МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 532.526.2

© 1993 г. В. И. ШАЛАЕВ

ОСОБЕННОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА КОНУСЕ, ОБТЕКАЕМОМ ПОД УГЛОМ АТАКИ

Течение в пограничном слое на конусе, обтекаемом под углом атаки, исследовалось во многих работах, но ряд обнаруженных здесь особенностей, которые непосредственно связаны с проблемами пространственного отрыва, существования и единственности решения уравнений трехмерного пограничного слоя, еще не имеют объяснения. Известно [1—5], что автомодельные решения уравнений пограничного слоя в плоскости симметрии многозначны, а для плоскости стекания в определенном диапазоне угла атаки они отсутствуют. Причины такого поведения решения и некоторые свойства его отдельных ветвей не понятны до сих пор. Численное интегрирование полных уравнений в окружном направлении также выявляет наличие особенности в плоскости стекания [6—10], вид которой является одной из основных характеристик, позволяющих определить структуру течения и построить адекватную математическую модель. Однако какие-либо аналитические результаты на этот счет отсутствуют, а найти точный вид особенности из анализа численных расчетов затруднительно.

В настоящей работе показано, что особенности формируются во внешней части пограничного слоя. Получены аналитические решения уравнений пограничного слоя для этой области течения и изучены их свойства. На этой основе проведена классификация известных результатов для плоскости симметрии. Показано, что в соответствии с начальными данными неавтомодельная задача также неоднозначна. Одна из ветвей решения обладает аномальными физическими свойствами, в частности для нее течение в пограничном слое остается пространственным при нулевом угле атаки, а в плоскости стекания имеется особенность, которая усиливается с уменьшением угла атаки. Вторая ветвь непрерывно переходит в решение для осесимметричного течения, но нерегулярна в плоскости стекания, причем степень нерегулярности растет с увеличением угла атаки. Получен явный вид особенностей и проведен их анализ.

1. Будем считать, что невязкое течение около конуса описывается теорией тонкого тела, так что внешние граничные условия для уравнений пограничного слоя имеют вид

$$u_e = h_e = 1, \quad w_e = \frac{3}{2} k \sin\varphi, \quad k = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\theta} \tag{1.1}$$

где φ — полярный угол в плоскости поперечного сечения конуса, измеряемый от плоскости растекания, $\theta << 1$ — половина угла раствора конуса, $\alpha = O(\theta)$ — угол атаки. Скорость вдоль образующей u и энтальпия h отнесены к своим значениям в невозмущенном потоке u_∞ и h_∞, окружная скорость w — к θu_∞. Предполагая линейную зависимость вязкости от температуры и число Прандтля равным единице, уравнения ламинарного пограничного слоя на конусе представим в форме [1]

$$f''' = -(f + k\cos\varphi g + k\sin\varphi g_\varphi) f'' + k\sin\varphi g' f_\varphi' \tag{1.2}$$

$$g''' = -(f + k\cos\varphi g + k\sin\varphi g_\varphi) g'' + k\sin\varphi g' g_\varphi' + \left(\frac{2}{3} f' + k\cos\varphi g'\right) g' -$$

$$- \left(\frac{2}{3} + k\cos\varphi\right) h$$

$$y_1 = 0: f = g = f' = g' = 0; \; y_1 = \infty: f' = g' = 1$$

Здесь индекс φ обозначает дифференцирование по φ, штрихи — дифференцирование по переменной

$$y_1 = \left(\frac{3}{2}\frac{\mathrm{Re}}{x}\right)^{1/2} \int_0^N \rho \, dN, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty}$$

где координата вдоль образующей x и нормаль к поверхности N отнесены к характерной длине L, плотность ρ — к ρ_∞, f и g — функции тока, такие, что

$$u = u_e f'(y_1, \varphi), \quad w = w_e g'(y_1, \varphi)$$

Распределения энтальпии и плотности в пограничном слое определяются интегралом Крокко и уравнением состояния

$$\rho^{-1} = h = (1 + \mathrm{M}_0) f' + h_w (1 - f') - \mathrm{M}_0 f'^2 \tag{1.3}$$

$$\mathrm{M}_0 = 0{,}5 (\gamma - 1) \mathrm{M}^2$$

Здесь γ — показатель адиабаты, M — число Маха невозмущенного потока, h_w — энтальпия на поверхности конуса.

