МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 533.6.011.8

© 1993 г. И. Н. ИВЧЕНКО, С. К. ЛОЯЛКА, Р. В. ТОМПСОН

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

Предложена новая модель интегральных граничных условий для определения функции распределения частиц по скоростям в слое Кнудсена, позволяющая улучшить точность моментных приближений. Проведено сравнение результатов для различных моделей с точным численным решением задачи.

Проблема теплового скольжения — фундаментальная проблема кинетической теории [1—3]. Максвелл был первым, кто получил решение этой проблемы в наиболее простой форме одномоментного приближения. В [1, 2] предложено простое обобщение максвелловского метода, связанное с рассмотрением некоторых законов сохранения в двухмоментном приближении. Этот простой метод позволяет получать достаточно точные выражения для коэффициентов скольжений.

Чтобы улучшить результаты [1, 2], в последнее время были сделаны многочисленные попытки, анализ которых содержится в [4]. Однако успех этих исследований сомнителен, так как точность используемых методов не установлена и, кроме того, в граничной модели не учитывались законы сохранения для уравнения Больцмана.

Цель данной работы — исследовать новую модель граничных условий, в которой учтены законы сохранения, что позволило улучшить точность четырехмоментного приближения. Анализ точности модели выполнен путем сравнения с точными численными результатами для проблемы теплового скольжения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение газа над плоской стенкой $x=0$, ось y направим по нормали. Вдали от стенки имеется постоянный градиент температуры в газе $(\partial T/\partial y)_\infty$. Для этих условий функция распределения имеет вид

$$f = f^{(0)}\,[1 + (c^2 - 5/2)\,yg + c_y\varphi_T(c)\,g + \Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)]\,J.$$

$$\mathbf{c} = \left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2}\mathbf{v}, \quad g = T_0^{-1}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_\infty \tag{1.1}$$

$$\varphi_T(c) = a_1^{(2)}\,[S_{3/2}^{(1)}(c^2) + a_2^{(2)*}S_{3/2}^{(2)}(c^2)]$$

Здесь $\mathbf{c}$ — безразмерная скорость молекулы $\Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)$ — поправка, учитывающая влияние стенки, $\varphi_T(c)$ — решение Чепмена — Энского во втором приближении [5], $a_1^{(2)} = 675/704\,\pi^{1/2}\lambda$, где λ — длина свободного пробега и $a_2^{(2)*} = 0{,}08888$ для жестких сфер.

Поправка $\Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению Больцмана. С этим уравнением связаны два закона сохранения, которые для данных условий имеют вид [1]

$$(c_xc_y, \Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)) = 0, \quad (c_x^2c_y\varphi_u(c), \Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)) = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

$$(\rho_1, \rho_2) = \int \rho_1 \exp(-c^2)\,\rho_2 d\mathbf{c}$$

Здесь $c_xc_y\varphi_u(c)$ — решение Чепмена — Энского для вязкости.

2. Модели граничных условий. Обычно в методе полупространственных моментов специальный вид поправки $\Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)$ позволяет точно удовлетворить максвелловским граничным условиям [3].

Удобно использовать интегральную форму граничных условий для моментных уравнений

$$\int_+ c_x\varphi_i(c)\,\Phi^+(\mathbf{c}, 0)\exp(-c^2)\,d\mathbf{c} = \int_+ c_x\varphi_i(c)\,A\Phi^-(\mathbf{c}, 0)\exp(-c^2)\,d\mathbf{c} \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi_i(c)$ — молекулярные признаки, которые использованы в моментных уравнениях. Выражение $A\Phi^-$ (c, 0) для задачи теплового скольжения в случае произвольных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_τ имеет вид

$$\Phi^+ (c, 0) = A\Phi^- (c, 0) = -\alpha_\tau a_1^{(2)} g c_y\, [S_{3/2}^{(1)} (c^2) +$$

$$+ a_2^{(2)*} S_{3/2}^{(2)} (c^2)] + (1 - \alpha_\tau)\, \Phi^- (-c_x, c_y, c_z, 0) \tag{2.2}$$

Граничная модель (2.1) не удовлетворяет законам сохранения (1.2) для конечных моментных приближений.

