порогового давления P_* , при котором капилляры, заполненные вытесняемой фазой, образуют бесконечный кластер, то динамически защемляется максимально возможная доля вытесняемой фазы. Указанный механизм позволяет объяснить эффект увеличения доли защемленной фазы при увеличении скорости фильтрации.

Ниже рассматривается подход, позволяющий получить количественное описание двухфазной фильтрации в рамках модели роста леса, где под лесом понимается совокупность деревьев (или одно «баньяновое дерево»), образованных вытесняющей фазой.

Очевидно, что учет всех особенностей взаимодействия деревьев в трехмерном случае приведет к чрезвычайно громоздкому математическому аппарату, необходимому для его описания. В то же время рассмотрение задачи на плоскости позволит упростить математическую модель, сохраняя при этом основные характерные черты процесса.

2. Модель среды. Рассмотрим решеточную модель неоднородной среды. Проводящие связи (капилляры) решетки распределены в ней хаотически, а их распределение по величине эффективного гидравлического радиуса описывается произвольной нормированной функцией плотности распределения $f(r)$. Пусть до начала процесса вытеснения решетка полностью насыщена вытесняемой фазой, вязкость которой μ_1 , а начальное давление P_0 . В момент времени $t = 0$ к границе решетки $x = 0$ под давлением P подводится вытесняющая фаза, вязкость которой μ_2 , и начинается процесс вытеснения.

Проведем рассмотрение для случая, когда $P - P_0 \gg P_k$, где P_k — капиллярное давление. При описании процесса вытеснения пренебрежем фильтрационными

«языками», образующимися при прорыве вытесняющей фазы по конечной последовательности соединенных между собой «толстых» капилляров, поскольку такие языки быстро затухают. Скорость движения границы раздела двух фаз x_f , за которой насыщенность вытесняющей фазой отлична от нуля, определяется средней проводимостью бесконечной цепочки капилляров, составленной из наиболее крупных капилляров, концентрация которых достаточно велика для того, чтобы в среде образовался бесконечный кластер.

Вероятность того, что радиус капилляра в решетке превышает величину r_1 , равна

$$W(r \geq r_1) = \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr$$

Если $W(r \geq r_1)$ превышает порог перколяции W_c , в решетке возникает бесконечный кластер, составленный из капилляров, удовлетворяющих условию $r \geq r_1$. Таким образом, цепочка капилляров, определяющая положение фронта x_f , должна состоять из капилляров, удовлетворяющих условию $r > r_c$, где r_c находится из условия образования бесконечного кластера

$$\int_{r_c}^{\infty} f(r) dr = W_c \quad (2.1)$$

Цепочки, содержащие капилляры с $r \geq r_1$, образуют нерегулярную решетку, характерный период которой (радиус корреляции) определяется выражением

$$R(r_1) \sim d |W(r_1) - W_c|^{-\nu} \quad (2.2)$$

где d — период решетки, ν — индекс радиуса корреляции, зависящий от размерности задачи [5]. Концентрация проводящих цепочек с $r \geq r_1$ (число проводящих цепочек, пересекающих единичную поверхность) $N(r_1)$ равна $R^{-(z-1)}(r_1)$, где z — размерность задачи. А плотность концентрации r_1 -цепочек, в которых r_1 меняется от r_1 до $(r_1 + dr_1)$, равна $n(r_1) = -dN(r_1)/dr_1$ и с учетом (2.1) (2.2) определяется выражением

$$n(r_1) = \nu(z-1) \cdot f(r_1) \left[\int_{r_1}^{r_c} f(r) dr \right]^{\nu(z-1)-1} \cdot d^{-(z-1)-z} \quad (2.3)$$

3. Модель «роста леса». Остановимся подробнее на исследовании взаимодействия деревьев в процессе их роста. На микроуровне средняя скорость движения жидкости по цепочке последовательно соединенных капилляров при условиях $\mu_1 \gg \mu_2$ и $x_f \ll l$, где l — характерный размер области приложенного перепада давления, определяется по формуле Гагена—Пуазейля

