МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 532.529 + 533.15 : 519.63

© 1993 г. Ф. А. КРИВОШЕЙ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ И НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОЙ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

Аппроксимация коэффициента диффузии в газовой фазе случайным гауссовским процессом и последующее осреднение стохастического уравнения диффузии по его реализациям устраняет некорректность постановки задачи «обращения» времени — определения концентрации в предшествующие моменты времени. Приближение флуктуирующей плотности газовой фазы гауссовским случайным процессом и осреднение негиперболической системы уравнений баротропного двухфазного потока приводят к эрмитовой форме матрицы коэффициентов. Это позволяет устранить некорректность постановки задачи Коши, полученные численные решения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Общепринятые операторы осреднения параметров двухфазных сред [1] тривиальны в том смысле, что дают определение их средних значений [2]. Имея в виду существование в двухфазных потоках пространственно-временных флуктуаций их параметров, можно использовать нетривиальную процедуру статистического осреднения, учитывающего стохастический характер флуктуирующих параметров. Во многих физических задачах процессы изменения параметров во времени можно рассматривать в приближении дельта-коррелированных случайных процессов [3]. В частности, применительно к газожидкостным потокам такая аппроксимация флуктуирующих параметров имеет достаточно ясную физическую природу: спонтанные процессы образования пузырей, их разрушение, образование пленок, снарядов можно трактовать как скачки статистических средних значений параметров для рассматриваемого дельта-коррелированного процесса. Для распределенных во времени значений параметров потока как результата одновременного действия совокупности факторов приемлемым приближением можно считать гауссовский характер флуктуаций параметров. Такое приближение широко используется, например, при рассмотрении турбулентных потоков [4—6].

1. Ретроспективная задача диффузии в газовой фазе. При анализе смены режимов фазовых переходов (в частности, парообразования) возникает необходимость восстановления концентрации газовой (паровой) фазы в предшествующие моменты времени. Такие некорректные задачи известны как ретроспективные [7].

Рассмотрим необратимую задачу диффузии для противоположного направления времени. Обычный оператор диффузии в таких задачах приводит к некорректной постановке задачи «обращения» времени. Поэтому широко используется метод замены некорректного оператора некоторым оператором, например $(\partial/\partial t - \varepsilon^2\Delta^2)$, «корректным» для обратного направления времени t [8]. Однако все известные методы имеют одну общую особенность — априорный выбор оператора и отсутствие связи между видом произвольно выбранного оператора, свойствами поля концентрации и величиной малого параметра ε.

Покажем процедуру получения корректного оператора «обращения» времени, использующую стохастические свойства диффузионного поля. Введем в обычное уравнение диффузии случайный коэффициент

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \nabla(D\nabla\theta) = 0 \tag{1.1}$$

где θ — концентрация газовой фазы, D — коэффициент диффузии, который полагаем дельта-коррелированным случайным гауссовским процессом во времени

$$\langle \delta D(z, t_1)\, \delta D(z, t_2)\rangle = 2\sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \tag{1.2}$$

где σ^2 — дисперсия, $\langle \delta D\rangle = 0$. В такой постановке задача «обращения» времени формулируется на основе уравнения для среднего значения поля концентрации, получаемого при статистическом осреднении уравнения со случайным коэффициентом (1.2). Осредним уравнение (1.1) по реализациям $D(z, t)$, учитывая следующие соотношения

$$D(z, t) = \langle D(z, t)\rangle + \delta D(z, t)$$

$$\theta(z, t) = \langle \theta(z, t)\rangle + \delta\theta(z, t), \quad \langle \delta\theta\rangle = 0$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial \langle\theta\rangle}{\partial t} - \nabla(\langle D\rangle \nabla \langle\theta\rangle) - \nabla \langle \delta D \nabla\theta\rangle = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\langle \delta D\nabla\theta\rangle$ — стохастическая нелинейность. Для расщепления этой корреляции воспользуемся формулой Фурутцу — Новикова, которая для гауссовского случайного процесса имеет вид [3]

$$\langle \delta D \nabla\theta\rangle = \int_0^t d\tau \langle \delta D(t', z)\, \delta D(\tau, z)\rangle \left\langle \frac{\delta\nabla\theta(t', z)}{\delta\delta D(\tau, z)}\right\rangle, \quad t' \le t \tag{1.4}$$