В настоящей работе предлагается использовать эти законы сохранения в качестве интегральных граничных условий. Эта новая граничная модель может быть выражена посредством следующих соотношений:

$$(c_x c_y, \Phi^\pm (c, 0)) = 0. \tag{2.3}$$

$$(c_x^2 c_y \varphi_u (c), \Phi^\pm (c, 0)) = (c_x^2 c_y \varphi_u (c), \Phi^\pm (c, \infty)) \tag{2.4}$$

$$\varphi_u (c) = -b_1^{(2)} [1 + b_2^{(2)*} S_{3/2}^{(1)} (c^2)], \quad b_1^{(2)} = {}^{1025}\!/\!_{808}\, \pi^{1/2} \lambda, \quad b_2^{(2)*} = 0{,}05854 \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi_u(c)$ — решение Чепмена — Энского во втором приближении [5].

3. Средняя скорость газа для различных моделей. Предложенная модель является интегральной и, следовательно, допускает использование той же формы для поправки к функции распределения, что и в задаче об изотермическом скольжении. Для анализа точности различных граничных моделей используем поправку к функции распределения в четырехмоментном приближении [6]

$$\Phi^\pm (c, x) = a_0^\pm (x)\, c_y + a_1^\pm (x)\, c_x c_y \tag{3.1}$$

Здесь функции $a_i^\pm(x)$ содержат две произвольные константы, которые определяются граничными условиями. Среднюю скорость газа представим в виде

$$u (x) = [c_{sl} - u_d^* (x)]\, \nu \frac{1}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_\infty \tag{3.2}$$

Здесь c_{sl} — коэффициент теплового скольжения, $u_d^*(x)$ — дефект скорости, который описывает отклонение средней скорости от постоянного профиля в слое Кнудсена, ν — кинематическая вязкость газа.

Для интегральной граничной модели (2.1) имеем

$$c_{sl} = \frac{3}{2} \frac{1{,}5442 + 1{,}1763\, \alpha_\tau}{3{,}0944 + 0{,}4483\, \alpha_\tau}, \quad u_d^* (x) = \alpha_\tau \frac{3{,}4164}{3{,}0944 + 0{,}4483\, \alpha_\tau} \exp \left(-2{,}2010 \frac{x}{\lambda} \right) \tag{3.3}$$

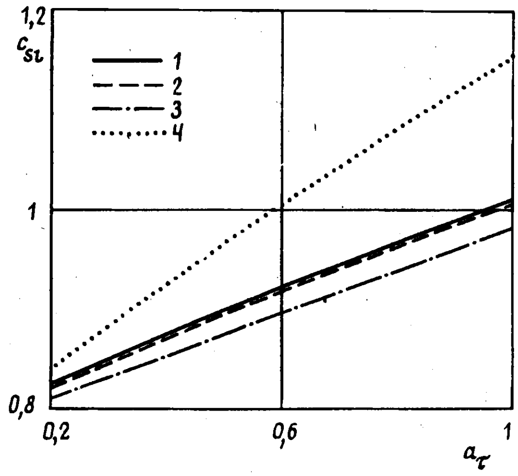
Новая граничная модель дает

$$c_{sl} = \frac{3}{2} \frac{0{,}4375 + 0{,}2084\, \alpha_\tau}{0{,}8560 + 0{,}1092\, \alpha_\tau}, \quad u_d^* (x) = \alpha_\tau \frac{0{,}5475}{0{,}8560 + 0{,}1092\, \alpha_\tau} \exp \left(-2010 \frac{x}{\lambda} \right) \tag{3.4}$$

