

УДК 532.517.4

© 1993 г. М. В. УСТИНОВ

## СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕНИЙ СКОРОСТИ НА НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

Из эксперимента известно, что существует два различных типа ламинарно-турбулентного перехода. При первом из них, называемом клебановским, визуализация течения показывает наличие  $\lambda$ -образных вихревых структур, расположенных друг за другом. В спектре пульсаций скорости присутствуют только линии, соответствующие частотам, кратным основной частоте  $\omega_0$ .

При втором типе перехода, называемом субгармоническим, также наблюдаются  $\lambda$ -образные вихревые структуры, но расположены они в шахматном порядке. В спектре пульсаций скорости кроме гармоник основной частоты присутствуют колебания половинной частоты  $\omega_0/2$  и частот  $(m + 1/2)\omega_0$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

Теоретическое объяснение наличия двух типов перехода предложено Гербертом в [1, 2]. Согласно его представлениям, трехмерное течение при ламинарно-турбулентном переходе возникает вследствие вторичной неустойчивости двумерной волны Толлмина—Шлихтинга. При этом усиливаются трехмерные вторичные возмущения двух типов: имеющие период, равный периоду основной волны, и имеющие удвоенный период. Рост этих возмущений приводит к возникновению картины течения, характерной для клебановского и субгармонического типов перехода.

Следует отметить, что усиление вторичных трехмерных возмущений хорошо описывается моделью Герберта даже когда амплитуда скорости последних превышает амплитуду двумерной волны и модель Герберта формально неприменима. Поэтому можно ожидать, что теория, описывающая развитие вторичных возмущений с учетом их высших гармоник, будет достаточно хорошо описывать картину течения и спектры пульсаций скорости на поздних нелинейных стадиях перехода. Описанию такой теории и сравнению ее результатов с экспериментом и результатами прямого численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода посвящена настоящая работа.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале шириной  $2L$ . Ось  $X$  направим вдоль направления потока посередине канала, ось  $Z$  — перпендикулярно стенкам канала, ось  $Y$  — в трансверсальном направлении. В качестве масштабов для координат и скорости выберем скорость в центре канала  $u_{00}$  и его полуширину  $L$ .

Рассмотрим задачу об устойчивости двумерного основного течения по отношению к малым трехмерным возмущениям. Для этого поле скоростей представим в виде

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}_b(x, z, t) + \varepsilon \mathbf{V}_p(x, y, z, t), \quad \mathbf{V} = \{u, v, w\}$$

где  $\mathbf{V}_b(x, z, t)$  — основное течение,  $\mathbf{V}_p(x, y, z, t)$  — возмущения. Основное течение представляет собой суперпозицию волны Толлмина—Шлихтинга конечной амплитуды и искаженного ею течения Пуазейля. В связи с тем что скорость роста трехмерных возмущений значительно превышает скорость роста основной волны, нарастанием последней будем пренебрегать и считать основное течение периодическим по пространству и времени. Пренебрегая высшими гармониками, рассмотрим основное течение вида

$$\mathbf{V}_b = \{u_b, 0, w_b\}$$

$$u_b = U_0(z) + u_c(z) \cos \alpha \varphi + u_s(z) \sin \alpha \varphi$$

$$w_b = w_c(z) \cos \alpha \varphi + w_s(z) \sin \alpha \varphi$$

(1.1)

$$\varphi = x - ct, \quad c = \omega_0/\alpha$$

На фоне этого течения могут усиливаться два типа вторичных возмущений. Возмущения первого типа соответствуют клебановскому переходу и имеют период, равный периоду основной волны. К второму типу относятся возмущения удвоенного периода, соответствующие субгармоническому переходу. Оба типа возмущений могут быть представлены в виде  $V_p = \{u_p, v_p, w_p\}$

$$\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = c_0 e^{\sigma t} \left\{ \sum_{m=1}^M \left[ \begin{pmatrix} uc_m \\ wc_m \end{pmatrix} (z) \cos \alpha_m \varphi + \begin{pmatrix} us_m \\ ws_m \end{pmatrix} (z) \sin \alpha_m \varphi \right] \right\} \cos \beta y \quad (1.2)$$

$$v_p = c_0 e^{\sigma t} \left\{ \sum_{m=0}^M [vc_m(z) \cos \alpha_m \varphi + vs_m \sin \alpha_m \varphi] \right\} \sin \beta y$$

где  $\alpha_m = m\alpha$  — для клебановского перехода,  $\alpha_m = (m + 1/2)\alpha$  — для субгармонического перехода,  $c_0$  — произвольная константа,  $\sigma$  — комплексное число, действительная часть которого определяет скорость роста возмущений.

