

УДК 532.526.2

© 1993 г. Л. В. БЕЗГИН, А. Н. ГАНЖЕЛО

## К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЕ ПРОФИЛЯ ТУРБИННОЙ ЛОПАТКИ

Рассмотрены задачи оптимизации вдува охладителя в ламинарный пограничный слой сжимаемого газа в рамках интегрального метода расчета пограничного слоя [1]. Задачи такого типа рассматривались ранее в монографии [2] и в цитируемых в ней работах. В отличие от упомянутых задач в настоящей работе температура поверхности профиля на задается, а находится в процессе решения задачи, выступая в качестве управления. Для решения вариационных задач применяется принцип максимума Понтрягина [3, 4]. На основе этого подхода создан метод решения вариационных задач по определению оптимального вдува в пограничный слой, который можно использовать для вариационных задач с достаточно широким классом оптимизируемых функционалов как с изопериметрическими условиями, так и без них. Значительное внимание уделено задаче минимизации интегрального расхода охладителя, вдуваемого в пограничный слой, при заданных ограничениях на температуру охлаждаемой поверхности.

В настоящей работе используется интегральный метод расчета ламинарного пограничного слоя [1]. Поскольку этот метод реализуется в процессе решения всего лишь одного обыкновенного дифференциального уравнения, его удобно использовать при разработке алгоритмов решения соответствующих вариационных задач, а также при качественном исследовании решений этих задач. Это позволяет эффективно выявлять характерные черты оптимальных решений. Разработанный алгоритм численного решения вариационных задач легко переносится на случай более точных методов, разработанных с учетом всех основных факторов, действующих в пограничном слое.

1. При выводе основного дифференциального уравнения в [1] используются следующие допущения: число Прандтля  $Pr = 1$ ,  $\mu/\mu_e = T/T_e$ ,  $c_p = \text{const}$ , поток на внешней границе пограничного слоя изоэнергетический и изоэнтропический,  $g$  — отношение толщины динамического пограничного слоя к толщине теплового — постоянно вдоль границы профиля и равно значению в точке торможения. Здесь  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $T$  — абсолютная температура газа,  $c_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, индекс  $e$  соответствует величинам на внешней границе пограничного слоя.

При этих предположениях толщина динамического пограничного слоя  $\delta_d$  определяется в результате решения уравнения

$$\frac{dz_1}{d\xi} = \frac{f(\xi, z_1, t_w)}{u_e(\xi)/u_\infty} = f_1(\xi, z_1, t_w), \quad z_1 = \delta_d^2 \quad (1.1)$$

$$f = \frac{v_e}{v_\infty} \frac{2}{F_1} \left( Cg + \frac{2}{(1 + Cg/6)} \right) - z_1 \left[ \frac{2}{F_1} \left( 1 + \frac{(x-1)}{2} M_e^2 \right) K_1 + K_2 \right] \frac{u_e'}{u_\infty}$$

$$F_1 = 0,1143 + 0,00953\alpha_1 - 0,00397\alpha_1^2, \quad C = 3 \left[ \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{(1-t_w)}{(t_w-t_c)} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

$$K_1 = \frac{0,1(1-t_w)}{g(1+C/6)} + t_w \left( \frac{0,4}{g} - \frac{1}{6(1+Cg/6)} \right)$$

$$K_2 = 2(2 - M_\infty^2) + \frac{2}{F_1} \left[ 0,4 \left( 1 - \frac{1}{g} \right) - 0,05\alpha_1 + \right. \\ \left. + \frac{(\kappa - 1)}{2} M_\infty^2 \left( 0,514 - \frac{0,4}{g} - 0,0405\alpha_1 - 0,00397\alpha_1^2 \right) \right]$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{12 + \delta_d^2 t_w (u_e' / u_\infty)(v_\infty / v_e)}{6(1 + Cg/6)} \right) \Big|_{\xi=0}$$

$$M_e^2 = M_\infty^2 \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^2 \frac{T_\infty}{T_e}, \quad \frac{v_e}{v_\infty} = \left( \frac{T_e}{T_\infty} \right)^{(\kappa-2)/(\kappa-1)}$$

$$\frac{T_e}{T_\infty} = 1 + \frac{(\kappa - 1)}{2} M_\infty^2 \left( 1 - \left( \frac{u_e}{u_\infty} \right)^2 \right), \quad t = \frac{I}{I_e}, \quad I = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

