МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 533.72

© 1993 г. А. В. ЛАТЫШЕВ, А. А. ЮШКАНОВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ (конденсации)

Получено точное решение модельного уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК (Бхатнагара, Гросса и Крука) в задаче о сильном испарении (конденсации) с плоской поверхности. Найдены обобщенные собственные векторы соответствующего характеристического уравнения. Доказано существование и единственность разложения решения по собственным векторам непрерывного и дискретного спектров. Это разложение сводится к векторной краевой задаче Римана — Гильберта с матричным коэффициентом. Развит аппарат диагонализации и факторизации коэффициента краевой задачи. Матрица, диагонализирующая коэффициент задачи, имеет точки ветвления в комплексной плоскости, параметрически зависящие от величины скорости испарения (конденсации) u. Решение задачи исследовано в зависимости от величины u и выявлены физические особенности процесса испарения.

Под сильным испарением далее понимается испарение материала в собственный пар, происходящее при скоростях, сопоставимых со скоростью звука. Подходы, используемые для рассмотрения этого процесса, делятся на два класса. Либо используются приближения, развивающие максвелловское приближение [1—4], либо задача решается численно [5, 6] (об использовании подхода Мотт — Смита см. [7]).

Черчиньяни предложил рассматривать сильное испарение в «квазилинейном» приближении [8]. Это приближение состоит в том, что функция распределения линеаризуется не относительно максвеллиана испаряющихся с поверхности молекул, как обычно, а относительно максвеллиана, описывающего поток на бесконечности. При этом зависимость параметров газа от скорости потока (от числа Маха М) становится, вообще говоря, нелинейной. Преимущество данного подхода состоит в том, что он позволяет получить аналитическое решение данной задачи. Аналитические решения незаменимы при анализе тонких теоретических проблем. В задаче о сильном испарении к таким проблемам относится, в частности, проблема нахождения максимального числа Маха, до которого решение задачи существует.

Математические трудности, возникающие при решении этой задачи, весьма велики. История попыток решения этой классической задачи кинетической теории, не имеющей до настоящего времени аналитического решения, изложена в [8, 9]. Частный случай этой задачи, в котором используется БГК-уравнение для одномерного газа, полностью исследован недавно в [10]. Попытки ее точного решения продолжались и в течение последнего десятилетия (см., например, [11—15], а также ссылки в этих работах). Не останавливаясь подробно на этих попытках, укажем, что основная трудность здесь состоит в решении векторной краевой задачи с матричным коэффициентом. Матрица, приводящая коэффициент к диагональному виду, является кусочно-аналитической с действительной осью в качестве линии скачков и имеет точки ветвления в верхней и нижней полуплоскостях. Эти точки параметрически зависят от величины u — скорости испарения ($u > 0$) или конденсации ($u < 0$). При изменении u эти точки перемещаются в комплексной плоскости и разрезы, соединяющие эти точки, могут исчезать.

В связи с этим и по другим причинам, изложенным ниже, решение задачи существенно зависит от величины параметра u.

Целью настоящей работы является аналитическое решение задачи о сильном испарении (конденсации) с плоской поверхности. В работе преодолены трудности, связанные с решением векторной краевой задачи Римана — Гильберта, и представлено ее точное решение.

1. **Постановка задачи.** Напомним вкратце постановку задачи (подробности см. в [4, 11]). Имеется плоская поверхность раздела между конденсированной фазой и ее паром. С поверхности происходит испарение, так что имеется некоторое стационарное движение пара от поверхности. На большом расстоянии от поверхности, где ее непосредственным влиянием можно пренебречь, существует равномерный поток пара, характеризуемый скоростью $\mathbf{w}$, плотностью n_∞ и температурой T_∞. Соответствующая функция распределения запишется в виде

$$f_\infty = n_\infty \left(\frac{m}{2\pi k T_\infty}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2}{2kT_\infty}\right]$$

Здесь m — масса молекулы газа, k — постоянная Больцмана, вектор $\mathbf{w}$ имеет только одну компоненту, ортогональную поверхности раздела; $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$, ось x совпадает с нормалью к поверхности.

