

УДК 532.545.013.4

© 1993 г. Ю. А. БУЕВИЧ, Ш. К. КАПБАСОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Необходимость сохранения числа частиц при эволюции возмущений в однородном вертикальном потоке суспензии уже сама по себе приводит к возникновению концентрационных кинематических волн неизменной амплитуды [1]. Наличие инерции частиц и нелинейная зависимость силы межфазного взаимодействия от концентрации обуславливают рост этой амплитуды и соответственно неустойчивость потока по отношению к малым возмущениям. Диссипативные эффекты способны замедлить темпы развития неустойчивости, но не сказываются на самом факте ее наступления. Поэтому исследования линейной устойчивости потоков и, в частности, однородных псевдооживленных слоев приводят к выводу об их неизбежной неустойчивости вне зависимости от размера частиц, типа жидкой фазы и других факторов [2—15].

В системах крупных частиц в газах такая неустойчивость на самом деле стимулирует быстрое развитие разрывов концентрации, с чем связывают, в частности, появление свободных газовых полостей при псевдооживлении [3, 5, 7, 9—11]. В суспензиях достаточно мелких частиц в капельных жидкостях эта неустойчивость либо не возникает вообще, либо вызывает появление системы слабо-нелинейных волн, постепенно изменяющих свою морфологию по мере роста надкритичности [16].

Стабилизация возмущений связана с действием в потоке диспергированной фазы специфических нормальных напряжений, препятствующих ее объемному деформированию. Хотя это было понято уже давно (см., например, [6—15]), конструктивное развитие теории сдерживается практически полным отсутствием достоверных сведений о зависимости этих напряжений (или соответствующих объемных модулей упругости диспергированной фазы) от концентрации суспензии и физических параметров фаз. Попытки ввести указанные величины на феноменологической основе [11] или при помощи простых механических моделей (предпринимавшиеся, например, в [7, 9], а также в [17, 18]) имеют чисто эвристический характер и ни в коей мере не решают проблемы. Поэтому результаты соответствующих исследований устойчивости, а особенно нелинейной эволюции конечных возмущений [10, 12—14], остаются по существу формальными.

Отсутствие надежной реологической модели диспергированной фазы суспензий заставляет использовать недостаточно обоснованные эмпирические соотношения для ее упругих свойств даже в самых последних работах в этой области механики дисперсных систем [19]. Кроме того, до сих пор имеются существенные неопределенности относительно как самого факта существования устойчивых состояний, так и характера масштабных факторов, определяющих длину волны, скорость и инкремент нарастания волн максимального роста при неустойчивости [20].

Приводимое ниже исследование устойчивости становится возможным ввиду появления конкретной теории свойств мелкодисперсных суспензий со случайно пульсирующими частицами [21]. Нормальные, а также квазивязкие напряжения возникают в диспергированной фазе в результате переноса импульса пульсаций самими пульсациями и их влияния на обмен средним импульсом в сдвиговом потоке. Теория позволяет найти условия нейтральной устойчивости и свойства волн максимального роста, а также дать естественное объяснение стабилизирующей роли броуновского движения частиц, существенного при переходе от суспензий к коллоидам, и причин возникновения известного масштабного фактора при увеличении линейного масштаба потока.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим вертикальный поток суспензии одинаковых мелких сферических частиц радиуса  $a$ . Суспензия считается бесстолкновительной в том смысле, что обмен импульсом и энергией между частицами обеспечивается случайными полями скорости и давления окружающей жидкости,

а роль прямых столкновений в этом процессе пренебрежимо мала [21]. Для анализа устойчивости нужны уравнения сохранения массы (объема) обеих фаз и импульса диспергированной фазы. Уравнение сохранения импульса непрерывной фазы, содержащее новую неизвестную переменную (давление в жидкости), которая не появляется в перечисленных уравнениях, в таком анализе можно не учитывать.