Подставляя выражения для основного течения (1.1) и возмущений (1.2) в уравнения Навье — Стокса, исключая давление и группируя члены порядка  $\varepsilon$ , получим систему  $2(2M + 1)$  обыкновенных дифференциальных уравнений для функций

$$wc_m(z), \quad ws_m(z), \quad nc_m(z) = -\beta uc_m - \alpha_m us_m, \quad ns_m(z) = \alpha_m vc_m - \beta us_m$$

где  $nc_m(z)$  и  $ns_m(z)$  — гармоники вертикальной завихренности  $\eta = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ .

Эта система с граничными условиями

$$wc_m(\pm 1) = wc_m'(\pm 1) = ws_m(\pm 1) = ws_m'(\pm 1) = nc_m(\pm 1) = ns_m(\pm 1) = 0$$

следующими из условия прилипания на стенках канала, образует задачу на собственные значения для величины  $\sigma$ .

Для дискретизации полученной системы уравнений применялся метод коллокаций. В качестве узлов коллокации использовались нули полинома Якоби  $P_Q^{(1,1)}(z)$ . Количество узлов  $Q$  выбиралось равным 31. После дискретизации задача сводилась к нахождению собственных значений и собственных векторов для матрицы большого порядка. Решение этой задачи традиционными методами требует большого количества вычислений. Поэтому сначала находились все собственные значения для случая  $M = 1$ . Этот случай совпадает с постановкой, описанной в работе Герберта [1, 2]. Собственное значение с наибольшей действительной частью  $\sigma_0$  использовалось как начальное приближение для итерационного метода уточнения собственных значений для системы уравнений с полным числом гармоник  $M = 5$ . В результате итераций получались собственное значение  $\sigma$  и собственная функция, из которой находились  $uc_m, us_m, vc_m, vs_m, wc_m, ws_m$  в узлах коллокации.

Как показали результаты расчетов, для случая клебановского перехода собственное значение с наибольшей действительной частью — действительное. Вторичное течение, соответствующее этому собственному значению, описывается (1.2), где все величины действительные, и обладает следующей симметрией относительно оси канала: при четных  $m$

$$uc_m(-z) = uc_m(z), \quad vc_m(-z) = vc_m(z), \quad wc_m(-z) = -wc_m(z)$$

при нечетных  $m$

$$uc_m(-z) = -uc_m(z), \quad vc_m(-z) = vc_m(z), \quad wc_m(-z) = wc_m(z)$$

Симметрия для функций  $us_m, vs_m, ws_m$  аналогична.

В случае субгармонического перехода наибольшую действительную часть имеет

пара комплексно сопряженных собственных значений  $\sigma = \sigma_r \pm i\sigma_i$ , которой соответствуют возмущения вида

$$\begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix} = c_0 e^{\sigma t} \left[ \begin{pmatrix} u_r \\ w_r \end{pmatrix} \cos(\sigma_i t + \varphi_0) + \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} \sin(\sigma_i t + \varphi_0) \right] \cos \beta y \quad (1.3)$$

$$v_p = c_0 e^{\sigma t} [v_r \cos(\sigma_i t + \varphi_0) + v_i \sin(\sigma_i t + \varphi_0)] \sin \beta y$$

где  $u_r, v_r, w_r$  и  $u_i, v_i, w_i$  — действительные и мнимые части выражений в фигурных скобках в представлении для  $u_p, v_p, w_p$  (1.2),  $\varphi_0$  — начальная фаза. Субгармонические возмущения не обладают никакой симметрией относительно оси канала.