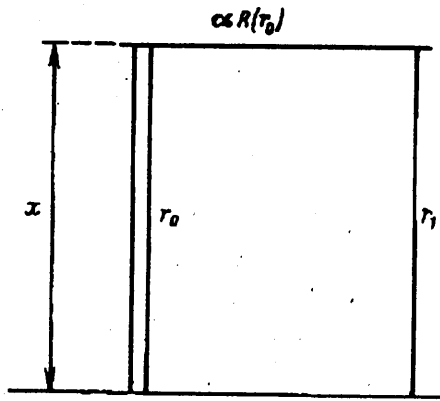
$$V = r^2 \Delta P (8\mu_1 l)^{-1} \quad (3.1)$$

Здесь r — минимальный радиус для данной цепочки. Эта цепочка соединяет два противоположных конца образца, поэтому ее длина по порядку величины совпадает с длиной образца, а приложенный к концам перепад давлений равен перепаду давлений, приложенному к данному образцу. Как видно из (3.1), максимальная средняя скорость вытеснения будет в r_c -цепочке

$$V_m = r_c^2 \Delta P (8\mu_1 l)^{-1} \quad (3.2)$$

Зная скорость фильтрации по r_c -цепочке (3.2), можно в любой момент времени t определить положение границы раздела двух фаз, позади которой насыщенность вытесняющей фазой отлична от нуля

$$x_f = V_m t$$



Фиг. 2

Поскольку средняя скорость движения по цепочке при заданном градиенте давления однозначно связана с ее эффективным радиусом, можно перейти от функции распределения капилляров по радиусам $f(r)$ к функции распределения r -цепочек по скоростям жидкости в них $\varphi(V)$. Например, в случае $f(r) = Ar^{-3}\eta(r-r_n)$, $\varphi(V) = BV^{-2}\eta(V_m-V)\eta(V-V_n)$, где $\eta(*)$ есть ступенчатая функция Хевисайда, а коэффициенты A и B определяются из условий нормировки

$$\int_0^{\infty} f(r) dr = 1, \quad \int_0^{\infty} \varphi(V) dV = 1$$

При этом надо учесть, что обрезание функции $\varphi(V)$ в области больших V произойдет при значении $V = V_m$, которое определяется не только свойствами среды, но и характером протекающего процесса.

Рассмотрим взаимодействие растущих с различными скоростями деревьев за фронтом вытеснения и прежде всего получим условие блокировки ствола дерева ветвями другого дерева, растущего с большей скоростью. На данный процесс влияет конкуренция двух факторов: с одной стороны, защемление медленно растущих деревьев должно происходить со стороны наиболее быстро растущих деревьев, с другой — характерное расстояние между такими деревьями велико, что уменьшает вероятность процесса защемления.

Блокировка может иметь место, если по ветвям дерева, образованного V_0 -цепочкой, вытесняющая фаза попадает в V_1 -цепочку раньше, чем по стволу последнего (фиг. 2). Следовательно, условие блокировки имеет вид

$$\frac{x + \alpha R(V_0)}{V_0} = \frac{x}{V_1} \quad (3.3)$$

Здесь $R(V_0)$ — радиус корреляции бесконечного кластера, образованного капиллярами, минимальная скорость движения жидкости в которых V_0 ; α — коэффициент порядка единицы, вводимый вследствие того, что условие (3.3) записано для произвольной V_1 -цепочки в среднем. Кроме того, при записи (3.3) полагается, что боковые ветви растут с той же скоростью, что и ствол.

В принципе скорости роста боковых ветвей различны. Для упрощения вычислений можно провести усреднение по скоростям роста боковых ветвей и ввести некоторую среднюю скорость роста ветвей для данного дерева. Очевидно, что чем больше скорость роста ствола, тем больше средняя скорость роста его боковых ветвей вследствие расширения диапазона радиусов r -цепочек, составляющих ветви. Без ограничения общности можно принять коэффициент пропорциональности в указанной зависимости равным единице, что и будет означать, что средняя скорость роста ветвей дерева равна скорости роста его ствола.