Задача сводится к вычислению функциональной производной

$$\frac{\delta\nabla\theta(t, z)}{\delta\delta D(t', z)} = \nabla\left(\frac{\delta\theta(t, z)}{\delta\delta D(t', z)}\right) \tag{1.5}$$

Для этого проинтегрируем уравнение (1.3) по времени

$$\theta(t, z) = \theta(0, z) + \int_0^t d\tau \{\nabla\langle D\rangle \nabla\theta + \nabla\delta D\nabla\theta\} \tag{1.6}$$

Вычислив производную (1.5) с помощью выражения (1.6), получаем

$$\frac{\delta\theta(t, z)}{\delta\delta D(t', z)} = \int_{t'}^t d\tau \left\{\frac{\delta\nabla\delta D\nabla\theta}{\delta\delta D}\right\} + \int_0^t d\tau \left\{\frac{\delta\delta D\Delta\theta}{\delta\delta D}\right\} + \int_{t'}^t d\tau \left\{\delta D \frac{\delta\Delta\theta'}{\delta\delta D}\right\} \tag{1.7}$$

где Δ — оператор Лапласа. Нижние пределы в первом и третьем слагаемых выражения (1.7) заменены на t' в силу условия причинности, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta\theta(z, t)}{\delta\delta D(z\, t')} = 0, \quad t' > t$$

Имея в виду определение функциональной производной

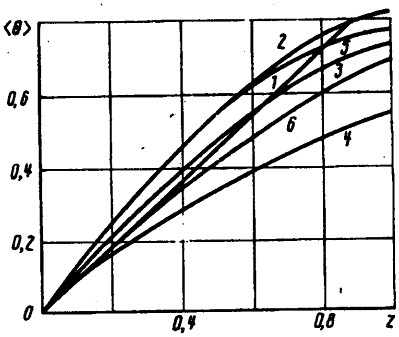
$$\frac{\delta\delta D(z, t)}{\delta\delta D(z, t')} = \delta(t - t')$$

и полагая $t = t'$, с учетом выражения (1.2) получаем

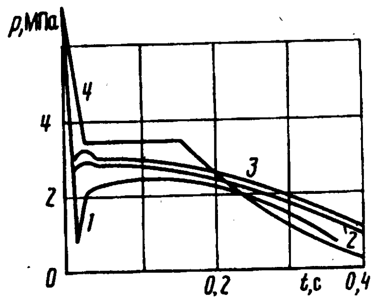
$$\langle \delta D(z, t)\, \nabla\theta\rangle = \sigma^2 \nabla\nabla\nabla\theta$$

Тогда уравнение для осредненных значений поля концентрации имеет вид

$$\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial t} - \langle D\rangle \Delta\langle\theta\rangle - \sigma^2\Delta^2\langle\theta\rangle = 0 \tag{1.8}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для (1.8) ставится задача восстановления поля в предшествующие моменты времени. Численное решение поставленной таким образом задачи может быть реализовано различными методами. Для выяснения сравнительных возможностей предлагаемого подхода численное решение задачи было получено разностным методом с симметричной дискретизацией по схеме Кранка — Николсона [8]. Начальное одномерное поле концентраций восстанавливалось для значений параметра $\sigma^2 = 10^{-3}, 10^{-2}, 5\cdot 10^{-2}$, связанных с относительными ошибками измерения полей порядка 0,01…0,05. На фиг. 1 приведены результаты восстановления начального распределения концентрации в зависимости от величины параметра σ^2: линия *1* соответствует точному значению $\langle\theta\rangle$, кривые 2, 4 соответствуют значениям $\langle\theta\rangle$ при $\sigma^2 = 10^{-3}, 10^{-2}, 5\cdot 10^{-2}$. Кривые *5*, *6* — результаты, полученные соответственно методами [8, 9]. Сравнение результатов показывает, что полученное решение дает лучшее приближение к точному начальному распределению, что объясняется, по-видимому, тем, что регуляризирующий параметр σ^2 увязан с точностью задания поля концентраций. В частности, при больших флуктуациях ($\sigma^2 \geq 5\cdot 10^{-2}$) восстановление начальной концентрации не достоверно. При малых значениях параметра $\sigma^2 < 10^{-3}$ проявляется неустойчивость восстановления, поскольку повышение степени «малости» параметра при высшей производной приводит к вырождению «корректного» оператора (1.8).