Пренебрегая относительно малыми добавками к полным потокам фаз, обусловленными пульсациями, а также влиянием пульсаций на эффективную силу вязкого взаимодействия между фазами, запишем уравнения сохранения объема и импульса диспергированной фазы в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi w)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial (\varepsilon v)}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon = 1 - \varphi \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \right) w = & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta_1}{\rho_1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & + \varphi \left\{ \left[ \frac{K(\varphi)}{\kappa \tau} u - \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) g \right] + \left( \frac{\varepsilon}{\kappa} + \varphi \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \right) w + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{15}{4} K(\varphi) \right) \varphi \right] \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \right) u \right\}, \quad u = v - w \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{2a^2}{9v_0}, \quad v_0 = \frac{\eta_0}{\rho_0}, \quad K(\varphi) = \frac{1}{(1-\varphi)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (1.3)$$

Здесь  $v$ ,  $w$  — средние скорости жидкости и частиц,  $\varphi$  — средняя объемная концентрация частиц в суспензии, координатная ось  $x$  направлена вверх,  $\rho_0$  и  $\rho_1$  — плотности жидкости и материала частиц,  $p_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_0$  — нормальное напряжение, динамическая вязкость системы взвешенных частиц, вязкость чистой жидкости. В фигурных скобках в правой части (1.2) записаны соответственно сумма сил вязкого взаимодействия и тяжести с учетом эффекта плавучести, сила плавучести, обусловленная ускоренным движением частиц, и инерционная сила, связанная с эффектом присоединенной массы. Эти силы выражены в соответствии с самоогласованной теорией суспензий в форме, предложенной в [22]. Составляющие силы межфазного взаимодействия, обусловленные эффектами Бассе и Факсена, для простоты в (1.2) не учитываются. Можно показать, что первая составляющая мала по сравнению либо с вязкой, либо с инерционными силами, а влияние второй незначительно по сравнению с влиянием дивергенции квазивязких напряжений.

Нормальное напряжение представим на основании [21, 22] так

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1} = & \varphi L(\varphi) \left( R(\varphi) \langle \varphi'^2 \rangle + \frac{kT}{m} \right), \quad \langle \varphi'^2 \rangle = \frac{\varphi^2}{1-\varphi} \left[ 1 + 2\varphi \frac{4-\varphi}{(1-\varphi)^4} \right]^{-1} \\ L(\varphi) = & 2 \ln \frac{1-\varphi}{\varphi} + 3 \frac{1-2\varphi}{1-\varphi} + \frac{\varphi}{2} \frac{15-8\varphi-\varphi^2}{(1-\varphi)^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$R(\varphi) = (1-h)^2 B^2 + \frac{2}{3} (1-h) B \left( hB + \frac{u}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{5} \left( hB + \frac{u}{\varepsilon} \right)^2$$

$$h = \frac{\kappa \varphi}{1 + (\kappa - 1) \varphi}, \quad B = \frac{d \ln K}{d\varphi} u + \frac{(\kappa - 1) g \tau}{K}$$

Здесь  $kT$  — температура в энергетических единицах,  $m$  — масса частицы. Первая составляющая в выражении для  $p_1/\rho_1$  соответствует псевдотурбулентным пульсациям частиц, вторая — пульсациям, обусловленным броуновским движением [21, 22].

Эффективная вязкость диспергированной фазы может быть выражена через

соответствующий коэффициент самодиффузии частиц, вовлеченных в пульсационное движение, так же, как это обычно делается в теории турбулентности, т. е.  $\eta_1 = \rho_1 D$ . В ситуациях, когда броуновским движением допустимо пренебрегать, коэффициент самодиффузии может быть представлен в виде [21]

$$\eta_1 / \rho_1 = D = D_{||} a u \quad (1.5)$$

где  $D_{||}$  — некоторая функция  $\varphi$  и  $\kappa$ . К сожалению, ее трудно представить в обозримом аналитическом виде и следует использовать приводимые в указанной работе результаты численных расчетов. Формула (1.5) может быть обобщена и на ситуации, когда существенно тепловое движение частиц. Однако ниже такое обобщение не потребуется.

Невозмущенный однородный поток описывается единственным соотношением, следующим из (1.2)

$$u_0 = (\varepsilon_0 / K_0)(\kappa - 1) \tau g \quad (1.6)$$

которое связывает концентрацию  $\varphi_0$  со средней скоростью  $u_0$  межфазного скольжения. Возможные значения последней заключены в интервале  $(u_{\min}, u_{\max})$ . Если иметь в виду однородный псевдооживленный слой, границы этого интервала будут соответствовать переходу частиц в неподвижное состояние при  $u < u_{\min}$  и выносу отдельных частиц из слоя при  $u_0 > u_{\max}$ . Нижний индекс «ноль» отмечает далее величины, относимые к этому невозмущенному однородному состоянию.