Уравнения для плоскости симметрии имеют вид

$$f_0''' = -(f_0 + k_0 g_0) f_0'', \quad g_0''' = -(f_0 + k_0 g_0) g_0'' + \left(\frac{2}{3} f_0' + k_0 g_0'\right) g_0' - \left(\frac{2}{3} + k_0\right) h_0 \tag{1.4}$$

$$y_1 = 0: f_0 = g_0 = f_0' = g_0' = 0; \quad y_1 = \infty: f_0' = g_0' = 1$$

Их решение для положительных значений $k_0 = k$ соответствует течению в плоскости растекания ($\varphi = 0$) и служит начальным условием для уравнений (1.2); отрицательные значения параметра $k_0 = -k$ относятся к плоскости стекания ($\varphi = \pi$). Интегрированием уравнения неразрывности поперек пограничного слоя получим уравнение для толщины вытеснения $\delta(\varphi)$ [1]

$$k \sin \varphi \, (\delta - \delta_2)_\varphi + (1 + k \cos \varphi)(\delta - \delta_2) + \delta_2 - \delta_1 = 0 \tag{1.5}$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty (h - f') \, dy_1, \quad \delta_2 = \int_0^\infty (h - g') \, dy_1$$

Во внешней части пограничного слоя при $y_1 >> 1$ функции тока представляются в виде

$$f = y_1 - \delta_1 + f_1 (y_1, \varphi), \quad g = y_1 - \delta_2 + g_1 (y_1, \varphi) \tag{1.6}$$

где f_1 и g_1 предполагаются малыми по сравнению с y_1. После подстановки (1.6) в (1.2) и линеаризации полученных соотношений с учетом (1.5) найдем, что во внешней части пограничного слоя течение описывается уравнениями

$$U_{yy} + (1 + k \cos \varphi) y U_y - k \sin \varphi U_\varphi = 0, \quad U(y, \varphi) = f_1', \quad W(y, \varphi) = g_1' \tag{1.7}$$

$$W_{yy} + (1 + k \cos \varphi) y W_y - k \sin \varphi W_\varphi - \frac{2}{3} (1 + 3k \cos \varphi) W = \frac{2}{3} p U$$

$$y = y_1 - \delta, \quad p = 1 + \left(1 + \frac{3}{2} k \cos \varphi\right) p_1, \quad p_1 = \mathrm{M}_0 + h_w - 1$$

Асимптотика решений уравнений (1.4) при $y_l >> 1$ определяется уравнениями

$$W_{0yy} + (1 + k_0)\, yW_{0y} - \frac{2}{3}(1 + 3k_0)\, W_0 = \frac{2}{3} p_0(k_0)\, U_0 \tag{1.8}$$

$$U_{0yy} + (1 + k_0)\, yU_{0y} = 0, \quad p_0(k_0) = 1 + \left(1 + \frac{3}{2} k_0\right) p_l$$

Если решения уравнений (1.2) и (1.4) существуют, то решения уравнений (1.7) и (1.8) должны убывать при $y \to \infty$.

2. Решения уравнений для плоскости симметрии подробно изучены с помощью численных расчетов [1—5]. Проанализируем их свойства, используя аналитические решения уравнений (1.8), которые представим в виде

$$U_0 = A(k_0)\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{\eta_0}{\sqrt{2}}\right), \quad \eta_0 = y\sqrt{1 + k_0}, \quad \mathrm{Erfc}(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\infty} e^{-t^2} dt \tag{2.1}$$

$$W_0 = -\frac{p_0(k_0)}{1 + 3k_0} U_0(\eta_0) + B(k_0) V_0(\eta_0)$$

где $A(k_0)$ и $B(k_0)$ — постоянные, определяемые сращиванием (2.1) с численными решениями внутри пограничного слоя.

Как видно, $U_0(\eta_0)$ не убывает, если $k_0 \leq -1$. Поэтому для плоскости стекания ($k_0 = -k$) решения уравнений (1.4) существуют лишь при $k < 1$. Полученные в [3] при $k_0 \leq -1$ численные решения уравнений (1.4), как показано в [5], на самом деле не являются решениями уравнений пограничного слоя, так как зависят от положения задаваемой в расчетах внешней границы пограничного слоя y_{le}. При достаточном удалении ее от поверхности численное решение перестает удовлетворять краевому условию при $y_l = y_{le}$ и расходится. При $1 - k \to 0$ уравнения (1.8) для $\varphi = \pi$ справедливы, если $U_0 << 1$ или $y >> \sqrt{2}/\sqrt{1 - k}$.