Линеаризуем функцию распределения относительно максвеллиана f_∞, т. е. положим $f = f_\infty(1 + h(x, \mathbf{C}))$, где $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$, $\beta = m/2kT_\infty$. При этом уравнение Больцмана с БГК-оператором столкновений имеет вид [11]

$$(u + C_x)\frac{\partial}{\partial x} h(x, \mathbf{C}) + h(x, \mathbf{C}) =$$

$$= \pi^{-3/2} \int h(x, \mathbf{C}') \left[1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{2}{3}\left(\mathbf{C}^2 - \frac{3}{2}\right)\left(\mathbf{C}'^2 - \frac{3}{2}\right)\right] \exp(-\mathbf{C}'^2)\, d^3\mathbf{C}'$$

$$u = \beta^{1/2} w, \quad u = \sqrt{6/5}\,\mathrm{M}$$

Из определения h следует, что $h(\infty, \mathbf{C}) = 0$.

Граничные условия на поверхности соответствуют чисто диффузному рассеянию молекул

$$h(0, \mathbf{C}) = -2uC_x + \varepsilon_n + \left(\mathbf{C}^2 - \frac{3}{2}\right)\varepsilon_T, \quad C_x > -u$$

$$\varepsilon_n = \frac{n_0 - n_\infty}{n_\infty}, \quad \varepsilon_T = \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}$$

Здесь ε_n, ε_T — искомые величины скачков плотности и температуры, T_0 — температура поверхности, n_0 — концентрация насыщенного пара.

Введем вектор-столбец $\Psi(x, \mu)$ с элементами

$$\psi_1(x, \mu) = \pi^{-1} \int \exp(-C_y^2 - C_z^2)\, h(x, \mathbf{C})\, dC_y\, dC_z$$

$$\psi_2(x, \mu) = \pi^{-1} \int \exp(-C_y^2 - C_z^2)(C_y^2 + C_z^2 - 1)\, h(x, \mathbf{C})\, dC_y\, dC_z$$

Тогда сформулированная граничная задача имеет вид

$$\left[(u + \mu)\frac{\partial}{\partial x} + 1\right]\Psi(x, \mu) =$$

$$= \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2)\,[Q(\mu)\,Q'(\mu') + 2\mu\mu' P]\,\Psi(x, \mu')\, d\mu' \tag{1.1}$$

$$\Psi(\infty, \mu) = 0 \tag{1.2}$$

$$\Psi(0,\mu)=\varepsilon_T\begin{bmatrix}\mu^2-1/2\\1\end{bmatrix}+(\varepsilon_n-2u\mu)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mu>-u \tag{1.3}$$

$$Q(\mu)=\begin{bmatrix}\gamma(\mu^2-1/2) & 1\\ \gamma & 0\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \gamma^2=2/3$$

где Q' означает транспонированную матрицу.

2. Дисперсионная функция. Собственные векторы и собственные значения. Если искать решения уравнения (1.1) в виде

$$\Psi_\eta(x,\mu)=\Phi(\eta,\mu)\exp\left(-\frac{x}{\eta+u}\right)$$

то получим характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\pi^{-1/2}(\eta+u)\,[Q(\mu)-2u\mu T]\,n(\eta) \tag{2.1}$$

$$n(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q'(\mu)\Phi(\eta,\mu)\exp(-\mu^2)\,d\mu,\quad T=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Если параметр $\eta\notin(-\infty,+\infty)$, то из уравнения (2.1) получим собственные векторы дискретного спектра

$$\Phi(\eta,\mu)=\pi^{-1/2}(\eta+u)[Q(\mu)-2u\mu T]\,n(\eta)(\eta-\mu)^{-1}$$

причем вектор $n(\eta)$ удовлетворяет условию $\Lambda(\eta)n(\eta)=0$, в котором

$$\Lambda(z)=I+\pi^{-1/2}(z+u)\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q'(\mu)\,[Q(\mu)-2u\mu T]\,e^{-\mu^2}\frac{d\mu}{\mu-z}$$

— дисперсионная матрица, I — единичная матрица. Представим матрицу $\Lambda(z)$ в виде

$$\Lambda(z)=Y(z)+\Xi(z)J(z)$$

$$J(z)=\pi^{-1/2}(z+u)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau^2}\frac{d\tau}{\tau-z}$$

$$Y(z)=\begin{bmatrix}1+\gamma^2(z+u)z(z^2-1/2) & \gamma z(z+u)(1-2uz)\\ \gamma z(z+u) & 1-2u(z+u)\end{bmatrix}$$

$$\Xi(z)=\begin{bmatrix}\gamma^2\left[1+\left(z^2-\frac{1}{2}\right)^2\right] & \gamma\left(z^2-\frac{1}{2}\right)(1-2uz)\\ \gamma\left(z^2-\frac{1}{2}\right) & 1-2uz\end{bmatrix}$$