Используя систему координат, связанную со средним движением диспергированной фазы, из (1.1) получаем

$$v = \frac{\varepsilon_0 u_0 - \varphi w}{\varepsilon}, \quad u = v - w = \frac{\varepsilon_0 u_0 - w}{\varepsilon}, \quad u' = \frac{u_0}{\varepsilon_0} \varphi' - \frac{w'}{\varepsilon_0} \quad (1.7)$$

где штрихом отмечаются возмущения переменных.

При вычислении возмущения нормального напряжения из (1.4) примем

$$B = \left( \frac{d \ln K}{d\varphi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_\varepsilon}{u} \right) u \approx \left( \frac{d \ln K}{d\varphi} + \frac{1}{\varepsilon} \right) u \quad (1.8)$$

где под  $u_\varepsilon$  подразумевается скорость скольжения в однородном потоке с концентрацией  $\varphi$  ( $u_\varepsilon = u_0$  при  $\varphi = \varphi_0$ ). Это предположение не имеет принципиального значения, но дает возможность очень существенно упростить выкладки.

В результате весьма громоздких, хотя и вполне элементарных вычислений на основе приведенных соотношений, приходим к следующим уравнениям для возмущений однородного потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \varphi_0 \frac{\partial w'}{\partial x} &= 0 \\ \varphi_0 F \frac{\partial w'}{\partial t} &= \varphi_0 J G \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \left( \Phi G^2 + \frac{kT}{m} \psi \right) \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + \frac{9}{2\kappa} \varphi_0 G \varphi' + \\ &+ S a |G| \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + W G \frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\varphi_0}{\kappa \tau \varepsilon_0^{3/2}} w' \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} F &= \sigma \varepsilon_0 + \frac{J}{\varepsilon_0^{3/2}}, \quad J = \frac{3\varepsilon_0^{3/2}}{2\kappa} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{15}{4\varepsilon_0^{5/2}} \right) \varphi_0 \right] \\ \Phi &= \varepsilon_0^2 \left( H_1 \frac{df}{d\varphi} - H_2 f \right)_{\varphi=\varphi_0}, \quad W = 2\varepsilon_0^{3/2} H_1 f |_{\varphi=\varphi_0}, \quad f = \varphi \varepsilon^{-4} \langle \varphi'^2 \rangle L \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\psi = \frac{d(\varphi L)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}, \quad S = \varepsilon_0^{3/2} D_{||}$$

$$H_1 = \frac{887}{60} - \frac{259}{15} h_0 + \frac{98}{15} h_0^2, \quad H_2 = \frac{h_0^2}{\kappa \varphi^2} \left( \frac{259}{15} - \frac{196}{15} h_0 \right)$$

$$h_0 = h|_{\varphi=\varphi_0}, \quad G = (\kappa - 1) \tau g = \sigma \kappa \tau g, \quad \sigma = 1 - 1/\kappa$$

Функции  $L$ ,  $h$  и  $\langle \varphi'^2 \rangle$  определены в (1.4).  
Введем безразмерные переменные

$$t_1 = \frac{t}{\kappa \tau}, \quad x_1 = \frac{x}{\kappa^2 \tau^2 g}, \quad w_1 = \frac{w'}{\kappa \tau g}, \quad \varphi_1 = \varphi' \quad (1.11)$$

Записывая уравнения (1.9) в этих переменных и рассматривая стандартным образом гармоники, пропорциональные  $\exp [i(k_1 x_1 - \omega_1 t_1)]$ , получаем характеристическое уравнение в форме

$$\omega_1^2 + 2(c_1 + id_1)\omega_1 - (c_2 + id_2) = 0$$

$$c_1 = \frac{\sigma}{2F} \left( \frac{W}{\varphi_0} - \varphi_0 J \right) k_1, \quad d_1 = \frac{1}{2F} \left( \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}} + \frac{|\sigma|}{\kappa^2} Vi \frac{S}{\varphi_0} k_1^2 \right) \quad (1.12)$$

$$c_2 = \frac{\sigma^2}{F} (\Phi + \psi Br) k_1^2, \quad d_2 = \frac{9\sigma\varphi_0}{2F} k_1$$

$$Vi = \frac{a}{\tau^2 g}, \quad Br = \frac{kT/m}{(\kappa - 1)^2 \tau^2 g^2} = \frac{1}{\sigma^2 \kappa^2} Br^* \quad (1.13)$$

Первый из этих критериев характеризует роль квазивязких напряжений в диспергированной фазе и пропорционален  $Fr/Re^2$ , где  $Re$  и  $Fr$  — числа Рейнольдса и Фруда, построенные с использованием радиуса частиц в качестве линейного масштаба. Второй критерий характеризует роль броуновского движения и пропорционален квадрату отношения средней тепловой скорости частиц к  $u_0$ .