2. Результаты расчетов. Все расчеты выполнены при  $R = u_{00}L/\nu = 5000$ ,  $\alpha = 1,12$ ,  $\beta = 1$ . Такой выбор параметров позволяет сравнивать результаты с результатами Герберта [1] и данными эксперимента по исследованию перехода в плоском канале [3]. С целью нахождения основного течения для задачи о вторичной неустойчивости и сравнения результатов проводилось также прямое численное моделирование течения при ламинарно-турбулентном переходе. Для этого поле скоростей представлялось в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_{m=0}^M \left[ \begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{j m \alpha_0 \varphi} + (\text{с. с.}) \right] \right\} \cos n \beta y \quad (2.1)$$

$$v = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{m=0}^M [v_{mn}(z, t) e^{j m \alpha_0 \varphi} + (\text{с. с.})] \right\} \sin n \beta y$$

Здесь (с. с.) означает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому.

После подстановки этих рядов в уравнения Навье — Стокса получалась система уравнений в частных производных для амплитуд  $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}$ , которая решалась численным методом. В (2.1) полагалось  $N = 1$ ,  $M = 10$ ,  $\alpha_0 = \alpha$  для клебановского и  $\alpha_0 = \alpha/2$  для субгармонического режимов перехода. При моделировании клебановского перехода в (2.1) основной волне соответствует гармоника с  $m = 1$ ,  $n = 0$ , при моделировании субгармонического перехода — с  $m = 2$ ,  $n = 0$ .

В качестве начальных условий для основной волны задавалась плоская волна с амплитудой  $a_* = 2 \max_z |u(z)| = 0,034$ . При этом значении амплитуды изоли-

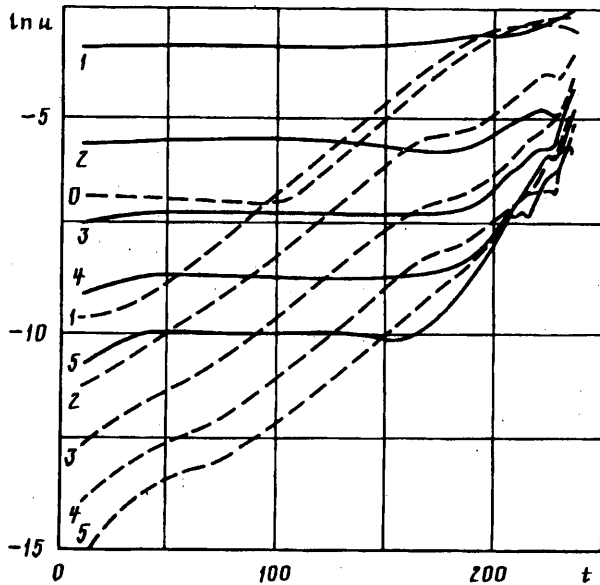
рованная основная волна сохраняет практически постоянную амплитуду. Кроме основной волны задавались малые начальные трехмерные возмущения, соответствующие гармонике с  $m = 1$ ,  $n = 1$  для субгармонического перехода и гармонике с  $m = 0$ ,  $n = 1$  для клебановского перехода. Для задания распределения скорости основной волны и трехмерных возмущений использовались собственные функции уравнения Орра — Зоммерфельда.

Результаты прямого моделирования клебановского перехода в виде зависимости амплитуд пульсаций продольной составляющей скорости отдельных гармоник  $u_{mn} = 2 \max_z |u_{mn}(z, t)|$  от времени представлены на фиг. 1. Сплошными кривыми

показаны амплитуды двумерных гармоник с  $n = 0$ , штриховыми — трехмерных гармоник с  $n = 1$ . Цифрами обозначены номера гармоник  $m$ .

Из фиг. 1 видно, что на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода происходит усиление трехмерных возмущений при практически постоянных амплитудах основной волны и двумерных гармоник. При этом графики зависимостей  $\ln(u_{m,n})(t)$  для всех трехмерных гармоник представляют собой параллельные прямые. Это означает, что скорости роста всех трехмерных гармоник совпадают между собой и не зависят от времени. Такой характер развития трехмерных возмущений подтверждает возможность описания данного явления в рамках единой задачи на собственные значения.