Функция $V_0(\eta_0)$ удовлетворяет первому уравнению (1.8) с нулевой правой частью. Его можно представить в виде

$$\frac{d^2 V_0}{d\eta_0^2} + \eta_0 \frac{dV_0}{d\eta_0} - \frac{2}{3}\frac{1 + 3k_0}{1 + k_0} V_0 = 0 \tag{2.2}$$

При $k_0 > -1$ действительными линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции

$$V_{01}(\eta_0) = D_\nu(\eta_0) \exp\left(-\frac{\eta_0^2}{4}\right), \quad \nu = -1 - \frac{2}{3}\frac{1 + 3k_0}{1 + k_0} \tag{2.3}$$

$$V_{02}(\eta_0) = D_\nu(-\eta_0) \exp\left(-\frac{\eta_0^2}{4}\right)$$

где $D_\nu(\eta)$ — функция Вебера — Эрмита [11]. Условиям, при которых справедливы уравнения (1.8) ($U_0 << 1$, $W_0 << 1$), соответствуют значения переменной $\eta_0 >> 1$ и следующие оценки [11]:

$$V_{01}(\eta_0) \sim \eta_0^{\nu} \exp\left(-\frac{\eta_0^2}{2}\right), \quad V_{02}(\eta_0) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \eta_0^{-\nu-1} \tag{2.4}$$

$$U_0(\eta_0) \sim \frac{A}{\sqrt{2}\,\eta_0} \exp\left(-\frac{\eta_0^2}{2}\right)$$

где $\Gamma(-\nu)$ — гамма-функция Эйлера. Так как $\nu + 1 < 0$ при $k_0 > -1/3$, то в этом диапазоне второе уравнение (1.8) имеет два убывающих линейно независимых решения

$$W_{01}(\eta_0) = -\frac{p_0(k_0)}{1 + 3k_0} U_0(\eta_0), \quad W_{02}(\eta_0) = W_{01}(\eta_0) + B_0(k_0)\, V_{01}(\eta_0) \tag{2.5}$$

причем $\nu < -1$ и, согласно соотношениям (2.4), $W_{01}(\eta_0)$ убывает медленнее, чем $V_{01}(\eta_0)$.

Асимптотики (2.5) соответствуют двум различным решениям уравнений (1.4), полученным в [2, 3]. Это легко показать, рассмотрев предел $k \to 0$. Известно, что одно решение уравнений (1.4) регулярно при $k = 0$, а второе имеет вид [2]

$$f_0(y_1) = f_{00}(y_1) + k_0 f_{01}(y_1) + \ldots, \quad g_{01}(y_1) = k_0^{-1} g_{02}(y_1) + g_{00}(y_1) + k_0 g_{01}(y_1) + \ldots \tag{2.6}$$

Для регулярного решения $g_{02} \equiv 0$. Уравнения для функций, содержащихся в разложении (2.6), приведены в [2, 4]. Используя представление (1.6), можно показать, что уравнение для g_{02} переходит в уравнение (2.2) при $y_1 \to \infty$, $k_0 \to 0$. Для согласования решений (2.5) и (2.6) необходимо положить $B_0(k_0) = B(k_0)/k_0$, где $B(k_0)$ — регулярная функция.

В интервале $-^2/_3 < k_0 \le -^1/_3$ решений уравнений (1.4) не обнаружено [1—5]. Функции (2.5) имеют особенность только при $k_0 = -^1/_3$. Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что при $^1/_3 - -k \to 0$, $\varphi = \pi$ условием справедливости первого уравнения (1.8) ($W_{01} << 1$) является выполнение неравенства

$$y^2 >> 3\left\{\ln\left(\frac{p_0(-k)}{1-3k}\right) - \ln\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{p_0(-k)}{1-3k}\right)}\right)\right\} \tag{2.7}$$

При переходе через значение $k_0 = -^1/_3$ $W_{01}(\eta_0)$ изменяет знак и при $k_0 < -^1/_3$ убывает быстрее, чем $V_{01}(\eta_0)$, так как $\nu > -1$. Два решения уравнений (1.4), соответствующие (2.5), получены в диапазоне $-1 < k_0 \le -^2/_3$ [3, 4]. Решения уравнений (1.8), убывающие по степенному закону как $\eta_0^{-\nu-1}$

$$W_{03}(\eta_0) = W_{01}(\eta_0) + B_1(k_0)V_{02}'(\eta_0)$$

$$W_{04}(\eta_0) = W_{01}(\eta_0) + B_2(k_0)V_{01}(\eta_0) + B_3(k_0)V_{02}(\eta_0) \tag{2.8}$$