Дисперсионную функцию $\lambda(z)\equiv\det\Lambda(z)$ запишем как

$$\lambda(z)=a(z)+b(z)J(z)+c(z)J^2(z)$$

$$a(z)=1-2u^2+\frac{1}{3}u(2u^2-7)z+\frac{1}{3}(2u^2-1)z^2$$

$$b(z)=\frac{1}{6}(11-10u^2)-\frac{10}{3}uz+\frac{1}{3}(2u^2-1)z^2$$

$$c(z)=\gamma^2(1-2uz)$$

Для больших $|z|$ находим

$$\lambda(z) = -u\left(u^2 - \frac{5}{6}\right) z^{-3} - \frac{3}{2}\left(u^2 - \frac{5}{18}\right) z^{-4} - \frac{7}{3} u\left(\left(u^2 - \frac{11}{14}\right) z^{-5} - \dots\right.$$

Отсюда видно, что $\lambda(z)$ при $u^2 \neq {}^5/_6$ имеет тройной нуль на бесконечности. Применяя принцип аргумента, убеждаемся, что $\lambda(z)$ не имеет нулей в конечной части комплексной плоскости. Тройному нулю $\eta_0 = \infty$ отвечают три решения уравнения (1.1)

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \mu\Psi_1, \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} \mu^2 - 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если $u^2 = {}^5/_6$, то имеется еще одно решение

$$\Psi_4 = (x - \mu - u)\left(\frac{3}{2}\Psi_1 - 3u\Psi_2 + \Psi_3\right)$$

Найдем собственные векторы, отвечающие непрерывному спектру. Пусть $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Тогда из уравнений (2.1) и (2.2) находим

$$\Phi(\eta, \mu) = \left\{ \pi^{-1/2} (\eta + u)[Q(\mu) - 2u\mu T]\, P\frac{1}{\eta - \mu} + e^{\eta^2} Q^{-1}(\eta)\,\Lambda(\eta)\,\delta(\eta - \mu)\right\} n(\eta) \tag{2.3}$$

Здесь Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Общее решение уравнения (1.1) запишем в виде разложения по собственным векторам дискретного и непрерывного спектров

$$\Psi(x, \mu) = \sum_{\alpha=1}^{\varkappa} a_\alpha \Psi_\alpha(x, \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\eta(x, \mu)\, d\eta \tag{2.4}$$

с неопределенными коэффициентами a_α, $\alpha = 1, \dots, \varkappa$, и $n(\eta)$, причем $\varkappa = 3$ для $u^2 \neq {}^5/_6$ и $\varkappa = 4$ для $u^2 = {}^5/_6$.

3. Разложение решения по собственным векторам и векторная краевая задача Римана — Гильберта. *Теорема.* Существует единственное решение граничной задачи (1.1)—(1.3), представимое в виде разложения по собственным векторам характеристического уравнения (2.1)

$$\Psi(x, \mu) = \int_{-u}^{\infty} \Psi_\eta(x, \mu)\, d\eta \tag{3.1}$$

Доказательство. Используя граничные условия (1.2) и (1.3), из общего разложения (2.4) сразу получим разложение (3.1). Подставляя в разложение (3.1) при $x = 0$ собственные векторы (2.3), получим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\Psi(0, \mu) = \pi^{-1/2}[Q(\mu) - 2u\mu T]\int_{-u}^{\infty}(u + \eta)\, n(\eta)\frac{d\eta}{\eta - \mu} + e^{\mu^2} Q^{-1}(\mu)\,\Lambda(\mu)\, n(\mu),$$

$$\mu > -u \tag{3.2}$$

Вводя вспомогательную вектор-функцию

$$N(z) = \pi^{-1/2}\int_{-u}^{\infty}(\eta + u)\, n(\eta)\frac{d\eta}{\eta - z} \tag{3.3}$$

перейдем от уравнения (3.2) после некоторых преобразований к векторной краевой задаче Римана — Гильберта с матричным коэффициентом

$$\Lambda^+(\mu)\,[N^+(\mu) - F(\mu)] = \Lambda^-(\mu)\,[N^-(\mu) - F(\mu)], \quad \mu > -u \tag{3.4}$$

$$F(\mu) = \begin{bmatrix} \gamma^{-1}\varepsilon_T \\ (\varepsilon_n - 2u\mu)(1 - 2u\mu)^{-1} \end{bmatrix}$$