В случае выполнения условия (3.3) происходит блокирование всех деревьев, которые образованы V -цепочками с $V < V_1$. Остальные деревья продолжают свой рост. Из (3.3) видно, что блокирование V_1 -деревя возможно ветвями различных деревьев, растущих с большей скоростью, но происходит это будет на разных расстояниях x . Очевидно, реальное блокирование рассматриваемого пробного дерева произойдет теми деревьями, ветви которых соединятся при минимальном значении x , чему соответствует выполнение условия

$$\frac{\partial x}{\partial V_0} = 0 \quad (3.4)$$

Таким образом, с учетом очевидного равенства

$$x(V_1) = x_f \frac{V_1}{V_m} \quad (3.5)$$

получаем систему из трех уравнений для определения трех неизвестных: V_0 , V_1 и $x(V_1)$, причем заранее очевидно, что $V_0 > V_1$. Эта система разрешима при любых значениях x_f .

Следовательно, всю рассматриваемую область можно условно разбить на три зоны. При $x > x_f$ происходит однофазная фильтрация без изменения насыщенности. При $x < x(V_1)$ имеет место фильтрация вытесняющей фазы через невымершие стволы деревьев, соответствующих величинам $V > V_1(x)$. Здесь $V_1(x)$ определяется из (3.3)—(3.5) как функция, обратная к $x(V_1)$. Проницаемость для вытесняемой фазы в этой зоне равна нулю. И наконец, при $x_f > x > x(V_1)$ имеем динамическую стадию процесса фильтрации.

Теперь оценим значения насыщенности пористой среды вытесняемой фазой в указанных зонах. При $x < x(V_1)$ доля вытесняющей фазы, находящейся в V -цепочке в момент защемления V_1 -цепочки V_0 -цепочкой, есть $\varepsilon = V/V_1$, поэтому доля защемленной вытесняемой фазы в этой цепочке равна $1 - \varepsilon$.

Производя усреднение по области с характерным размером $R(V_0)$, с учетом (2.1)—(2.3) имеем

$$S_0(x) = \int_0^{V_1} (1 - V/V_1) n(V) B(V) dV / \left(\int_0^{V_m} n(V) B(V) dV \right)^{-1} \quad (3.6)$$

где $B(V) = 1$ в модели пор и $B(V) = V$ в модели капилляров [6].

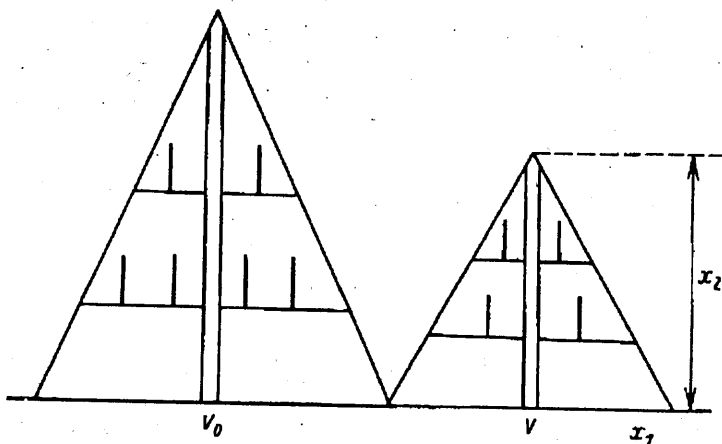
В области $x > x_1 = x(V_1)$ деревья растут, практически не взаимодействуя. Вокруг каждого ствола образуется «крона» — зона, из которой первая фаза уже вытеснена (фиг. 3). Полагая, что крона имеет треугольную форму и растет вокруг стволов различных деревьев с постоянной скоростью, находим распределение насыщенности среды вытесняемой фазой в этой области. Зона вытеснения начинает образовываться вокруг V -цепочки после того, как длина ствола дерева в процессе его роста превысит рассматриваемую координату $x_1 = x(V_1)$. Поперечный размер зоны пропорционален при этом величине