Здесь  $\xi$  — безразмерная координата вдоль границы профиля, отсчитываемая от точки торможения,  $u$  — проекция вектора скорости на направление касательной к профилю,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $M$  — число Маха,  $\kappa$  — показатель адиабаты. Индекс  $\infty$  соответствует параметрам набегающего потока,  $w$  — параметрам на поверхности профиля,  $c$  — параметрам охладителя, штрих означает производную по  $\xi$ . В точке торможения  $u_e(0) = 0$ . Поскольку величина  $dz_1/d\xi$  конечна при  $\xi = 0$  в общем случае, то и

$$f(0, z_1(0), t_w(0)) = 0 \quad (1.2)$$

Точка торможения — особая точка дифференциального уравнения (1.1). Из условия (1.2) определяется толщина динамического пограничного слоя в передней точке торможения. Таким образом, любой достаточно гладкой функции  $t_w(\xi)$  соответствует удовлетворяющее условию (1.2) решение уравнения (1.1) и безразмерный параметр вдува  $\varphi = (\rho v)_w / (\rho u)_\infty Re^{1/2}$ , определяемый с помощью соотношения

$$\varphi = \frac{Cg}{\delta_d} \frac{T_e}{T_\infty}$$

где  $Re = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$ ,  $\rho$  — плотность газа,  $v$  — проекция скорости газа на нормаль к границе профиля турбинной лопатки,  $L$  — длина дуги границы профиля лопатки от точки торможения до задней кромки.

Вариационная задача формулируется следующим образом: найти функцию  $t_w(\xi)$ , доставляющую минимум некоторому функционалу  $J$  (1.3), при заданном изопериметрическом условии (1.4), дифференциальной связи (1.1) и условии в точке торможения (1.2). При этом предполагается, что управление  $t_w(\xi)$  удовлетворяет заданным ограничениям (1.5)

$$J = \int_0^1 f_0(\xi, z_1, t_w) d\xi \quad (1.3)$$

$$P = \int_0^1 f_2(\xi, z_1, t_w) d\xi = \text{const} \quad (1.4)$$

$$t_{\min}(\xi) \leq t_w(\xi) \leq t_{\max}(\xi) \quad (1.5)$$

В изопериметрическом условии (1.4)  $P$  — заданная константа. Ограничения (1.5) вполне естественны для задач такого типа. Максимальная температура  $t_{\max}(\xi)$  соответствует предельно допустимой температуре поверхности лопатки. Задание минимальной температуры  $t_{\min}(\xi)$  равносильно постановке ограничения сверху на удельный расход охладителя  $(\rho v)_w$ . В неравенстве (1.5)  $t_{\min}(\xi)$  — про-

извольная функция, такая, что  $t_{\min}(\xi) > t_c(\xi)$  для любого  $\xi$ . Здесь рассматривается только одна сторона профиля от точки торможения до задней кромки, так как в данной постановке задачи течение вдоль одной стороны профиля не влияет на течение вдоль другой.

Сформулированная вариационная задача — типичная задача Лагранжа. Множество допустимых управлений замкнуто, поэтому для ее решения используем принцип максимума Понтрягина теории оптимального управления [3, 4]. Введем новых зависимых переменных  $z_0(\xi)$ ,  $z_2(\xi)$  с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_0}{d\xi} = f_0(\xi, z_1, t_w), \quad \frac{dz_2}{d\xi} = f_2(\xi, z_1, t_w) \quad (1.6)$$

и краевых условий

$$z_0(0) = 0, \quad z_1(0) = 0, \quad z_2(1) = P \quad (1.7)$$

задача Лагранжа сводится к задаче Майера.

Эта задача формулируется следующим образом: с учетом ограничений (1.5) найти управление  $t_w(\xi)$ , доставляющее минимум функционалу  $J = z_0(1)$ , при этом фазовые переменные  $z_0(\xi)$ ,  $z_1(\xi)$ ,  $z_2(\xi)$  связаны дифференциальными уравнениями (1.1), (1.6) с граничными условиями (1.2), (1.7).