Преобразуем задачу (3.4) к задаче

$$B^+(\mu)\,[N^+(\mu) - F(\mu)] = B^-(\mu)[N^-(\mu) - F(\mu)], \quad \mu > -u \tag{3.5}$$

$$B(z) = \det \Xi(z)\, \Xi^{-1}(z)\, \Lambda(z) = M(z) + \gamma^2 (1 - 2uz)\, J(z)\, I$$

$$M(z) = \det \Xi(z)\, \Xi^{-1}(z)\, Y(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2uz & -\gamma\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)(1 - 2uz) \\ -\frac{1}{3}\left(z^2 - 2uz - \frac{3}{2}\right) & \gamma^2\left[1 - 2u(z + u) + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right)\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\right] \end{bmatrix}$$

Заметим, что скачок матрицы $B(z)$ при переходе через действительную ось пропорционален единичной матрице. Это обстоятельство является решающим при диагонализации коэффициента задачи

$$G(\mu) = [B^+(\mu)]^{-1}B^-(\mu) = [\Lambda^+(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu)$$

и объясняет переход от уравнения (3.4) к уравнению (3.5).

4. Сведение факторизации матричного коэффициента к скалярным и векторным краевым задачам. Построим фундаментальную матрицу $X(z)$, факторизующую коэффициент $G(\mu)$, т. е. удовлетворяющую краевому условию

$$B^+(\mu)\, X^+(\mu) = B^-(\mu)\, X^-(\mu), \quad \mu > -u \tag{4.1}$$

и невырожденную в комплексной плоскости с разрезом $(-u, +\infty)$.

Будем искать решение задачи (4.1) в виде

$$X(z) = S(z)\, U(z)\, S^{-1}(z) \tag{4.2}$$

где $U = \operatorname{diag}\{U_1, U_2\}$ — новая неизвестная диагональная матрица, а матрица $S(z)$ приводит к диагональному виду матрицу $M(z) = \{m_{ij}(z)\}$ и имеет вид

$$S(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} - m_{22} + r) & \frac{1}{2}(m_{11} - m_{22} - r) \\ m_{21} & m_{21} \end{bmatrix}$$

$$r(z) = \sqrt{q(z)}, \quad q(z) = (m_{11} + m_{22})^2 - 4 \det M = (m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}$$

Представим определитель матрицы $B(z)$ в виде произведения

$$b(z) \equiv \det B(z) = \gamma^2 (1 - 2uz)\, \lambda(z) = \Omega_1(z)\, \Omega_2(z)$$

$$\Omega_\alpha(z) = \gamma^2 \left\{\frac{1}{2}[m(z) + (-1)^{\alpha-1} r(z)] + (1 - 2uz)\, J(z)\right\}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$m_{11} + m_{22} = \gamma^2 m, \quad q = m^2 + n$$

$$m(z) = \left(u^2 - \frac{1}{2}\right) z^2 - 5uz + \frac{1}{4}(11 - 10u^2)$$

$$n(z) = 8u\left(u^2 - \frac{1}{2}\right) z^3 + 8\left(u^4 - 4u^2 + \frac{1}{4}\right) z^2 + u(26 - 28u^2)\, z + 12u^2 - 6$$

Далее понадобятся следующие разложения при больших $|z|$:

$$b(z) = 3\gamma^4 \left[u^2\left(u^2 - \frac{5}{6}\right) z^{-2} + u^3 z^{-3} + \frac{1}{6}\left(14u^4 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{5}{4}\right) z^{-4} + \ldots\right]$$

$$J(z) = -\left(1 + uz^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}uz^{-3} + \frac{3}{4}z^{-4} + \dots\right)$$

$$\chi(z) = J(z)(1-2uz) = 2uz + 2\left(u^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right)z^{-2} + \frac{1}{2}(3-u)^{-3}z + \dots$$

Заметим, что

$$m\left(\frac{1}{2u}\right) = -\frac{5}{2}\left(u - \frac{1}{10u}\right)^2 - \frac{1}{10u^2} < 0$$

$$n\left(\frac{1}{2u}\right) = 0, \quad n(z) = -4(1-2uz)\,p(z)$$

$$p(z) = \left(u^2 - \frac{1}{2}\right)z^2 + u\left(u^2 - \frac{7}{2}\right)z - 3\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Поэтому $\Omega_1(1/(2u)) = 0$, причем если $u > 0$, то точка $1/(2u)$ принадлежит разрезу $(-u, +\infty)$, а если $u < 0$ — не принадлежит ему. Из этих соображений вытекает, что при $u > 0$ вместо $\Omega_1(z)$ удобнее рассматривать $\Omega_1^\circ(z)$

$$\Omega_1^\circ(z) = \frac{\Omega_1(z)}{\gamma^2(1-2uz)} = \frac{1}{2}\frac{m(z) + r(z)}{1-2uz} + J(z)$$