$$l(V) = x_f (V/V_m) - x$$

— характеризующей расстояние между верхушкой дерева и плоскостью с координатой x . Поэтому насыщенность вытесняемой фазой в области $x_f > x > x(V_1)$ равна

$$S = 1 - \beta \int_{V(x_2)}^{V_m} n(V) l(V) B(V) dV \quad (3.7)$$

Здесь коэффициент β определяется из условия сшивки решений (3.6) и (3.7) при $x = x(V_1)$; x_2 — текущая координата, отсчитываемая от уровня $x = x(V_1)$ (фиг. 3), а $V(x_2)$ — скорость продвижения границы фаз в цепочке, в которой она успевает



Фиг. 3

продвинуться до данного уровня x_2 . Эта скорость определяется соотношением (3.5)

$$V(x_2) = V_m (x_2 + x(V_1)) x_f^{-1} \quad (3.8)$$

Таким образом, система (3.3)—(3.8) позволяет определять распределение насыщенности вытесняемой фазой для произвольного положения фронта x_f в случае, если известна функция плотности распределения $\varphi(V)$.

В рамках данной модели можно оценить также характерный размер целиков вытесняемой фазы D , который соответствует значению $R(V_0)$. Так как по мере продвижения фронта в заземлении участвуют все более быстро растущие деревья, то размер целиков будет возрастать с увеличением x . Величину $D(V_0) \sim R(V_0)$ можно оценить из (2.2), используя значение $V_0(x)$, определяемое из (3.3)—(3.5).

4. Анализ результатов. Качественную картину распределения S_0 и $D(x)$ за фронтом вытеснения можно получить из (3.3)—(3.8), задавшись наиболее характерным видом функции плотности распределения по скоростям, например

$$\varphi(V) = AV^{-2} \eta(V - V_n) \eta(V_m - V)$$

где $A = V_m V_n / (V_m - V_n)$ и в случае $V_n / V_m \ll 1$ $A \approx V_n$.

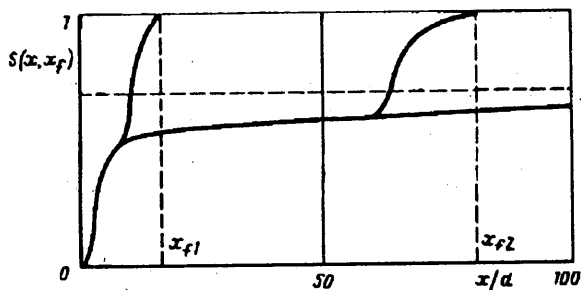
В результате получим при $x < x(V_1)$

$$S(x, x_f) = \left[\frac{V_m (V_1 - V_n)}{V_1 V_n} - \ln \frac{V_1}{V_n} - \frac{V_m}{V_1} \ln \frac{V_1}{V_n} + \right. \\ \left. + \frac{V_1 - V_n}{V_1} \right] \left(\frac{V_m - V_n}{V_n} - \ln \frac{V_m}{V_n} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

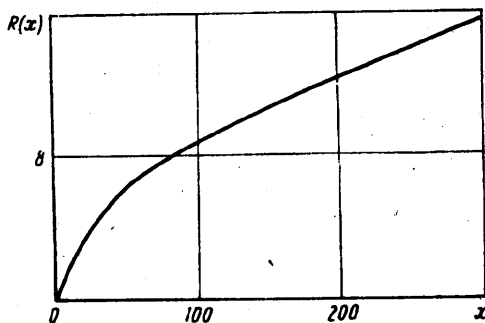
а при $x > x(V_1)$

$$S(x_2, x_f) = 1 - \frac{\beta}{V_r} \left[(x_f + x) \ln \frac{V_m}{V_n} - (V_m - V_n) \left(\frac{x_f}{V_m} + \frac{x}{V_n} \right) - \right. \\ \left. - x_2 \frac{V_m - V_n}{V_n} + x_2 \ln \frac{V_m}{V_n} \right] \quad (4.2)$$

$$D(x) = x \left[2 \left(\frac{\alpha x}{dV_m} \right)^{1/2} + \alpha \right]^{-1} \quad (4.3)$$