2. Для решения данной задачи применяется принцип максимума Понтрягина, согласно которому на оптимальной траектории  $z(\xi) = \{z_0(\xi), z_1(\xi), z_2(\xi)\}$  функция Гамильтона  $H(z(\xi), t, \psi(\xi), \xi)$  достигает максимума по  $t$  в точке  $t_w(\xi)$  оптимального управления, т. е.

$$H(z(\xi), t_w(\xi), \psi(\xi), \xi) = \max_{t \in [t_{\min}(\xi), t_{\max}(\xi)]} H(z(\xi), t, \psi(\xi), \xi) \quad (2.1)$$

$$H(z(\xi), t, \psi(\xi), \xi) = \sum_{i=0}^2 \psi_i(\xi) f_i(\xi, z_1, t), \quad \psi(\xi) = \{\psi_0(\xi), \psi_1(\xi), \psi_2(\xi)\} \quad (2.2)$$

Оптимальная траектория  $z(\xi)$  определяется из системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.6) с граничными условиями (1.2), (1.7), а  $\psi(\xi)$  удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial z_i} = -\sum_{j=0}^2 \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.3)$$

с граничными условиями — условиями трансверсальности. В случае, когда на  $z_1(1)$  не наложено никаких ограничений, эти условия принимают вид

$$\psi_1(1) = 0 \quad (2.4)$$

Из выражения (2.2) видно, что  $H(z(\xi), t, \psi(\xi), \xi)$  не зависит от  $z_0(\xi)$  и  $z_2(\xi)$ , поэтому для  $i = 0, 2$  уравнения (2.3) принимают вид

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{d\xi} = 0$$

т. е.  $\psi_0$  и  $\psi_2$  — постоянные величины. Согласно общей теории [3, 4],  $\psi_0 < 0$ . Выбираем  $\psi_0 = -1$ . Величина  $\psi_2$  подбирается так, чтобы выполнялось краевое условие  $z_2(1) = P$ . Тогда для  $i = 1$  уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} = \frac{\partial f_0}{\partial z_1} - \frac{\psi_1}{u_e(\xi)/u_\infty} \frac{\partial f}{\partial z_1} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \quad (2.5)$$

Поскольку в общем случае  $d\psi_1/d\xi$ ,  $\partial f_0/\partial z_1$ ,  $\partial f/\partial z_1$ ,  $\partial f_2/\partial z_1$  — конечные величины при  $\xi = 0$ , а  $u_e(0) = 0$ , то необходимо, чтобы выполнялось условие  $\psi_1(0) = 0$ .

При исследовании особой точки сопряженного уравнения (2.5) это условие будет обосновано более строго.

Оптимальное управление выбирается из принципа максимума Понтрягина (2.1) и в общем случае состоит из участков краевого и двустороннего экстремума. На последних следствием (2.1) является условие

$$\partial H / \partial t = 0 \quad (2.6)$$

В точке торможения оптимальное управление выбирается также при помощи (2.1), но со спецификой, характерной для особой точки. В этой точке  $\psi_1 = 0$ ,  $u_e = 0$ , поэтому

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \left( \frac{\psi_1}{u_e / u_\infty} \right) = \frac{\psi_1'}{u_e' / u_\infty} \Big|_{\xi=0}$$

Из уравнения (2.5)

$$\psi_1' (0) = \frac{(\partial f_0 / \partial z_1 - \psi_2 \partial f_2 / \partial z_1) u_e' / u_\infty}{(u_e' / u_\infty + \partial f / \partial z_1)}$$

Тогда в точке торможения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{(\partial f_0 / \partial z_1 - \psi_2 \partial f_2 / \partial z_1) \partial f}{(u_e' / u_\infty + \partial f / \partial z_1) \partial t} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} \quad (2.7)$$

Если этой точке соответствует краевой экстремум, то  $\partial H / \partial t|_{t=t_{\max}(0)} \geq 0$  или  $\partial H / \partial t|_{t=t_{\min}(0)} \leq 0$ . При этом надо проверять, достигла ли функция  $H(t)$  наибольшего значения при рассматриваемом краевом значении  $t$  и соответствующем ему значении  $z_1$ , которое определяется из уравнения (1.2).