причем

$$\Omega_1^\circ(z)\,\Omega_2(z) = \lambda(z)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получим матричную краевую задачу

$$\Omega^+(\mu)\,U^+(\mu) = \Omega^-(\mu)\,U^-(\mu), \quad \mu > -u$$

$$\Omega(z) = \operatorname{diag}\{\Omega_1(z), \ \Omega_2(z)\}$$

эквивалентную благодаря проведенной диагонализации двум скалярным краевым задачам

$$\Omega_\alpha^+(\mu)\,U_\alpha^+(\mu) = \Omega_\alpha^-(\mu)\,U_\alpha^-(\mu), \quad \mu > -u, \quad \alpha = 1, 2 \tag{4.3}$$

Заметим, что полином $q(z)$ является полиномом 4-й степени и имеет, вообще говоря, четыре корня в комплексной плоскости. Исключение составляет случай $u^2 = {}^1/_2$. В этом случае $q(z) = {}^1/_2(z - 3u)^2$ и поэтому функция $r(z)$ не является радикалом. В случае $u^2 \neq {}^1/_2$ соединим корни $q(z)$, лежащие в верхней (нижней) полуплоскости, отрезком Γ_1 (Γ_2) и обозначим $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Для однозначности фактор-матрицы $X(z)$ потребуем, чтобы на дополнительных разрезах Γ выполнялось условие

$$X^+(\tau) = X^-(\tau), \quad \tau \in \Gamma \tag{4.4}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), имеем матричную краевую задачу

$$U^+(\tau)\,T = TU^-(\tau), \quad \tau \in \Gamma \tag{4.5}$$

$$T = [S^+(\tau)]^{-1}S^-(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матричная краевая задача (4.5) не сводится к скалярным, а остается по существу векторной относительно вектора $U = \{U_1, U_2\}$

$$U_1^+(\tau) = U_2^-(\tau), \quad U_1^-(\tau) = U_2^+(\tau), \quad \tau \in \Gamma \tag{4.6}$$

Итак, для построения фактор-матрицы $X(z)$ осталось решить на основном разрезе $(-u, +\infty)$ две скалярные задачи (4.3) и решить на дополнительных разрезах Г две векторные задачи (4.6).

Сначала предположим, что краевые задачи (4.3) и (4.6) решены и фактор-матрица $X(z)$ построена. Тогда можно перейти от задачи (3.5) к задаче по нулевому скачку

$$[X^{+}(\mu)]^{-1}(N^{+}(\mu)-F(\mu))=[X^{-}(\mu)]^{-1}(N^{-}(\mu)-F(\mu)),\quad \mu>-u \tag{4.7}$$

Выпишем формулы для элементов матрицы $X(z)$ в терминах элементов матриц $M(z)$ и $U(z)$

$$X_{\alpha\alpha}(z)=\frac{1}{2}\,[(-1)^{\alpha}(m_{11}-m_{22})(U_1-U_2)\,r^{-1}+U_1+U_2],\quad \alpha=1,2$$

$$X_{\alpha\beta}(z)=m_{\alpha\beta}(U_1-U_2)\,r^{-1},\quad \alpha\neq\beta,\ \alpha,\beta=1,2$$

На первый взгляд эти элементы в нулях полинома $q(z)$ имеют полюса. Однако, заметив, что в этих точках функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ совпадают, заключаем, что в нулях полинома $q(z)$ элементы матрицы $X(z)$ имеют устранимые особенности.

В случае $u^2={}^1/_2$ имеем

$$S(z)=\begin{bmatrix} m_{11}-m_{22} & 0\\ m_{21} & m_{21}\end{bmatrix}$$

а элементы матрицы $X(z)$ вычисляются по формулам

$$X_{11}=U_1,\ \ X_{12}=0,\ \ X_{22}=U_2,\ \ X_{21}=m_{21}(U_1-U_2)(m_{11}-m_{22})^{-1}$$

Заметим, что элемент X_{21} в точке $z=3/(2u)$ имеет устранимый полюс, ибо в этой точке m_{21} и m_{11}—m_{22} одновременно обращаются в нуль.