Рост трехмерных возмущений приводит к тому, что с некоторого момента



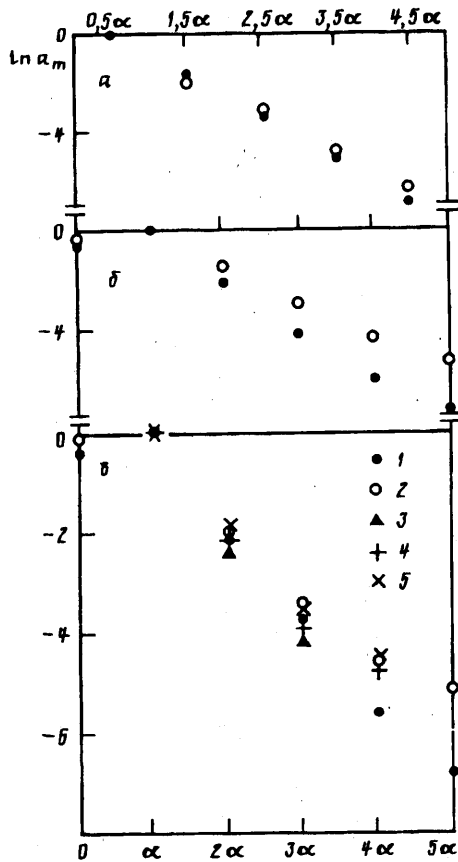
Фиг. 1

времени ( $t = 160$  на фиг. 1) их амплитуды начинают превышать амплитуды двумерных гармоник. С этого момента спектр пульсаций скорости определяется в основном трехмерными гармониками. Продолжающийся рост последних приводит к быстрому нарастанию высших гармоник в спектре пульсаций скорости, наблюдаемому в эксперименте. На этом существенно нелинейном этапе развития возмущений теория вторичной неустойчивости формально неприменима. Однако из фиг. 1 видно, что характер зависимостей амплитуд трехмерных гармоник от времени качественно не меняется. Поэтому можно надеяться, что теория вторичной неустойчивости описывает развитие пульсаций скорости и на нелинейном этапе хотя бы качественно. Следует отметить, что общие закономерности развития возмущений в случае субгармонического перехода аналогичны описанным выше.

Из рассмотренной картины развития возмущений следует, что теория вторичной неустойчивости наиболее точно описывает течение на участке линейного роста трехмерных возмущений. Поэтому выполнены расчеты вторичных течений при субгармоническом и клебановском переходе для основного течения, полученного из прямого моделирования на этом этапе (расчеты I и II). Двумерное основное течение для этих и последующих расчетов получалось из распределения скорости, найденного из прямого моделирования путем отбрасывания трехмерных и высших двумерных гармоник. Кроме того, с целью сравнения с данными эксперимента [3] решена задача о вторичной неустойчивости для основного течения, соответствующего нелинейной стадии развития возмущений для случая клебановского перехода (расчет III). Основное течение для этого расчета взято из прямого моделирования клебановского перехода при  $t = 190$ .

Собственные значения  $\sigma_0$  и  $\sigma$ , полученные в расчетах I, II, III, представлены ниже:

| Расчет     | I                  | II     | III    |
|------------|--------------------|--------|--------|
| $\sigma_0$ | $0,0489 + i0,0137$ | 0,0476 | 0,0393 |
| $\sigma$   | $0,0599 + i0,0486$ | 0,0485 | 0,0403 |
| $\sigma_H$ | $0,050 + i0,014$   | —      | —      |
| $\sigma_N$ | 0,0527             | 0,0441 | 0,0321 |