Если точке торможения соответствует двусторонний экстремум, то соответствующие значения  $z_1(0)$  и  $t_w(0)$  определяются из уравнений (1.2), (2.6) с учетом выражения (2.7). При этом для определения  $dz_1 / d\xi|_{\xi=0}$  надо знать величину  $dt_w / d\xi|_{\xi=0}$ , которая определяется из линейного относительно  $dt_w / d\xi|_{\xi=0}$  уравнения

$$\left( \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right) \Big|_{\xi=0} = 0$$

Стратегия численного решения сформулированной вариационной задачи следует работе [5]. Исходя из физических соображений, задается начальное приближение для искомого управления  $t_w(\xi)$  и решается система уравнений (1.1), (1.6) слева направо при начальных условиях  $z_0(0) = 0$ ,  $f(0, z_1(0), t_w(0)) = 0$ ,  $z_2(0) = 0$ . При этом начальное приближение для  $t_w(0)$  удовлетворяет принципу максимума в точке торможения в соответствии с изложенным выше. В точке  $\xi = 1$  проверяется условие  $z_2(1) = P$  и в соответствии с этим корректируется значение  $\psi_2$ . Затем решается сопряженное уравнение (2.5) справа налево при условии (2.4). На каждом шаге интегрирования определяется следующее приближение для оптимального управления, исходя из принципа максимума (2.1). После получения нового приближения при превышении невязкой заданной точности происходит переход к следующей итерации.

3. В окрестности особой точки  $\xi = 0$  уравнения (1.1) и (2.5) можно записать в виде

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{az + b\xi}{m\xi} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} = \frac{-a\psi_1 + c\xi}{m\xi} \quad (3.2)$$

$$a = \left. \frac{\partial f}{\partial z_1} \right|_{\xi=0}, \quad z = z_1 - z_1(0), \quad m = \left. \frac{1}{u_\infty} \left( \frac{du_e}{d\xi} \right) \right|_{\xi=0}$$

$$b = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial t_w} \frac{dt_w}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=0}, \quad c = \left( \left( \frac{\partial f_0}{\partial z_1} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \right) m \right) \Big|_{\xi=0}$$

Тогда в соответствии с общей теорией [6] характеристическое соотношение для уравнения (3.1) будет

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ 0 & m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

а для уравнения (3.2)

$$\begin{vmatrix} -a - \lambda & c \\ 0 & m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Уравнению (3.1) соответствуют собственные значения  $\lambda_1 = a$ ,  $\lambda_2 = m$ , а уравнению (3.2)  $\lambda_1 = -a$ ,  $\lambda_2 = m$ . Это говорит о том, что уравнения (3.1) и (3.2) всегда имеют особые точки разных типов. Если одному из уравнений соответствует седло, то другому обязательно — узел. Численное исследование показало, что  $a < 0$ , а поскольку всегда  $m > 0$ , то уравнению (3.1), а значит, и (1.1) соответствует особая точка типа седло; а уравнению (3.2), а значит, и (2.5) — узел. Аналогичный факт ранее отмечен в [7] применительно к оптимизации МГД-генератора. Поэтому условие  $\psi(0) = 0$  выполняется для всех интегральных кривых уравнения (2.5).

Значениям  $\lambda_1 = a$  для уравнения (3.1) и  $\lambda_1 = -a$  для уравнения (3.2) соответствуют собственные направления  $d\xi/dz = 0$  и  $d\xi/d\psi_1 = 0$ , с которыми интегральные кривые входят в особую точку. Этим направлениям соответствует интегральная кривая  $\xi = 0$ . Ясно, что такое решение не имеет физического смысла.