возможны, когда $\nu > 2$, или $k_0 < -11/15$, так что завихренность убывает быстрее η_0^{-4} [12]. Сравнение с результатами расчетов [4] показывает, что значение $k_0 = -11/15$ удовлетворительно согласуется с границей области, слева от которой обнаружены два решения уравнений (1.4) с асимптотикой (2.8). Заметим, что из четырех функций (2.5) и (2.8) только три линейно независимы, но все они обладают различным асимптотическим поведением.

Уравнения (1.4) получены в предположении, что при $\varphi \to 0, \pi$

$$w_e(g'f_\varphi' - g_\varphi f'') \to 0, \quad w_e(g'g_\varphi' - g_\varphi g'') \to 0 \tag{2.9}$$

Эти условия соблюдаются для обоих решений в плоскости растекания $\varphi = 0$. При численном интегрировании (1.4) обычно находится решение с асимптотикой $W_{01}(\eta_0)$. Для получения второго решения необходимо в качестве краевого условия задать асимптотику $W_{02}(\eta_0)$. Эта ветвь обладает особым поведением при $k_0 \to 0$, не удовлетворяет условию непрерывной зависимости от параметра и для нее $g_0'(y_1) < 0$ в некоторой части пограничного слоя, так что плоскость $\varphi = 0$ не является плоскостью растекания. Подобные физические соображения, позволяющие выбрать одно из нескольких решений в плоскости $\varphi = \pi$, отсутствуют, а наличие интервала, в котором решение уравнений (1.4) не существует, свидетельствует о возможном нарушении условий (2.9). Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо исследовать свойства уравнений (1.2).

3. Какие-либо точные результаты о решениях уравнений (1.2) отсутствуют, а из анализа расчетов следует, что они существуют во всем интервале $0 \le \varphi \le \pi$ только при $k < k_1$, причем здесь решения уравнений (1.2) и (1.4) для $\varphi = \pi$ совпадают и соответствуют $W_{01}(\eta_0)$ при $y_1 >> 1$. Для k_1 получены следующие значения: согласно [6], $k_1 = 0{,}307$—$0{,}333$ и зависит от θ, в [8] $k_1 = 0{,}133$, из данных [10] $k_1 = 0{,}299$, в расчетах [9] $k_1 = 1/3$. Если $k \ge k_1$, то решение уравнений (1.2) при $\varphi = \pi$ не существует, но решение для переменных $f(y_1, \varphi)$ и $G(y_1, \varphi) = w_e g(y_1, \varphi)$ имеется для $k < k_2 = 0{,}77$—$0{,}8$ [8, 10]. В этом случае условия (2.9) не выполняются, результаты интегрирования (1.2) не совпадают ни с одним из решений уравнений (1.4), а $w(y_1, \pi) \ne 0$ и является конечной величиной. Нарушение условия симметрии означает, что в окрестности плоскости стекания $g'(y_1, \varphi) \sim (\pi - \varphi)^{-1}$. Однако такой вид особенности не подтверждается анализом численных решений уравнений (1.2), приведенных в [9]. Хотя точный вид сингулярности выявить не удалось, на основе этого анализа получено, что показатель степени здесь не равен —1 и растет с увеличением угла атаки.

Как отмечалось в [5, 6], решение уравнений (1.2) и (1.4) можно получить для всех $k \le 1{,}2$, если задаваемая в расчетах внешняя граница y_{1e} не слишком удалена от поверхности, поскольку увеличение y_{1e} приводит к разрушению численного решения. Отсюда следует, что особенности, по-видимому, формируются во внешней части пограничного слоя и это позволяет найти их точный вид на основе исследования уравнений (1.7), которые заменой переменных

$$\xi = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{a(\xi, n)}}, \quad n = 3m = \frac{1}{k} \tag{3.1}$$