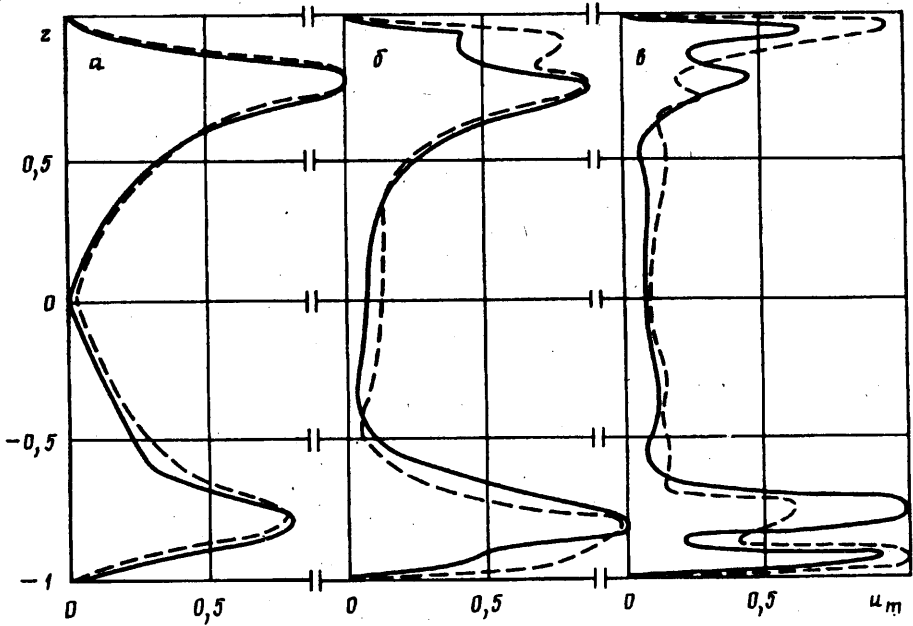
Фиг. 2

Здесь также приведены собственные значения  $\sigma_N$  для субгармонических возмущений при  $\beta = 1$ , вычисленные в [1], и скорости нарастания трехмерных возмущений  $\sigma_N$ , найденные из прямого моделирования по формуле  $\sigma_N = d \ln(u_{11})/dt$ . Скорости роста  $\sigma_N$  для сравнения с расчетами I и II вычислялись на участке линейного роста трехмерных гармоник, для сравнения с расчетом III — при  $t = 190$ .

Из вывода видно хорошее соответствие результатов для режима линейного роста трехмерных возмущений (расчеты I и II). Заметное расхождение между  $\sigma$ , полученным в расчете III, и скоростью роста трехмерных возмущений при прямом моделировании  $\sigma_N$  объясняется тем, что при  $t = 190$  амплитуда трехмерных возмущений превышает амплитуду основной волны. При этих условиях теория вторичной неустойчивости может претендовать только на качественное описание развития трехмерных возмущений.

На фиг. 2 показаны спектры пульсаций скорости в виде зависимости  $\ln a_m$ ,  $a_m = u_{mz}/u_1$ , от  $\alpha_m$ , полученные в расчетах I, II, III (фиг. 2, а, б, в соответственно, точки 1), и аналогичные спектры, полученные в результате прямого моделирования (точки 2) и измеренные в эксперименте [3] (точки 3—5). Амплитуда трехмерных пульсаций скорости  $m$ -й гармоники  $u_{mz} = \max \sqrt{u_{mz}^2 + u_{mz}^2}$  в расчетах I, II, III и  $u_{mz} = u_{mz}$  — при прямом численном моделировании.

В эксперименте [3] возмущения в поток вносились вибрирующей ленточкой и нарастали по мере распространения вдоль канала. При изображении результатов



Фиг. 3

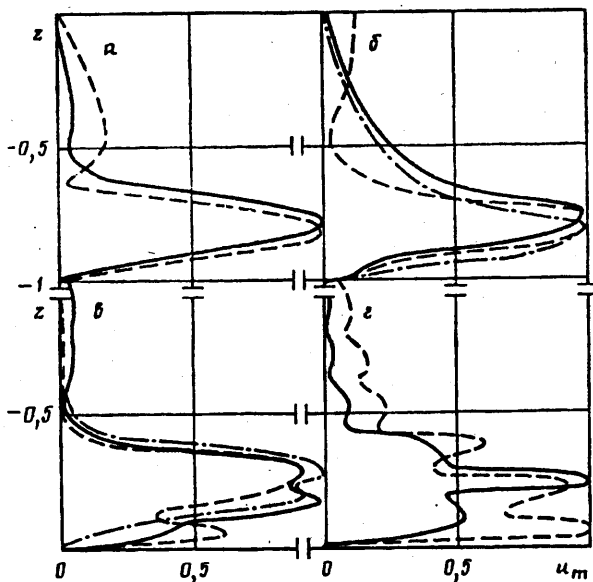
эксперимента значениям  $\alpha_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , соответствуют величины  $\ln (\langle a_m \rangle / \langle a_1 \rangle)$ , где  $\langle a_m \rangle$  — среднеквадратичная амплитуда пульсаций скорости, имеющих частоту  $\omega_m$ .