Собственное значение  $\lambda_2 = m$  является общим для обоих уравнений. Ему соответствуют собственные направления  $dz/d\xi = dz_1/d\xi = b/(m - a)$  для уравнения (3.1) и  $d\psi_1/d\xi = c/(m + a)$  для уравнения (3.2). Интегральные кривые, соответствующие этим направлениям, отражают реальный физический процесс. Решения уравнений (3.1), (3.2), за исключением решения  $\xi = 0$ , имеют соответственно вид

$$z = b/(m - a) \xi + C_1 \xi^{a/m} \quad (3.3)$$

$$\psi_1 = c/(m + a) \xi + C_2 \xi^{-a/m} \quad (3.4)$$

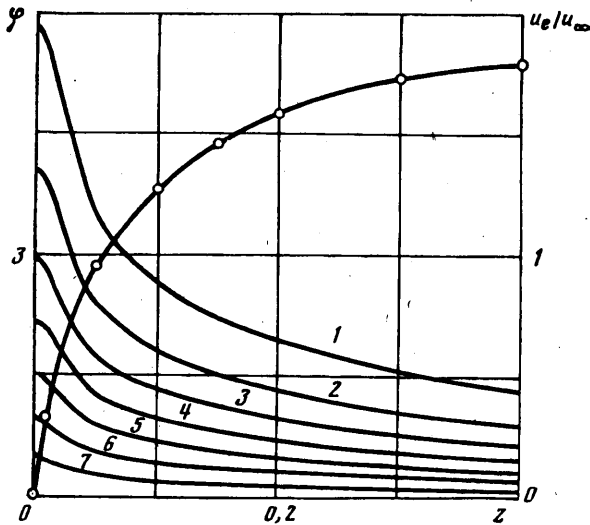
Из семейства (3.3) в особую точку входит только одна кривая при  $C_1 = 0$ , тогда как из семейства (3.4) в особую точку входят все кривые. Численное исследование показало, что  $a/m < -1$ , поэтому все кривые семейства (3.4) входят в особую точку с одинаковым наклоном  $d\psi_1/d\xi = c/(m + a)$ . Проведенный анализ поведения интегральных кривых в окрестности особой точки с учетом лишь линейных членов сохраняет свою силу и для исходных уравнений (1.1), (2.5) в силу достаточной гладкости нелинейных членов.

4. В задаче минимизации интегрального расхода охладителя без изопериметрического условия минимизируемый функционал имеет вид

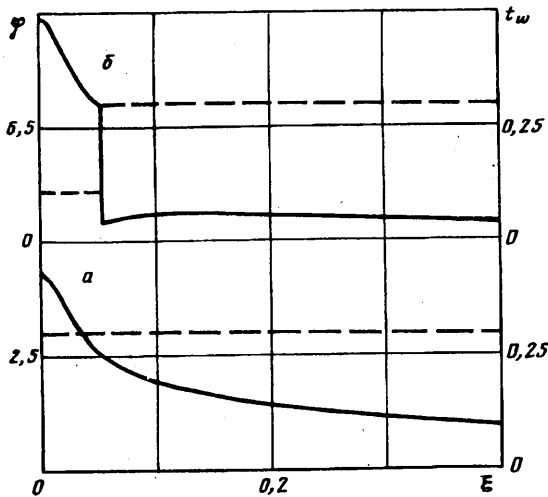
$$J_1 = \int_0^1 \frac{C_g T_e}{z_1^{1/2} T_\infty} d\xi \quad (4.1)$$

Функционал (4.1) с точностью до постоянного множителя равняется интегральному расходу охладителя