2. Нейтральная устойчивость. Действительную и мнимую части комплексной частоты  $\omega_1$  при действительных волновых числах  $k_1$  можно записать так

$$Re \omega_1 = -c_1 \pm \{1/2A + 1/2(A^2 + B^2)^{1/2}\}^{1/2},$$

$$Im \omega_1 = -d_1 \pm \{-1/2A + 1/2(A^2 + B^2)^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.1)$$

$$A = c_1^2 - d_1^2 + c_2, \quad B = 2c_1 d_1 + d_2$$

Знаки в этих формулах записаны для случая  $B > 0$ , имеющего место в суспензиях, в которых частицы тяжелее жидкости. В противоположном случае соответствие знаков в (2.1) должно быть заменено на обратное.

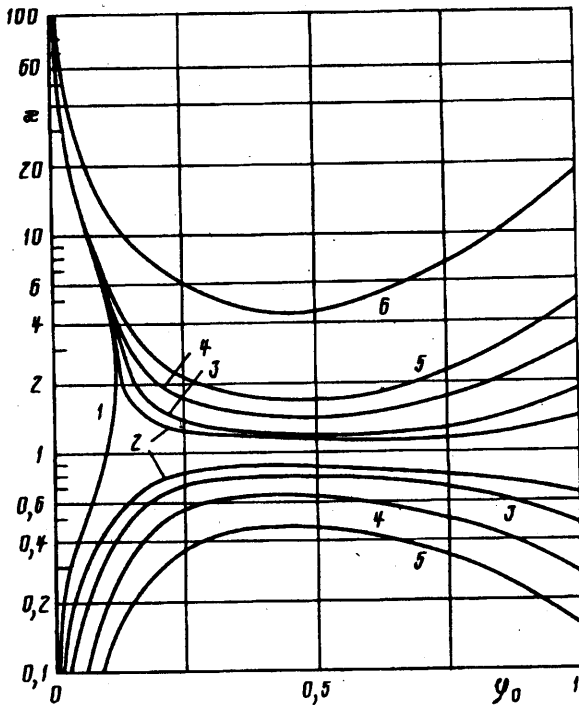
Опасным в смысле нарушения устойчивости является корень (1.12), отвечающий верхнему знаку в определении  $Im \omega_1$  в (2.1), причем условие неустойчивости имеет вид

$$f_k(\varphi_0; \kappa, Vi, Br) = \frac{9}{2} (W - \varphi_0^2 J) + \frac{81}{4} \varphi_0^2 F \left( \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}} + \frac{|\sigma|}{\kappa^2} Vi \frac{S}{\varphi_0} k_1^2 \right)^{-1} -$$

$$- (\Phi + \psi Br) \left( \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}} + \frac{|\sigma|}{\kappa^2} Vi \frac{S}{\varphi_0} k_1^2 \right) > 0 \quad (2.2)$$

Устойчивость неограниченного потока впервые нарушается по отношению к возмущениям бесконечной длины волны, т. е. критерий неустойчивости приобретает вид