2. Регуляризация негиперболической системы уравнений баротропного двухфазного потока. Базисная система уравнений двухжидкостной модели двухфазного потока гиперболична [1]. Различные физические допущения приводят к моделям с «паталогией», связанной с потерей гиперболичности системы. Этому вопросу посвящен ряд работ [1, 10—15], в которых рассмотрены методы компенсации негиперболичности, приводящие к значительному сокращению ее области. Полного ее исключения, как правило, достичь не удается. Различные алгоритмические процедуры, подавляющие развитие неустойчивости решения негиперболической системы, могут приводить к неоцениваемой численной диффузии.

Покажем возможность регуляризации решений негиперболической системы уравнений модели неравных скоростей, температур и равных давлений фаз. В качестве базисной примем систему уравнений [12]

$$\frac{D_k W_k}{Dt} + \frac{1}{\rho_k}\frac{\partial p_k}{\partial z} = \Pi_1 \tag{2.1}$$

$$\frac{D_k h_k}{Dt} + a_k^2 \frac{\partial W_k}{\partial z} + \frac{a_k^2}{\varphi_k}\frac{D_k \varphi_k}{Dt} = \Pi_2 \tag{2.2}$$

$$\frac{D_k p_k}{Dt} + a_k^2 \rho_k \frac{\partial W_k}{\partial z} + \frac{a_k^2 \rho_k}{\varphi_k}\frac{D_k \varphi_k}{Dt} = \Pi_3 \tag{2.3}$$

$$\frac{D_k}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + W_k \frac{\partial}{\partial z}$$

где φ_k, ρ_k, W_k, p_k, h_k — соответственно объемная концентрация, плотность, давление и энтальпия фаз, a_k — скорость распространения акустических возмущений в фазе, z — координата, Π_1, Π_2, Π_3 — правые части уравнений, $k = l$, g (l — жидкая фаза, g — газовая фаза). Матрице, полученной после преобразований системы (2.1)—(2.3) при $p = p_g = p_l$, соответствует вектор неизвестных $S = S(W_g, W_l, p, \varphi, h_g, h_l)$ и определитель [12]

$$D = (W_g - \nu)(W_l - \nu) \begin{vmatrix} (m_{11} - \nu) & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & (m_{22} - \nu) & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & (m_{33} - \nu) & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & (m_{44} - \nu) \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

$$R = \left(\sum_k \frac{\varphi_k}{\rho_k a_k^2} \right)^{-1}, \ \varphi = \varphi_g, \ \varphi_e = 1 - \varphi, \ m_{11} = W_g$$

$$m_{13} = \rho_g^{-1}, \ m_{22} = W_e, \ m_{23} = \rho_e^{-1}, \ m_{31} = R\varphi$$

$$m_{32} = R(1 - \varphi), \ m_{33} = R \sum_k \frac{\varphi_k W_k}{\rho_k a_k^2}, \ m_{34} = R(W_g - W_e)$$

$$m_{41} = \varphi \left(1 - \frac{R\varphi}{\rho_g a_g^2}\right), \ m_{42} = -\varphi(1 - \varphi)\frac{R}{\rho_g a_g^2}$$

$$m_{43} = \frac{\varphi}{\rho_g a_g^2}\left(W_g - R \sum_k \frac{\varphi_k W_k}{\rho_k a_k^2}\right), \ m_{44} = W_g - \frac{R\varphi}{\rho_g a_g^2}(W_g - W_e)$$