преобразуются к следующей форме:

$$U_{\eta\eta} + \eta U_\eta - 2ka\xi(1-\xi) U_\xi = 0 \tag{3.2}$$

$$W_{\eta\eta} + \eta W_\eta - 2ka\,[\xi(1-\xi) W_\xi + (1 + m - 2\xi) W] = 2ka\,[p_0(k) m - p_1 \xi] U$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$U(y, \varphi) = A(k) \operatorname{Erfc} \frac{\eta}{\sqrt{2}}, \quad a(\xi, n) = n a_0(\xi, n) \lambda(\xi, n) \tag{3.3}$$

$$W(y, \varphi) = -b(\xi, m) U(\eta) + C(k) a_0(\xi, m) V(\eta, \xi)$$

$$a_0(\xi, n) = \xi^{-n-1}(1-\xi)^{n-1}, \quad \lambda(\xi, n) = \int_0^\xi t^n (1-t)^{-n} dt$$

$$b(\xi, m) = p_0(k) a(\xi, m) - p_1 a_1(\xi, m)$$

$$a_1(\xi, m) = a_0(\xi, m) \int_0^\xi t^{m+1} (1-t)^{-m} dt$$

где $C(k)$ — постоянная.

Функция $V(\eta, \xi)$ есть решение однородного уравнения

$$V_{\eta\eta} + \eta V_\eta - 2\lambda V_\lambda = 0 \tag{3.4}$$

$$V = [\lambda(\xi, n)]^\beta D_\mu(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right), \quad \mu = -1 - 2\beta$$

Начальному условию $W(y, 0) = W_0(\eta_0)$ отвечают следующие значения параметров:

$$\mu = \nu, \quad \beta = \frac{m+1}{n+1}, \quad C = B(k)(1+k)^\beta k^{-\beta-1}$$

Таким образом, уравнения пограничного слоя (1.2) имеют две асимптотики для поперечного течения

$$W_1 = -b(\xi, m) U(\eta), \quad a_2(\xi, n, m) = a_0(\xi, m)[\lambda(\xi, n)]^\beta \tag{3.5}$$

$$W_2 = W_1 + B(k)(1+k)^\beta k^{-\beta-1} a_2(\xi, n, m) D_\nu(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$$

и соответствующие им два различных решения, которые разлагаются в регулярные ряды в окрестности плоскости $\varphi = 0$, но второе, согласно (2.6), сингулярно при $k = 0$.

Рассмотрим предельный вид соотношений (3.3), (3.4) и (3.5) при $k \to 0$. Метод перевала дает [11]

$$\lambda = \int_0^\xi \left(\frac{t}{1-t}\right)^n dt = \int_{\ln \xi/(1-\xi)}^{-\infty} (e^\tau + 1)^{-2} e^{(n+1)\tau} d\tau \sim \frac{\xi^{n+1}}{n+1}(1-\xi)^{1-n}$$

В соответствии с этим выражением из (3.3) и (3.5) получим

$$U = A\,\mathrm{Erfc}\,\frac{y}{\sqrt{2}}\,[1 + O(k)], \quad W_1 = -p_0(0)\,U(y)\,[1 + O(k)] \tag{3.6}$$

$$W_2 = W_1 + \frac{B(0)}{k}(1-\xi)^{-4/3} D_{-5/3}(y)\exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)[1 + O(k\ln(1-\xi))]$$

Из этих соотношений следует, что $W_1(\eta, \xi)$ непрерывно переходит в решение для осесимметричного течения при $k \to 0$, для $W_2(\eta, \xi)$ течение в пограничном слое остается пространственным при осесимметричных краевых условиях, в частности при $y_1 >> 1$ поперечная скорость определяется выражением

$$w(y, \varphi) = 3B(0)(1-\xi)^{-5/6}\sqrt{\xi}\, D_{-5/3}(y)\exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)$$

Кроме того, в плоскости стекания имеется особенность, так что решение $W_{02}(\eta_0)$ и разложение (2.6) при $k \to -0$ не имеют смысла.