Фиг. 4

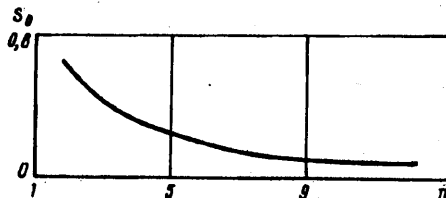


Фиг. 5

Зависимости (4.1)—(4.3) представлены графически на фиг. 4, 5. Из фиг. 4 видно, что асимптотическое значение остаточной насыщенности, получаемое в рамках данной модели, составляет величину порядка 0,6—0,7, которая согласуется с результатами лабораторных экспериментов [7]. Это значение существенно превышает остаточную водонасыщенность, соответствующую равновесному процессу вытеснения, когда движение вытесняемой фазы возможно вплоть до разрыва бесконечного кластера, т. е. до значений водонасыщенности порядка 0,2—0,3. Функция $S(x, x_f)$ выходит на асимптотику при $x/d > 100$. Это означает, что численное моделирование процесса нестационарной фильтрации представляет значительные технические сложности, поскольку для получения устойчивых достоверных результатов, необходимо в двумерном случае использовать расчетную сетку (решетку капилляров, моделирующую поровое пространство) размером не менее чем 200×200 . Очевидно, что в трехмерном случае для расчетов придется использовать решетку с числом элементов порядка 10^7 .

В рамках данной модели можно оценить также времена релаксации τ на различных расстояниях за фронтом вытеснения. Они будут соответствовать характерному времени замыкания ячейки размером $D \sim R(V_0)$, т. е. $\tau \sim D(x)/V_0(x)$, где $V_0(x)$ определяется из (3.3)—(3.5), а $D(x)$ определяется соотношением (4.3). Для модельной функции $\varphi(V) = V_n V^{-2} \eta(V - V_n)$ в безразмерных единицах получаем $\tau \sim 1$.

Интересно проанализировать влияния вида порометрической кривой $f(r)$ и соответственно $\varphi(V)$ на значение S_0 . Расчеты зависимости величины остаточной насыщенности от значения показателя n в степенной функции плотности распределения $\varphi(V) \sim V^{-n}$ представлены на фиг. 6. Значение S_0 при динамическом вытеснении может быть меньше, чем в случае стационарной фильтрации, а в пределе $n \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к нулю. Этот эффект объясняется тем, что при $n \rightarrow \infty$ функция $\varphi(V)$ приближается по виду к δ -функции. При этом скорость вытеснения по всем цепочкам будет одинаковой, в результате чего процесс заземления вытесняемой фазы окажется невозможным.



Фиг. 6

Отметим, что все приведенные в статье рассуждения в принципе справедливы и для трехмерного случая. При этом вид соответствующих аналитических выражений в случае пространственной задачи будет иным, однако качественный характер полученных зависимостей сохранится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ентов В. М. К теории неравновесных эффектов при фильтрации неоднородных жидкостей//Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 52—57.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
3. Баренблатт Г. И., Винниченко А. П. Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей//Успехи механики. 1980. Т. 3. Вып. 3. С. 35—50.
4. Селяков В. И. Проводимость зернистых и кавернозных сред//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 12. С. 44—52.
5. Соколов И. М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания//Успехи физ. наук. 1986. Т. 150. № 2. С. 221—255.
6. Кадет В. В., Селяков В. И. Перколяционная модель двухфазной фильтрации//Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 88—95.
7. Lenormand R., Tauboul E., Zarcone C. Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media//J. Fluid Mech. 1988. V. 189. P. 165—187.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1992