$$Q_1 = \int_0^L (\rho v)_w dx = \rho_\infty u_\infty L \text{Re}^{-1/2} J_1$$



Фиг. 1

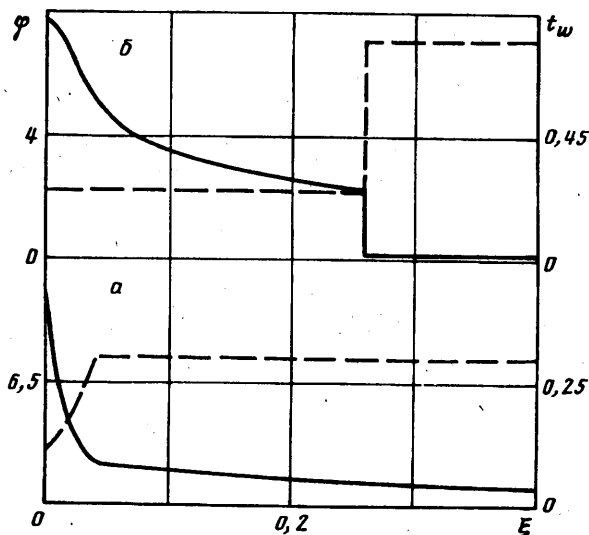


Фиг. 2

Проводилось исследование на возможность появления участка двустороннего экстремума, начинающегося в точке торможения. Для этого при любом значении  $t = t_w(0)$ , удовлетворяющем неравенству (1.5), из уравнения (1.2) определялось значение  $z_1(0)$  и по формуле (2.7) вычислялась величина  $\partial H/\partial t$ . Если  $\partial H/\partial t = 0$  при некотором значении  $t = t_w(0)$  и  $H(t)$  достигает в этой точке максимального значения, то из точки торможения выходит участок двустороннего экстремума. В противном случае из этой точки выходит участок краевого экстремума при  $t_w(0) = t_{\max}(0)$  или  $t_w(0) = t_{\min}(0)$  в зависимости от поведения  $H(t)$ .

Исследование показало, что для функционала (4.1) участок двустороннего экстремума, выходящий из точки торможения, отсутствует, если нет изопериметрического условия. Для данного случая оптимальное управление состоит из одного участка краевого экстремума  $t_w(\xi) = t_{\max}(\xi)$ .

На фиг. 1 представлены результаты расчетов оптимального распределения параметра вдува  $\varphi(\xi)$  при 7 постоянных значениях  $t_{\max}(\xi)$  от 0,3 до 0,9 с шагом 0,1 (кривые 1—7). Расчеты проводились при  $t_c = 0,2$ ,  $t_{\min} = 0,21$ . Точками отмечена кривая, представляющая распределение скорости  $u_e/u_{\infty}(\xi)$  [1]. Эта функция одна и та же для всех задач, рассмотренных в настоящей работе. Из фиг. 1 видно, что для оптимального охлаждения плотность расхода охладителя должна быть наибольшей в окрестности точки торможения.



Фиг. 3

На фиг. 2, а представлены оптимальное распределение параметра вдува  $\varphi(\xi)$  (сплошная кривая) и соответствующее распределение температуры поверхности профиля  $t_w(\xi)$  (штриховая кривая). Эти данные соответствуют параметрам  $t_c = 0,1$ ,  $t_{\min} = 0,11$ ,  $t_{\max} = 0,3$ .

Для охлаждения лопаток турбины используется газ, который отбирается из некоторой ступени компрессора. Поэтому можно полагать, что газ входит во внутреннюю полость лопатки при фиксированном давлении. На внешней поверхности лопатки распределение давления определяется невязким потоком и пограничный слой в рассматриваемом приближении на него не влияет. Поэтому разность интегралов от этих давлений остается без изменения при варьировании расхода охладителя, осуществляемого путем изменения характеристик пористости лопатки. Интеграл по поверхности профиля от кинетической энергии охладителя характеризует вышеупомянутую разность интегралов от давлений. Поэтому при постановке вариационной задачи естественно использовать изопериметрическое условие в виде

$$J_2 = \int_0^1 \frac{(Cg)^2}{z_1} t_w \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right) \frac{V_c}{V_\infty} d\xi = P = \text{const} \quad (4.2)$$

Функционал  $J_2$  с точностью до постоянного множителя равен интегралу от кинетической энергии охладителя

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho v^2)_w dx = \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 L \text{Re}^{-1} J_2$$

Величина  $(\rho v^2)_w$  пропорциональна мощности сил гидравлического сопротивления пористой оболочки лопатки. Поэтому изопериметрическое условие (4.2) можно также трактовать как условие постоянства мощности гидравлического сопротивления системы охлаждения лопатки. Кроме этого, сам по себе функционал  $Q_2$  представляет собой кинетическую энергию охладителя, поэтому условие (4.2) можно еще рассматривать как заданную мощность системы охлаждения лопатки.

С учетом сказанного решена задача определения минимума функционала (4.1) при изопериметрическом условии (4.2). На фиг. 2, б представлены оптимальные распределения величин  $\varphi(\xi)$  (сплошная кривая) и  $t_w(\xi)$  (штриховая кривая), соответствующие заданным параметрам  $t_c = 0,1$ ,  $t_{\min} = 0,11$ ,  $t_{\max} = 0,3$ ,  $P = 0,789$ .