4. Исследуем подробно поведение функций (3.5) в окрестности плоскости $\varphi = \pi$. Полагая $z = 1 - \xi << 1$, из (3.4) найдем

$$a_0(\xi, n) = z^{n-1}\{1 + (n+1)z + O(z^2)\}, \quad z = \left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)^2 + \ldots \tag{4.1}$$

Вид других функций (3.4) существенно зависит от значений параметра k. Используя интегрирование по частям и свойства интегралов Эйлера первого и второго рода [11], получим

$$n > 1:\ a_2 = (n-1)^{-\beta} z^{\omega}\{1 + O(z^{n-1})\}, \quad \omega = -\frac{4}{3}\frac{n}{n+1} \tag{4.2}$$

$$n < 1:\ a_2 = \left(\frac{n\pi}{2\sin\pi n}\right)^{\beta} z^{n-1}\left\{1 - \frac{2\beta\sin\pi n}{n(n-1)\pi} z^{1-n} + O(z^{2-n})\right\}$$

$$n = 1:\ a_2 = \left(-\frac{\ln z}{z}\right)^{2/3}\left\{1 + \frac{2}{3\ln z} + O\left(\frac{1}{\ln^2 z}\right)\right\}$$

Как видно, функция $W_2(y, \varphi)$ имеет особенность в плоскости стекания, которая усиливается с уменьшением угла атаки. Условия (2.9) для $W_2(y, \varphi)$ не выполняются никогда и решение $W_{02}(\eta_0)$ для $k_0 \le 0$ не имеет смысла.

Поведение возмущений продольной скорости $U(y, \varphi)$ определяется функцией $a(\xi, n)$, которая при $z \to 0$ имеет вид

$$a(\xi, n) = \frac{n}{n-1}\{1 + 2R_n(z)\}, \quad n > 3:\ R_n = \frac{z}{2-n} + O(z^2) \tag{4.3}$$

$$2 < n < 3:\ R_n = \frac{z}{2-n} - \frac{n(n-1)\pi}{4\sin\pi(n-1)} z^{n-1} + O(z^2)$$

$$1 < n < 2:\ R_n = \frac{n(n-1)\pi}{4\sin\pi n} z^{n-1} + \frac{z}{2-n} + O(z^n)$$

$$R_3 = -z - 3z^2\ln z + O(z^2), \quad R_2 = \frac{1}{2}z\ln z + \frac{3}{2}z + O(z^2\ln z)$$

$$a(\xi, 1) = -\ln z - 1 - 2z\ln z + O(z^2)$$

$$n < 1:\ a(\xi, n) = \frac{n^2\pi}{2\sin\pi n} z^{n-1} + \frac{n}{1-n} + \frac{n^2(n+1)\pi}{2\sin\pi n} z^n + O(z)$$

Таким образом, для $U(y, \varphi)$ имеют место следующие асимптотические представления:

$$n > 1:\ U = U(\eta)\,\{1 + R_n(z)\},\quad \eta = \sqrt{1-k}\,y \tag{4.4}$$

$$n < 1:\ U = U(\eta)\left\{1 - \frac{\sin \pi n}{n(n-1)\pi} z^{1-n} + O(z)\right\},\quad \eta = \frac{y}{n}\left(\frac{\sin \pi n}{\pi} z^{n-1}\right)^{1/2}$$

$$n = 1:\ U = U(\eta)\left\{1 + \frac{1}{2\ln z} + O\left(\frac{1}{\ln^2 z}\right)\right\},\quad \eta = y\left(2\ln\frac{1}{z}\right)^{-1/2}$$

Разложения (4.3) и (4.4) нерегулярны, но особенность ослабляется с уменьшением угла атаки и при $k = 0$ (4.4) переходит в (3.6). С ростом угла атаки особенность в плоскости стекания усиливается. Так, для $k = {}^1/_2$

$$U_{\varphi\varphi} \approx \frac{A}{8} y \ln z \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \to \infty$$

В интервале $k \geq {}^2/_3$ не выполняется условие симметрии для продольного течения, $U_\varphi(y, \pi) = 0$, так как

$$U_\varphi = \frac{An(n-1)\pi}{4\sqrt{2}\sin \pi n} \eta z^{n-3/2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)$$

Для $k = {}^2/_3$ $U_\varphi(y, \pi)$ принимает конечное значение. Величина $U(y, \pi)$ для плоскости стекания существует при $k < 1$, когда $\sin \varphi U_\varphi \sim z^{n-1} \to 0$ и условия (2.9) выполнены. Вне плоскости $\varphi = \pi$ функция $U(y, \varphi)$ имеет смысл при всех углах атаки, но для $k \geq 1$ область ее применимости определяется неравенствами

$$k > 1:\ y >> \left(2\ln\frac{1}{z}\right)^{1/2};\quad k > 1:\ y >> n\left(\frac{\pi}{\sin \pi n} z^{n-1}\right)^{1/2} \tag{4.5}$$