5. Вычисление частных индексов задачи. Построение матрицы $X(z)$ и завершение факторизации коэффициента. Пусть

$$\theta_1(\mu)=\begin{cases}\arg \Omega_1^{\circ +}(\mu) & (u>0)\\ \arg \Omega_1^{+}(\mu) & (u<0)\end{cases}$$

Здесь arg — главное значение аргумента. Заметим, что $\overline{\Omega_\alpha^{+}}=\Omega_\alpha^{-}$, $\alpha=1,2$ (черта означает комплексное сопряжение), поэтому $\arg\Omega_\alpha^{+}=-\arg\Omega_\alpha^{-}$. Обозначим через $\varkappa$ полный индекс задачи (3.5)

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\,[\arg\det G(\mu)]_{-(u,+\infty)}$$

Здесь выражение в квадратных скобках означает приращение функции, стоящей в скобках, при изменении μ от $-u$ до $+\infty$. Можно показать, что $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2$, где

$$\varkappa_\alpha=-\frac{1}{\pi}\,[\theta_\alpha(\mu)]_{(-u,+\infty)}$$

суть частные индексы задачи (3.5), играющие ниже важную роль в решении задач (4.3) и (4.6).

Введем обозначения

$$A(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-u}^{\infty}[\theta_1(\mu)+\theta_2(\mu)+\pi(\varkappa_1+\varkappa_2)]\,\frac{d\mu}{\mu-z}$$

$$B(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-u}^{\infty}[\theta_1(\mu)-\theta_2(\mu)+\pi(\varkappa_1-\varkappa_2)]\,\frac{d\mu}{r(\mu)(\mu-z)}$$

$$R(z) = \int_{-u}^{\infty} \frac{d\mu}{r(\mu)(\mu - z)}$$

Перейдем к вычислению частных индексов.

1. Случай $0 < u < 1/\sqrt{2}$. Здесь $\Omega_1^{\circ}(\mu) \approx -\mu^{-5}$ при больших μ, $\operatorname{Im} \Omega_1^{\circ +}(\mu) > 0$ при всех $\mu > -u$, поэтому $\varkappa_1 = -1$. Так как $\Omega_2(\mu) \approx -\mu^{-2}$ при больших μ, а $\operatorname{Im} \Omega_2^{+}(\mu) = -0$, то $\varkappa_2 = -1$.

Метод решения краевых задач (4.3) и (4.6) изложен в работах [16—19]. Поэтому их решение приведем без вывода

$$U_\alpha(z) = \exp\left[-A(z) + (-1)^\alpha r(z)(B(z) + R(z))\right], \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.1}$$

причем точка μ_0 определяется из уравнения

$$B_{-1} + R_{-1}(\mu_0) = 0$$

$$B_{-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-u}^{\infty} (\theta_1(\mu) - \theta_2(\mu)) \frac{d\mu}{r(\mu)}, \quad R_{-1}(\mu_0) = -\int_{-u}^{\infty} \frac{d\mu}{r(\mu)}$$

Здесь B_{-1} и $R_{-1}(\mu_0)$ суть коэффициенты при z^{-1} разложений $B(z)$ и $R(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ в ряды Лорана.

Отметим, что $U_2(z)$ имеет полюс 2-го порядка в точке $z = -u$, а функция $U_1(z)$ ограничена в окрестности этой точки. Функция $U_1(z)$ имеет простой полюс в точке μ_0, а функция $U_2(z)$ имеет простой нуль в этой точке.

2. Случай $-1/\sqrt{2} < u < 0$. Здесь $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = -1$. Решение задач (4.3) и (4.6) имеет вид

$$U_\alpha(z) = \exp\left[-A(z) + (-1)^\alpha r(z)(B(z) - R(z))\right], \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.2}$$

причем точка μ_0 определяется из уравнения $B_{-1} = R_{-1}(\mu_0) = 0$. Функция $U_1(z)$ имеет в точке $z = -u$ простой полюс, а в точке μ_0 — простой нуль. Функция $U_2(z)$ в точке $z = -u$ имеет простой нуль, а в точке μ_0 — простой полюс.