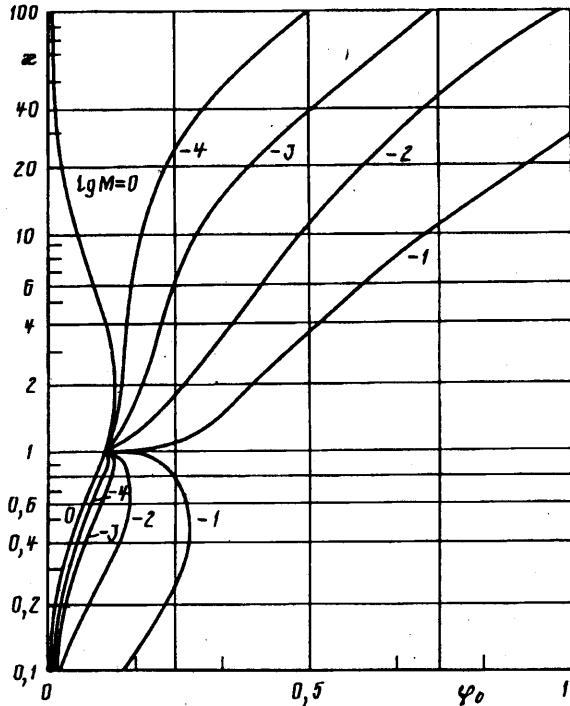
$$f_0 = 9/2 (W - \varphi_0^2 J) + 81/4 \varphi_0^2 \varepsilon_0^{1/2} F - \varepsilon_0^{-1/2} (\Phi + \psi Br) > 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Если нормальные напряжения в диспергированной фазе не учитываются, то правые части (2.2) и (2.3), а также  $W$  в левых частях тождественно обращаются в нуль. В этом случае неравенства (2.2) и (2.3) выполняются при любых значениях параметров и любом физически допустимом значении концентрации, т. е. вертикальный однородный поток любой суспензии (в том числе равноплотной) неизбежно оказывается неустойчивым. Появление указанного напряжения обуславливает значительную стабилизацию возмущений потока и, в частности, приводит к возникновению области устойчивости в параметрическом пространстве. Кривые нейтральной устойчивости на плоскости  $(\varphi_0, \chi)$  при разных  $Bg^*$  построены на фиг. 1. Кривые 1—6 отвечают  $Bg^* = 0; 0,001; 0,003; 0,01; 0,03; 0,3$ . Области неустойчивости лежат сверху от кривых при  $\chi > 1$  и снизу от кривых при  $\chi < 1$ . Неограниченный поток равноплотной суспензии оказывается устойчивым при сколь угодно малом  $Bg^*$ . (Однако при  $Bg^* \equiv 0$  из кривой 1 на фиг. 1 следует вывод о наступлении неустойчивости такого потока даже при  $\chi = 1$ , если концентрация не слишком мала. Этот вывод имеет, конечно, формальный характер и отражает по существу дестабилизирующее влияние сил чисто инерционного происхождения.)

Усиление роли броуновского движения приводит, во-первых, к расширению области устойчивости в интервале малых концентраций и, во-вторых, к возникновению новой области устойчивости при высоких концентрациях. Этот эффект весьма слаб для газовзвесей ( $\chi \sim 10^2 - 10^3$ ), но весьма существен для суспензий и взвесей микроскопических газовых пузырьков в капельных жидкостях ( $\chi < 10$ ). Выше не учитывали влияние броуновских пульсаций частиц на эффективную вязкость и использовали соответственно формулу (1.5). Это влияет на определение параметра  $Vi$ , фигурирующего в (2.2), но не сказывается на виде условия (2.3) неустойчивости неограниченного потока, которое вообще не зависит от указанного параметра. Результаты, представленные на фиг. 1, позволяют понять, почему уменьшение частиц с переходом от суспензии в обычном смысле слова к кол-



Фиг. 2

лоидному раствору неизбежно вызывает полную стабилизацию системы. Уменьшение  $a$  приводит к росту критерия  $Gr^*$ , который в соответствии с (1.13) и определением  $\tau$  в (1.3) пропорционален  $a^{-1}$ . Поэтому с уменьшением  $a$  неограниченно возрастает роль «давления» частиц, обусловленного их чисто тепловым движением.

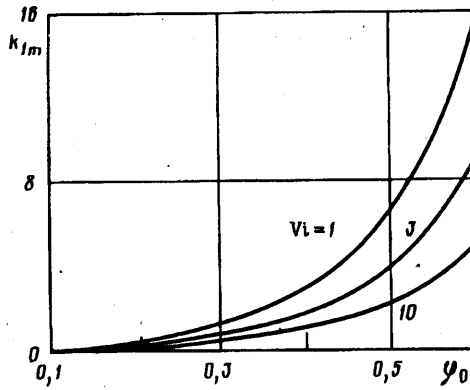
Рассмотрим теперь устойчивость ограниченного однородного вертикального потока не слишком мелких частиц, когда можно пренебречь их броуновским движением (как ясно из фиг. 1, этого нельзя сделать для суспензий даже относительно крупных частиц, если они достаточно близки к равноплотным). Ограниченность потока означает, что волновое число возмущений не может быть меньше некоторого предельного  $k_* \sim l^{-1}$ , где  $l$  — линейный масштаб потока. В этом случае вместо неравенства (2.3) нужно использовать в том же качестве непосредственно (2.2) с  $k_1 = k_{1*} = \chi^2 \tau^2 g k_*$ . Тогда