Оптимальное управление в этом случае состоит из двух участков краевого экстремума, без участка двустороннего экстремума между ними. Оптимальный процесс охлаждения характеризуется тем, что на передней части профиля, включающей точку торможения, вдувается максимально возможное количество охладителя, соответствующее минимальной температуре поверхности профиля  $t_{\min}(\xi)$ , затем удельный расход охладителя скачком уменьшается до величины, соответствующей

максимальной температуре поверхности профиля, и дальше до конца профиля удельный расход удерживается на минимально возможном уровне, обеспечивая при этом максимальную температуру профиля  $t_{\max}(\xi)$ . Длина переднего участка краевого экстремума пропорциональна заданной величине суммарной кинетической энергии охладителя  $Q_2$ .

Физический смысл оптимального охлаждения при заданной величине кинетической энергии охладителя ясен: исходя из заданного запаса кинетической энергии  $Q_2$ , максимально охладить область с наибольшими тепловыми потоками — окрестность точки торможения; оставшаяся часть кинетической энергии расходуется в зависимости от ее величины. При этом в любое сечение пограничного слоя поступает охладитель, вдуваемый на участках профиля, расположенных выше по потоку, частично способствуя охлаждению данного участка поверхности.

5. Решалась также задача минимизации кинетической энергии охладителя без изопериметрического условия. При этом минимум функционала (4.2) определялся при следующих параметрах:  $t_c = 0,1$ ,  $t_{\min} = -0,11$ ,  $t_{\max} = 0,3$ . На фиг. 3, а представлены результаты расчета. Смысловое соответствие кривых и структура решения такие же, как и на фиг. 2. Оптимальное управление (температура поверхности  $t_w(\xi)$ ) состоит из участка двустороннего экстремума вблизи точки торможения и участка краевого экстремума с максимально допустимой температурой на остальной части профиля. Величина функционала при оптимальном распределении температуры профиля на 4,8% меньше, чем в случае  $t_w(\xi) = t_{\max}(\xi)$ .

Исследование особой точки показало, что в случае минимизации кинетической энергии охладителя из точки торможения может выходить участок двустороннего экстремума, если  $t_c \leq 0,15$ , но для его реализации необходимо, чтобы на нем достигался максимум функции Гамильтона.

6. Рассмотрена задача минимизации потока тепла в стенку без изопериметрического условия. Минимизируемый функционал в этом случае имеет вид

$$J_3 = \int_0^1 \frac{2g(1-t_w)}{(1+C/6)z^{1/2}} \left(1 + \frac{x-1}{2} M_\infty^2\right) \frac{T_e}{T_\infty} d\xi$$

Функционал  $J_3$  отличается от интегрального потока тепла в стенку  $Q_3$  постоянным множителем

$$Q_3 = \int_0^L \left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_w dx = k_\infty T_\infty \text{Re}^{-1/2} J_3$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности газа.

Минимизация функционала  $J_3$  проводилась при  $t_c = 0,2$ ,  $t_{\min} = 0,25$ ,  $t_{\max} = 0,8$ . На фиг. 3, б представлены результаты расчета. Обозначения кривых здесь такие же, как на фиг. 3, а.

В данном случае оптимальное управление  $t_w(\xi)$  состоит из двух участков краевого экстремума: участка с минимальной температурой  $t_{\min}(\xi)$  и участка с максимальной температурой  $t_{\max}(\xi)$ . Исследование показало, что в случае минимизации потока тепла из точки торможения может выходить участок двустороннего экстремума при любой температуре охладителя, но при температуре стенки, удовлетворяющей неравенству  $0,5 \leq t_w \leq 0,9$ .

Авторы выражают признательность А. Н. Крайко за ценные замечания и внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morduchow M. On heat transfer over a sweat-cooled surface in laminar compressible flow with a pressure gradient // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. № 10. P. 705—712.
2. Сираж тдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
3. Понтрелин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. Муссеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
5. Ганжело А. Н. О решении некоторых вариационных задач двухфазной газодинамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 52—58.
6. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1967. 564 с.
7. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.