3. Случай $u^2 = {}^1/_2$. В этой случае

$$m(\mu) = -5u\mu + 3/2, \quad q(\mu) = 1/2\,(\mu - 3u)^2$$

При $|u| \to 1/\sqrt{2}$ разрезы Γ_1 и Γ_2 перемещаются, сжимаясь, в точку $z = 3u$ на действительной оси. Пусть $u = 1/\sqrt{2}$, тогда $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$. Решение задач (4.3) дается формулами

$$U_\alpha(z) = \exp\left[-Y_\alpha(z)\right], \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.3}$$

$$Y_\alpha(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-u}^{\infty} \left[\theta_\alpha(\mu) + \pi\varkappa_\alpha\right] \frac{d\mu}{\mu - z}$$

Функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ в точке $z = -u$ имеют простые полюса.

Пусть $u = -1/\sqrt{2}$, тогда $\varkappa_1 = -1$, $\varkappa_2 = 0$. Функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ вычисляются по формулам (5.3), причем $U_2(z)$ ограничена в окрестности точки $z = -u$.

4. Случай $1/2 < u^2 < 5/6$. При $u > 0$ (т. е. при $1/\sqrt{2} < u < \sqrt{5/6}$) как и в первом случае, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$. Решение задач (4.3) и (4.6) выражается также формулами (5.1). Функция $U_1(z)$ ограничена в окрестности точки $z = -u$.

5. Случай $u^2 = {}^5/_6$. При $u = \sqrt{5/6}$ имеем $\varkappa_1 = -1$, $\varkappa_2 = -2$. При $u = -\sqrt{5/6}$ имеем $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = -1$. Решение задач (4.3) и (4.6) выражается формулами (5.2).

6. Случай $u^2 > {}^5/_6$. При $u > \sqrt{5/6}$ имеем $\varkappa_1 = -1$, $\varkappa_2 = -2$. Функции

$U_\alpha(z)$ ($\alpha = 1, 2$) вычисляются согласно (5.2). При $u < -\sqrt{5/6}$ имеем $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Следовательно, функции $U_\alpha(z)$ ($\alpha = 1, 2$) вычисляются согласно (5.1).

Итак, в случае $u^2 = {}^1/_2$ функции $U_\alpha(z)$ ($\alpha = 1, 2$) даются формулами (5.3), во всех остальных случаях

$$U_\alpha(z) = \exp\left[-A(z) + (-1)^\alpha r(z)[B(z) + (-1)^{\varkappa_1 - \varkappa_2} R(z)]\right], \quad \alpha = 1, 2 \tag{5.4}$$

Таким образом, матрица $U(z)$ построена во всех различных случаях изменения параметра u и, следовательно, фактор-матрица $X(z)$ также построена, а ее элементы вычисляются согласно (5.4), если $u^2 \neq 1/2$, и по формулам (5.3), если $u^2 = {}^1/_2$. Итак, фактор-матрица матричного коэффициента $G(\mu)$ полностью завершена.

6. Условия разрешимости и завершение решения векторной краевой задачи. Учитывая поведение векторов и матриц, входящих в краевое условие (4.7) в конечных особых точках и на бесконечности, получим его общее решение

$$N(z) = F(z) + X(z)\,\Phi(z) \tag{6.1}$$

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{bmatrix} + \frac{1}{z-\mu_0}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{bmatrix} + \frac{1}{1-2uz}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

причем $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ в случае $u^2 = {}^1/_2$, ибо фактор-матрица в точке μ_0 полюсов не имеет.

Вектор $N(z)$, определенный равенством (6.1), является мероморфным вектором и не исчезает в бесконечности. Поэтому его нельзя принять в качестве вектора, введенного равенством (3.3). Устраним полюса в конечных точках, а также сделаем вектор исчезающим на бесконечности за счет выбора его свободных параметров. Тогда вектор (6.1) можно принять в качестве вектора (3.3).

Введем вектор $\chi = S^{-1}\Phi$ с элементами χ_1 и χ_2. Выделим у него полюс в точке μ_0 и представим его в виде $\chi = \varphi/(z-\mu_0) + \psi$. Компоненты φ и ψ выпишем в явном виде через элементы S_{ij}^{-1} матрицы S^{-1}

$$\varphi_\alpha(z) = \alpha_1 S_{\alpha 1}^{-1}(z) + \beta_1 S_{\alpha 2}^{-1}$$

$$\psi_\alpha(z) = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_2}{1-2uz}\right) S_{\alpha 1}^{-1} + \left(\beta_0 + \frac{\beta_2}{1-2uz}\right) S_{\alpha 2}^{-1}, \quad \alpha = 1, 2$$