$$\frac{|\sigma|}{\chi^2} Vi \frac{S}{\varphi_0} k_{1*}^2 = |\sigma| \chi^2 M \frac{S}{\varphi_0}, \quad M = a \tau^2 g k_*^2 \sim \frac{a \tau g}{l} \quad (2.4)$$

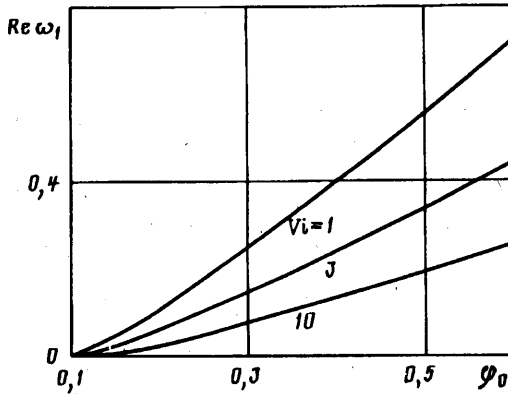
Физический смысл параметра  $M$  ясен из его определения.

Кривые нейтральной устойчивости, следующие из (2.2) с учетом (2.4), приведены при разных  $M$  на фиг. 2. Как и на фиг. 1, области неустойчивости лежат выше кривых, соответствующих  $\chi > 1$ , и ниже кривых, соответствующих  $\chi < 1$ . Видно, что при уменьшении размера потока область устойчивости расширяется. Для мелких частиц, рассматриваемых в этой работе, параметр  $M$  мал и указанный эффект, полностью вырождающийся в случае равноплотной суспензии, оказывается обычно достаточно слабым. Однако это не так для взвесей частиц в газах даже при очень малых  $M$ .

Кривые на фиг. 2 позволяют понять происхождение известного масштабного эффекта, когда дисперсная система, вполне устойчивая в лабораторных условиях,



Фиг. 3



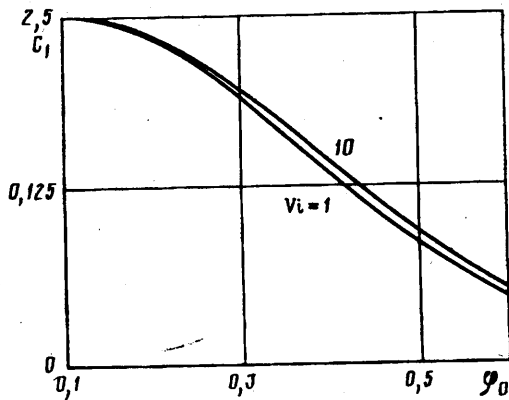
Фиг. 4

оказывается существенно неустойчивой при переходе к промышленным аппаратам, геометрически подобным лабораторным, но отличающимся от них более высоким линейным масштабом. Этот эффект имеет, как хорошо известно, исключительно большое значение для моделирования реальных промышленных установок, использующих в качестве рабочих дисперсные среды.

В пренебрежении броуновским движением частиц и масштабным эффектом кривые нейтральной устойчивости зависят лишь от концентрации однородного потока  $\varphi_0$  и от единственного физического параметра — отношения  $\kappa$  плотностей фаз суспензии. В противоположность распространенному представлению, критерии Рейнольдса и Фруда вообще не должны сказываться на устойчивости суспензий, если не иметь в виду влияние этих критериев на основной режимный параметр — среднюю концентрацию  $\varphi_0$  однородного потока.

3. Волны максимального роста. В пренебрежении броуновским движением рассмотрим характеристики возмущений в области неустойчивости, инкремент нарастания которых максимален. Можно полагать, что параметры регулярных установившихся плоских волн, если последние образуются [20], должны быть близкими к параметрам указанных возмущений.