Поведение в окрестности плоскости стекания ветви функции $W(y, \varphi) = W_1(y, \varphi)$ определяется в основном свойствами функции $b(\xi, m)$, для которой при $k \geq {}^1/_6\,(m \leq 2)$ и $z \to 0$ получим следующие асимптотические разложения:

$$b(\xi, m) = b_0 + b_1 z + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m + O(z^2)$$

$$b_0 = \frac{m + (m + 1/2)p_1}{m-1},\quad b_1 = -m\frac{2 + p_1}{(m-1)(m-2)}$$

$$b_{m-1} = \frac{m\pi(3m + (2m + 1/2)p_1)}{6\sin \pi m},\quad b_m = (m+1)\,b_{m-1} \tag{4.6}$$

$$b(\xi, 2) = 2 + \frac{3}{2}p_1 + 2(2 + p_1) z\ln z + 3(2 + p_1) z + O(z^2 \ln z)$$

$$b(\xi, 1) = -1 - \frac{1}{2}(2 + p_1)(\ln z + 2z\ln\ z + z) + O(z^2\ln z)$$

Как и в случае (4.3), степень нерегулярности рядов (4.6) растет с увеличением угла атаки. При $k > {}^2/_9$ $(m < {}^3/_2)$ не существует производная $W_\varphi(y, \pi)$, но для $k < {}^1/_3$ $(m > 1)$ решение $W_{01}(\eta_0)$ в плоскости стекания существует, $W_\varphi \sin\varphi \sim$

$\sim z^{m-1} \to 0$ и условия (2.9) выполнены. При углах атаки $k \geq {}^1/_3$ ни одно из решений (2.5) и (2.8) не имеет смысла. Это означает, что затухающие по степенному закону решения уравнений (1.4) не реализуются никогда. Вне плоскости стекания для $k \geq {}^1/_3$ решение $W_1(y, \varphi)$ справедливо при условиях

$$k = \frac{1}{3}: \; y^2 \gg 3 \left\{ \ln\ln\frac{1}{z} - \ln 2\sqrt{\ln\ln\frac{1}{z}} + \ldots \right\} \tag{4.7}$$

$$k > \frac{1}{3}: \; \eta^2 \gg 2\left\{ (1-m)\ln\frac{1}{z} - \ln 2\sqrt{(1-m)\ln\frac{1}{z}} + \ldots \right\}$$

где переменная η определена в соотношениях (4.4).

Скорость поперечного течения во внешней части пограничного слоя при $z \to 0$ имеет вид

$$w(y, \varphi) = 3k\sqrt{z}\{1 - (b_0 + b_{m-1}z^{m-1})\, U(\eta)\} \tag{4.8}$$

Если $k = {}^1/_3$, здесь вместо z^{m-1} следует подставить $\ln z$. Из (4.8) следует, что при $k < {}^2/_3$ $w(y, \pi) = 0$. Для $k = {}^2/_3$ окружная скорость имеет конечное значение

$$w(y, \pi) = \frac{1}{4}\pi(1 + p_1)\, U\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right) \tag{4.9}$$

а при $k > {}^2/_3$ $w(y, \pi) = \infty$.

Численное интегрирование уравнений (1.2) [8, 10] дает конечное значение окружной скорости в целом интервале $k_1 < k < k_2$ изменения угла атаки. Причина такого расхождения заключена в особом поведении $w(y, \varphi)$, которое не разрешается разностной схемой. Это можно пояснить следующим образом. Разностная аппроксимация уравнений (1.2) основана на разложении искомых функций в ряд Тейлора на шаге интегрирования $\Delta\varphi$ с учетом только линейного слагаемого. Отвлекаясь от конкретной реализации этого метода в [8, 10], вычислим с его помощью $w(y, \pi)$

$$w(y, \pi) = w(y, \pi - \Delta\varphi) + w_\varphi(y, \pi - \Delta\varphi)\,\Delta\varphi \tag{4.10}$$

Используя для вычисления $w(y, \pi - \Delta\varphi)$ и $w_\varphi(y, \pi - \Delta\varphi)$ соотношение (4.8) и полагая $\Delta\varphi = 2\sqrt{z}$, получим для $k > {}^1/_6$

$$w(y, \pi) = 6k(m-1)\, b_{m-1}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^{2m-1} U(\eta) \tag{4.11}$$