где ν — характеристическое направление системы. Соответствующий характеристический многочлен имеет вид

$$(W_g - \nu)(W_l - \nu)\Big\{ (W_g - \nu)^2 (W_l - \nu)^2 - \\ - \frac{\varphi\rho_l (W_l - \nu)^2 + (1 - \varphi)\rho_g (W_g - \nu)^2}{\varphi\rho_l / a_g^2 + (1 - \varphi)\rho_g / a_l^2} \Big\} = 0 \tag{2.5}$$

Два его корня $\nu_1 = W_g$, $\nu_2 = W_l$, а среди остальных корней имеется пара комплексно сопряженных

$$\nu_{3,4} = \frac{\rho_g \rho_e}{\varphi\rho_e + (1 - \varphi)\rho_g} \left\{ \frac{\varphi W_e}{\rho_g} + \frac{(1 - \varphi) W_g}{\rho_e} \pm i(W_g - W_e)\left[\frac{\varphi(1 - \varphi)}{\rho_g \rho_e}\right]^{1/2} \right\} \tag{2.6}$$

Это делает постановку задачи Коши некорректной. Предлагаемый подход к регуляризации (гиперболизации) баротропной системы состоит в приведении матрицы ее коэффициентов к симметрической форме, характеристические направления которой вещественны [16]. Этот результат может быть получен следующим образом.

Вследствие статистического характера процессов в двухфазных потоках всегда имеют место флуктуации скорости распространения акустических возмущений a_k в газовой и жидкой фазах. Представим ее как случайную функцию, равную сумме осредненного и пульсационного слагаемых: $a_k = \langle a_k \rangle + \delta a_k(z)$. Полагая, что флуктуации скорости распространения акустических возмущений могут быть описаны дельта-коррелированным гауссовским процессом, введем корреляционную функцию

$$\langle \delta a_k(z_1)\, \delta a_k(z_2) \rangle = 2\sigma_a^2 \delta(z_1 - z_2) \tag{2.7}$$

где σ_a^2 — дисперсия скорости a_k. Выбор a_k в качестве стохастического параметра обусловлен в данном случае необходимостью получения симметрической матрицы коэффициентов. С этой целью используем корреляцию между параметром a_k и объемной концентрацией фаз φ_k. Умножим обе части двух первых уравнений баротропной системы [12]

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + W_k \frac{\partial W_k}{\partial z} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p}{\partial z} = \Pi_k \tag{2.8}$$

на $\sigma_a^2 \langle a_k \rangle^{-2}$, затем прибавим к обеим частям a_k, умножим на $\varphi_k \rho_k$ и осредним по реализациям случайного процесса a_k. При этом появляются члены, содержащие стохастические нелинейности $\langle a_k \varphi_k \rangle$. Раскроем их, используя формулу Фурутцу — Новикова и корреляцию (2.7)

$$\langle a_k \varphi_k \rangle = \sigma_a^2 \frac{\partial \langle \varphi_k \rangle}{\partial z}$$

Умножив обе части преобразованных уравнений (2.8) на $\langle a_k \rangle^2 \sigma_a^{-2}$, получаем

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + W_k \frac{\partial W_k}{\partial z} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_k \langle a_k \rangle^2 \frac{\partial \langle \varphi_k \rangle}{\partial z} =$$

$$= \Pi_k \langle \varphi_k \rangle \rho_k + \rho_k \langle a_k \rangle^2 \frac{\partial \langle \varphi_k \rangle}{\partial z} \tag{2.9}$$