Значения безразмерного волнового числа  $k_{1,m}$ , доставляющего максимум величине  $\text{Im } \omega_1$  из (2.1), зависят от  $\varphi_0$ , а также от  $\kappa$  и параметра  $Vi$ . Полученные численно зависимости  $k_{1,m}$  от  $\varphi_0$  в области неустойчивости при  $\kappa = 3$  и разных  $Vi$  (цифры у кривых) показаны на фиг. 3. Соответствующие зависимости безразмерной частоты возмущений  $\text{Re } \omega_1$  приведены на фиг. 4. На фиг. 5 построены зависимости от  $\varphi_0$  безразмерной скорости  $C_1 = |\text{Re } \omega_1(k_{1,m})| / k_{1,m}$  распространения



Фиг. 5.

волн максимального роста. В системе координат, связанной с частицами, эти волны движутся вверх при  $\kappa > 1$  и вниз при  $\kappa < 1$ .

Безразмерные волновое число и частота волн представляют собой возрастающие функции концентрации, т. е. увеличиваются по мере все более глубокого проникновения в область неустойчивости. Скорость волн убывает по мере роста  $\varphi_0$ . Параметр  $V_i$  серьезно влияет на частоту и длину волны, но практически не сказывается на значениях ее скорости. Отношение плотностей фаз влияет на все указанные характеристики в соответствии с соотношениями в (1.12), (1.13), (2.1).

Размерные волновое число, частота и скорость плоских волн, характеристики которых примерно совпадают с таковыми для возмущений максимального роста, получаются из  $k_{im}$  и соответствующих  $\text{Re } \omega_i$  и  $C_1$  путем домножения на масштабные факторы, использованные в (1.11). Отсюда становится ясной зависимость этих величин от всех имеющих отношение к делу физических параметров.

В заключение укажем на ограниченную применимость развитой теории в области больших концентраций. Это связано с тем, что при введении эффективной вязкости диспергированной фазы в соответствии с (1.5) фактически пренебрегли влиянием стесненности на интенсивность процессов переноса в системе пульсирующих частиц. Такое влияние обусловлено, во-первых, практически бесконечной скоростью переноса импульса внутри самих частиц и, во-вторых, эффектами экранировки любой частицы ее соседями, затрудняющими перемещение частиц [23]. В плотных газах первый эффект может быть учтен путем домножения вязкости на функцию от  $\varphi_0$ , примерно пропорциональную так называемому фактору Энскога, стремящемуся к бесконечности или к очень большой величине при переходе к состоянию плотной упаковки, а второй — путем деления коэффициента самодиффузии частиц на фактор Энскога [23]. Используя метод вычисления коэффициента  $D_{ij}$ , фигурирующего в (1.5), развитый в [21], можно показать, что этот коэффициент должен быть поделен на квадратный корень из фактора Энскога. Поэтому учет указанных эффектов должен привести к необходимости домножения эффективной вязкости на величину, приближенно пропорциональную этому корню, которая в области концентраций вблизи плотно-упакованного состояния быстро возрастает.

Указанная поправка незначительна в области малых и умеренных концентраций. Поэтому построенные выше кривые нейтральной устойчивости и зависимости характеристик волн максимального роста можно рассматривать в этой области как вполне разумные приближения. Однако это совершенно не так в интервале очень высоких концентраций.

Действительно, обсужденное выше неограниченное увеличение вязкости при приближении к состоянию плотной упаковки должно приводить к появлению



аналогичного возрастающего с концентрацией множителя при параметре  $Vi$  в (2.2). Нетрудно усмотреть, что наличие такого множителя приведет к появлению узкой области устойчивости однородного потока ограниченных размеров, непосредственно примыкающей к плотноупакованному состоянию системы. Ширина соответствующего интервала концентрации возрастает с уменьшением линейного масштаба потока от нуля, характерного для неограниченного потока. Вывод о появлении такой второй области устойчивости подтверждается всеми известными авторам экспериментами, в том числе цитированными выше. Однако количественное исследование этой области требует проведения новой серии расчетов на основе новой концентрационной зависимости эффективной вязкости диспергированной фазы, что может составить предмет независимой статьи.