Это соотношение определяет ошибку разложения (4.10) и, следовательно, точность основанной на нем разностной схемы. Для $k > {}^2/_9$ имеем $2m - 1 < 2$ и учет квадратичного слагаемого в (4.10) не улучшает аппроксимации. При $k > {}^1/_3$, поскольку $2m - 1 < 1$, ошибка превышает величину линейного слагаемого в (4.10) и точность разностной схемы имеет нулевой порядок. Таким образом, полученные в расчетах [8, 10] значения $w(y, \pi)$, по-видимому, связаны с ошибками аппроксимации, а не с реальными особенностями, хотя (4.11) и совпадает с (4.9) при $k = {}^2/_3$.

Толщины $\delta_1(\xi)$ и $\delta_2(\xi)$ можно оценить как границы областей, в которых $U = O(1)$ и $W = O(1)$, так что если $z \to 0$, то при $k < 1$ $\delta_1 \sim 1/\sqrt{1-k}$, при $k < 1/3$ $\delta_2 \sim \sqrt{3\ln[1/(1-3k)]}$. Для $k \geq 1$ $\delta_1(z)$ определяется правыми частями неравенств (4.5), а $\delta_2(z)$ для $k \geq {}^1/_3$ — правыми частями (4.7), т. е.

$$k = \frac{1}{3}: \; \delta_2^2 \sim 3\ln\ln\frac{1}{z} - \ln 2\sqrt{\ln\ln\frac{1}{z}} + \ldots \tag{4.12}$$

$$k > \frac{1}{3}: \ \delta_2^2 \sim 2\delta_1^2 \left\{ (1-m) \ln \frac{1}{z} - \ln 2\sqrt{(1-m)\ln \frac{1}{z}} + \ldots \right\}$$

Уравнение (1.5) для $\delta(\xi)$ интегрируется в виде

$$\delta(\xi) = \delta_2(\xi) + \frac{n}{2} \xi^{-(n+1)/2-(1-n)/2} \int_0^{\xi} t^{(n-1)/2} (1-t)^{-(n+1)/2} \Delta(t)\, dt \tag{4.13}$$

$$\Delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t)$$

где (4.13) удовлетворяет начальному условию [1]: $\delta(0) = [\delta_1(0) + k\delta_2(0)]/(1+k)$. Согласно (4.5), (4.12) и (4.13), $\delta(z) = O(1)$ при $k < {}^1/_3$, а для $k \geq {}^1/_3$ $\delta(z) \sim \delta_2(z)$ и неограниченно растет при $z \to 0$.

Представленные результаты показывают, что классическая теория пограничного слоя неприменима для описания течения в окрестности плоскости стекания при $k \geq {}^1/_3$. На их основе может быть построена регулярная физическая модель, обсуждение которой выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moore F. K.* Laminar boundary layer on cone in supersonic flow at angle of attack//NACA. Rep. 1953. № 1132. 13 p.
2. *Башкин В. А.* Об единственности автомодельных решений уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 35—41.
3. *Murdock J. W.* The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry//J. Fluid Mech. 1972. V. 54. № 4. P. 665—678.
4. *Wu P., Libby P. A.* Laminar boundary layer on a cone near plane of symmetry//AIAA Journal. 1973. V. 11. № 3. P. 326—333.
5. *Rubin S. G., Lin T. C., Tarulli F.* Symmetry plane viscous layer on a sharp cone//AIAA Journal. 1977. V. 15. № 2. P. 204—211.
6. *Введенская Н. Д.* Расчет ламинарного пограничного слоя, возникающего при обтекании конуса под углом атаки//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 2. С. 304—312.
7. *Boericke R. R.* The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flows//AIAA Journal. 1971. V. 9. № 3. P. 462—468.
8. *Нейланд В. Я., Соколов Л. А.* Ламинарный пограничный слой на конусе, установленном под углом атаки в сверхзвуковом потоке//Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1819. С. 3—9.
9. *Хонькин А. Д., Шалаев В. И.* Ламинарное безотрывное обтекание тонких тел//Тр. ЦАГИ. 1985. Вып. 2265. С. 95—112.
10. *Cebeci T., Stewartson K., Brown S. N.* Nonsimilar boundary layers on the leeside of cones at incidence//Int. J. Computers and Fluids. 1983. V. 11. № 3. P. 175—186.
11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1, 2. 342 с. 515 с.
12. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.VII.1992