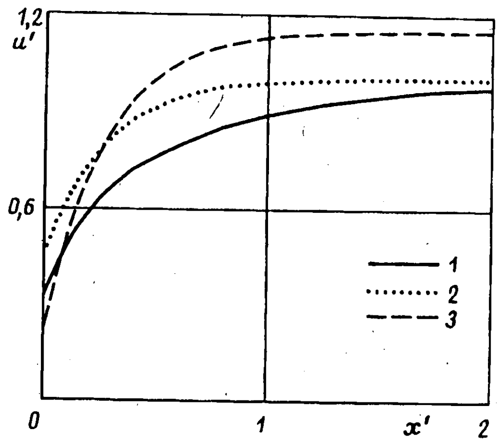
4. Обсуждение результатов. Прежде всего сравним результаты, даваемые для коэффициента теплового скольжения различными граничными моделями и формулой Лоялки. С учетом второго приближения в решении Чепмена — Энского эта формула имеет вид

$$c_{sl} = 3/4 \left\{ \varepsilon_1 + \alpha_\tau (\varepsilon_2 - 1/2\, \varepsilon_1) \right\}, \quad \varepsilon_1 = 1 + 1/4\, a_2^{(2)*}, \quad \varepsilon_2 = 1 - 1/2\, b_2^{(2)*} \tag{4.1}$$

На фиг. 1 представлены зависимости коэффициента c_{sl} от α_τ для различных моделей. Здесь *1* — точное решение [7], *2—4* — расчеты по формулам (3.4), (4.1), (3.3) соответственно. Результаты, даваемые предложенной моделью и формулой Лоялки, хорошо согласуются. Для $\alpha_\tau = 1$ можем сравнить результаты с точным значением [7]. Для выражения (3.4) отличие от точного значения составляет 0,5%, для формулы Лоялки 2,9%, для интегральной модели 14,2%. Это указывает на высокую точность предложенной модели для коэффициента c_{sl}. Для других значений α_τ, используя метод работы [7], Лоялка выполнил дополнительный расчет коэффициента c_{sl}, который приведен на фиг. 1. Подробности этого расчета будут опубликованы позднее.



Фиг. 1



Фиг. 2.

На фиг. 2 представлены зависимости средней скорости газа ($\alpha_\tau = 1$) от нормальной координаты для рассматриваемых моделей. Здесь $x' = x/(1{,}6618\lambda)$, $u' = u/v_g$, кривые *1* — точное решение [7], *2* — уравнение (3.4), *3* — (3.3). Для профиля средней скорости предложенная модель дает менее точные результаты, чем для коэффициента c_{sl}. Однако она обеспечивает лучшее согласие с точным решением, чем интегральная модель. Наибольшее отличие имеем для средней скорости газа на поверхности стенки, которое составляет 28 и 67% соответственно для этих двух моделей. Результаты для профиля средней скорости могут быть улучшены путем использования как моментных аппроксимаций более высокого порядка, так и других форм для поправки к функции распределения.

Эта работа стала возможной благодаря финансовой поддержке, обеспеченной Новыми исследовательскими программами Агентства по Охране окружающей среды, США (Exploratory Research Program, US EPA) и поддержке фулбрайтовского фонда (US Fulbright grant) для проф. И. Н. Ивченко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Loyalka S. K.* Approximate method in the kinetic theory//Phys. Fluids. 1971. V. 14, № 11. P. 2291—2294.
2. *Loyalka S. K.* Slip in the thermal creep flow//Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 1. P. 21—24.
3. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Гидродинамический метод расчета скорости термофореза умеренно крупных нелетучих аэрозольных частиц//Журн. физ. химии. 1971. Т. 45. № 3. С. 577—582.

4. *Савков С. А.* Граничные условия скольжения неоднородной бинарной смеси газов и их применение в динамике аэрозолей: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ 1987. 13 с.
5. *Loyalka S. K.* Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: Variational results for Lennard-Jones and *n(r)*-6 potentials//Physica. 1990. V. A163. № 3. P. 813—821.
6. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Кинетическая теория течения газа, находящегося над твердой стенкой в поле градиента скорости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 6. С. 139—143.
7. *Loyalka S. K.* Temperature jump and thermal creep slip; Rigid sphere gas//Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. № 2. P. 403—408.

Москва,
Particulate Systems Research Center
and Nuclear Engineering Program
University of Missouri—Columbia
Columbia, Missouri USA

Поступила в редакцию
10.VII.1992