Вклад в спектр, измеряемый в эксперименте, дают как двумерные, так и трехмерные возмущения. Поэтому для сравнения с результатами теории вторичной неустойчивости нужно выбрать условия, при которых трехмерные возмущения преобладают. Ранее было показано, что эти условия реализуются с момента начала быстрого роста амплитуды высших гармоник. В эксперименте такой рост начинался с расстояния вдоль оси канала  $x = 8$  см, поэтому на фиг. 2, в точками 3—5 показаны спектры, соответствующие  $x = 8, 10, 12$  см.

Из фиг. 2, а видно хорошее соответствие спектров, полученных из задачи о вторичной неустойчивости и из численного моделирования для субгармонического перехода. Для клевановского перехода на режиме линейного роста трехмерных возмущений (фиг. 2, б) амплитуды высших гармоник, полученные из задачи о вторичной неустойчивости, заметно меньше полученных при численном моделировании. Расхождение, вероятно, объясняется тем, что при формулировке задачи о вторичной неустойчивости не учитывались высшие гармоники основной волны. В расчете III (фиг. 2, в) это расхождение меньше, так как в данных условиях двумерные гармоники малы по сравнению с трехмерными и не могут оказать заметного влияния на последние. Из фиг. 2, в видно, что спектры, полученные из теории вторичной неустойчивости, достаточно хорошо совпадают с экспериментом при  $8 \text{ см} \leq x \leq 12 \text{ см}$ .

Зависимости амплитуд пульсаций скорости трехмерных гармоник  $u_m(z) = \sqrt{uc_m^2(z) + us_m^2(z)}$  от координаты  $z$  для 1-й, 2-й и 3-й гармоник в расчете I показаны на фиг. 3, а, б, в, аналогичные зависимости для 0-й, 1-й, 2-й и 3-й гармоник в расчете III изображены на фиг. 4, а, б, в, г (сплошные кривые). Штриховыми кривыми показаны аналогичные зависимости, полученные из прямого моделирования.

Решение задачи о вторичной неустойчивости для случая субгармонического перехода (1.3) содержит неопределенную константу  $\varphi_0$ . При изображении ре-



Фиг. 4

результатов расчета  $I \varphi_0$  определялось из условия наилучшего соответствия результатам прямого моделирования, которое достигается при  $\sigma_0 t + \varphi_0 = 2,24$ . На фиг. 4 штрихпунктиром нанесены зависимости среднеквадратичной величины пульсаций скорости от  $z$  для первой гармоники при  $x = 11$  см и второй гармоники при  $x = 14$  см, полученные из эксперимента [3].

Из фиг. 3 видно достаточно хорошее соответствие результатов теории вторичной неустойчивости и численного моделирования для субгармонического перехода на линейном этапе развития трехмерных возмущений. Для клебановского перехода на этом этапе (расчет II) имеется приблизительно такое же соответствие. На нелинейной стадии клебановского перехода (фиг. 4) соответствие несколько хуже. Однако результаты задачи о вторичной неустойчивости, численного моделирования и эксперимента по крайней мере качественно соответствуют друг другу.

Из проведенного сравнения результатов можно сделать вывод, что построенная теория вторичной неустойчивости описывает развитие возмущений на линейном этапе количественно и на нелинейном этапе качественно. В отличие от модели Герберта данная теория дает высшие гармоники вторичных трехмерных возмущений, что позволяет получить описание спектров пульсаций скорости, наблюдаемых в эксперименте.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Herbert T. Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances//Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 871—874.
2. Herbert T. Three-dimensional phenomena in the transitional flat-plate boundary layer//AIAA Pap. 1985. № 489. 10 p.
3. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow//J. Fluid Mech. 1975. V. 72. № 4. P. 731—751.