После осреднения остальных уравнений системы по реализациям получим симметрическую матрицу

$$\begin{Vmatrix} W_g \langle \varphi \rangle \rho_g & 0 & \langle \varphi \rangle & \rho_g \langle a_g \rangle^2 \\ 0 & W_e (1 - \langle \varphi \rangle) \rho_e & 1 - \langle \varphi \rangle & -\rho_e \langle a_e \rangle^2 \\ \langle \varphi \rangle & 1 - \langle \varphi \rangle & \sum\limits_k \dfrac{\langle \varphi_k \rangle W_k}{\rho_k \langle a_k \rangle^2} & W_g - W_e \\ \rho_g \langle a_g \rangle^2 & -\rho_e \langle a_e \rangle^2 & W_g - W_e & \sum\limits_k \dfrac{W_k \rho_k \langle a_k \rangle^2}{\langle \varphi_k \rangle} \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этой матрице, и его корни имеют вид

$$\left[\frac{(W_e - \nu)^2}{\langle a_e \rangle^2} - 1 \right] \cdot \left[\frac{(W_g - \nu)(W_e - \nu)}{\langle a_g \rangle^2} - 1 \right] = 0$$

$$\nu_{3,4} = W_e \pm a_e$$

$$\nu_{5,6} = \frac{1}{2} \left\{ W_g + W_e \pm [(W_g - W_e)^2 + 4 \langle a_g \rangle^2]^{1/2} \right\} \tag{2.10}$$

Корни вещественны и полученная таким образом система гиперболична.

При численной реализации полученной уже́ корректной задачи использовались замыкающие соотношения и метод решения по программе «Канал» [12], основанный на приведении системы уравнений к характеристической форме с последующей конечно-разностной аппроксимацией по неявной схеме. Следуя подходу [12], члены $\rho_k \langle a_k \rangle^2 \partial \langle \varphi_k \rangle / \partial z$,, содержащиеся в правых частях уравнений (2.9), полагаем известными, поскольку при численном решении их значения берутся с предыдущего шага по времени. Из выражений для корней (2.6) и (2.10) следует, что в первом случае система становится гиперболичной только при нулевом скольжении (односкоростное приближение), тогда как во втором случае система остается гиперболичной при любых значениях скольжения.

На фиг. 2 приведен результат численной реализации предложенного подхода применительно к определению давления при истечении вскипающей воды из необогреваемой горизонтальной трубы, заполненной недогретой до температуры насыщения водой с начальными параметрами $p_0 = 7$ МПа, $T_0 = 513$ К [12]. На фиг. 2 приняты обозначения: *1* — эксперимент [12], *2* — результат, полученный в работе [12], *3* — данная работа, *4* — гомогенная равновесная модель. Полученные результаты несколько хуже согласуются с экспериментом, чем результаты по программе «Канал» [12], что можно объяснить, по-видимому, недостаточным числом итераций при учете в правых частях уравнений членов $\rho_k \langle a_k \rangle^2 \cdot \partial \langle \varphi_k \rangle / \partial z$, взятых с предыдущих шагов по времени.

В заключение отметим, что применение предложенного подхода к «исправлению» некорректных моделей позволяет получить решения ряда практических задач, не прибегая к чрезмерному упрощению их исходных корректных постановок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Иорданский С. В., Куликовский А. Г.* О движении жидкости, содержащей мелкие частицы//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 12—19.
3. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука. 1980. 336 с.
4. *Крошилин А. Е., Кухаренко В. Н., Нигматулин Р. И.* Осаждение частиц на стенку канала в градиентном турбулентном дисперсном потоке//Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 57—63.
5. *Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
6. *Деревич И. В., Зайчик Л. И.* Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем//ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767—774.
7. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 286 с.
8. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
9. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1962. 92 с.
10. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами//ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 418—429.
11. *Овсянников Л. В.* Модели двухслойной «мелкой воды»//ПМТФ. 1979. № 2. С. 3—14.
12. *Кузнецов Ю. Н.* Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1989. 296 с.
13. *Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И.* О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 83—95.
14. *Крайко А. Н.* К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 96—106.
15. *Крайко А. Н.* О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами//ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 420—428.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

Киев

Поступила в редакцию
4.VI.1991