С указанными выше обстоятельствами связаны и трудности количественного сопоставления теоретических выводов относительно устойчивости и свойств волн, появляющихся при ее потере, с экспериментальными данными. Дело в том, что большинство таких данных получено для псевдооживленных слоев в интервале концентраций, примыкающем к концентрации плотноупакованного (не оживленного) состояния, для которого результаты этой работы непосредственно неприменимы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kynch G. J.* A theory of sedimentation // *Trans. Faraday Soc.* 1952. V. 48. № 2. P. 166—176.
2. *Jackson R.* The mechanics of fluidized beds. I. The stability of the state of uniform fluidization // *Trans. Instn Chem. Engrs.* 1963. V. 41. № 1. P. 13—21.
3. *Pigford R. L., Baron T.* Hydrodynamic stability of a fluidized bed // *Ind. Engng Chem. Fund.* 1965. V. 4. № 1. P. 81—87.
4. *Murray J. D.* On the mathematics of fluidization. I. Fundamental equations and wave propagation // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. № 3. P. 465—493.
5. *Molerus O.* Hydrodynamische Stabilität des Fließbetten // *Chem. Ing.-Technik.* 1967. B. 39. № 5/6. S. 341—348.
6. *Anderson T. B., Jackson R.* A fluid mechanical description of fluidized beds. Stability of the state uniform fluidization // *Ind. Engng Chem. Fund.* 1968. V. 7. № 1. P. 12—21.
7. *Verloop J., Heertjes P. M.* Shock waves as a criterion for the transition from homogeneous to heterogeneous fluidization // *Chem. Engng Sci.* 1970. V. 25. № 5. P. 825—832.
8. *Buyevich Yu. A.* Statistical hydromechanics of disperse systems. 3. Pseudo-turbulent structure of homogeneous suspensions // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 56. № 2. P. 313—336.
9. *Gard S. K., Pritchett J. W.* Dynamics of gas-fluidized beds // *J. Appl. Phys.* 1975. V. 46. № 10. P. 4493—4500.
10. *Fanucci J. B., Ness N., Yen R.-H.* On the formation of bubbles in gas-particulate fluidized beds // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 94. № 2. P. 353—367.
11. *Homsy G. M., El-Kaissy M. M., Didwania A.* Instability waves and the origin of bubbles in fluidized beds. II. Comparison with theory // *Int. J. Multiphase Flow.* 1980. V. 6. № 4. P. 305—318.
12. *Didwania A. K., Homsey G. M.* Rayleigh — Taylor instability in fluidized beds // *Ind. Engng Chem. Fund.* 1981. V. 20. № 4. P. 318—323.
13. *Didwania A. K., Homsey G. M.* Resonant sideband instabilities in wave propagation in fluidized beds // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 122. P. 433—438.
14. *Needham D. J., Merkin J. H.* The propagation of a voidage disturbance in a uniformly fluidized bed // *J. Fluid. Mech.* 1983. V. 131. P. 427—454.
15. *Jackson R.* Hydrodynamic stability of fluid-particle systems // *Fluidization.* N. Y.: Acad. Press, 1985.
16. *Didwania A. K., Homsey G. M.* Flow regimes and flow transitions in liquid fluidized beds // *Int. J. Multiphase Flow.* 1981. V. 7. № 6. P. 563—580.
17. *Foscolo P. U., Gibilaro L. G.* A fully predictive criterion for the transition between particulate and aggregative fluidization // *Chem. Engng Sci.* 1984. V. 39. № 12. P. 1667—1675.
18. *Foscolo P. U., Gibilaro L. G.* Fluid dynamic stability of fluidized suspensions: the particle bed model // *Chem. Engng Sci.* 1987. V. 42. № 6. P. 1489—1500.

19. *Batchelor G. K.* A new theory of the instability of a uniform fluidized bed // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 193. P. 75—110.
20. *Ham J. M., Thomas S., Guazzelli E. et al.* An experimental study of the stability of liquid-fluidized beds // *Int. J. Multiphase Flow.* 1990. V. 16. № 2. P. 171—185.
21. *Буевич Ю. А.* Внутренние пульсации в потоках мелкодисперсных суспензий // *Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 3. С. 91—100.
22. *Буевич Ю. А.* Hydrodynamics of dispersions including diffusional effects // *Arch. Mech.* 1990. V. 42. № 4—5. P. 429—442.
23. *Гирифельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.

Екатеринбург  
Караганда

Поступила в редакцию  
5.VIII.1992