Матрицу S^{-1} запишем как

$$S^{-1}(z) = \frac{1}{r(z)}\begin{bmatrix}1 & -A(z)\\ -1 & B(z)\end{bmatrix}$$

$$A = (m_{11} - m_{22} - r)/2m_{21}, \quad B = (m_{11} - m_{22} + r)/2m_{21}$$

Тогда

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1 A, \quad \varphi_2 = -\alpha_1 + \beta_1 B$$

$$\psi_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{1-2uz} - \left(\beta_0 - \frac{\beta_2}{1-2uz}\right) A$$

$$\psi_2 = -\alpha_0 - \frac{\alpha_2}{1-2uz} + \left(\beta_0 + \frac{\beta_2}{1-2uz}\right) B$$

Перейдем к рассмотрению условий разрешимости на различных участках изменения параметра u, ибо характер особенностей вектора $N(z)$ существенно зависит от величины u. При всех значениях u решение $N(z)$ требуется сделать исчезающим на бесконечности и уничтожить простой полюс в точке $z = 1/(2u)$

и полюс 2-го порядка в точке μ_0. Исключение составляет лишь случай $u^2 = 1/2$, при котором, как указывалось, решение $N(z)$ не имеет полюса в точке μ_0.

1. Случай $0 < u < 1/\sqrt{2}$. Здесь помимо устранения указанных особенностей требуется устранить полюс 2-го порядка в точке $z = -u$. Учитывая особенности элементов матрицы $U(z)$ и поведение решения на бесконечности, наложим следующие условия разрешимости:

$$\chi_1(z) = O(z - \mu_0), \quad z \to \mu_0 \tag{6.2}$$

$$\chi_2(z) = O((z + u)^2), \quad z \to -u \tag{6.3}$$

$$N(z) = O(1), \quad z \to 1/(2u) \tag{6.4}$$

$$N(z) = O(1/z), \quad z \to \infty \tag{6.5}$$

Перепишем условия (6.2)—(6.5) в терминах элементов векторов φ и ψ и элементов матрицы X

$$\varphi_1(\mu_0) = 0 \tag{6.6}$$

$$\varphi_1'(\mu_0) + \psi_1(\mu_0) = 0 \tag{6.7}$$

$$\varphi_2(-u) - (u + \mu_0)\psi_2(-u) = 0 \tag{6.8}$$

$$\varphi_2(-u) + (u + \mu_0)\varphi_2'(-u) - (u + \mu_0)^2\psi_2'(-u) = 0 \tag{6.9}$$

$$\varepsilon_n = 1 - \alpha_2 X_{21}\left(\frac{1}{2u}\right) - \beta_2 X_{22}\left(\frac{1}{2u}\right) \tag{6.10}$$

$$\alpha_2 X_{11}\left(\frac{1}{2u}\right) + \beta_2 X_{12}\left(\frac{1}{2u}\right) = 0 \tag{6.11}$$

$$1 + \alpha_0 X_{21}(\infty) + \beta_0 X_{22}(\infty) = 0 \tag{6.12}$$

$$\varepsilon_T = -\gamma\left[\alpha_0 X_{11}(\infty) + \beta_0 X_{12}(\infty)\right] \tag{6.13}$$

Вычислим значения элементов матрицы X на бесконечности

$$X_{11}(\infty) = U_2(\infty), \quad X_{12}(\infty) = 0, \quad X_{22}(\infty) = U_1(\infty)$$

$$X_{21}(\infty) = -(U_1(\infty) - U_2(\infty))\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$U_\alpha(\infty) = \exp\left[(-1)^\alpha\gamma^2\left(u^2 - \frac{1}{2}\right)(B_{-2} + R_{-2})\right], \quad \alpha = 1, 2$$

Здесь B_{-2} и R_{-2} — коэффициенты при z^{-2} в разложениях $B(z)$ и $R(z)$ в ряды Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Заметим, что $X_{12}(1/(2u)) = 0$. Поэтому из уравнения (6.11) видно, что $\alpha_2 = 0$, а уравнения (6.10) и (6.13) упрощаются

$$\varepsilon_n = 1 - \beta_2 X_{22}\left(\frac{1}{2u}\right), \quad \varepsilon_n = -\gamma\alpha_0 X_{11}(\infty)$$

Из оставшейся системы уравнений (6.6)—(6.9) и (6.12) находятся все свободные параметры решения (входящие в конструкцию вектора $\Phi(z)$) и искомые физические константы (ε_T и ε_n), как функции скорости испарения u.

Рассмотрим частный случай задачи, когда $u \to 0$. Здесь

$$\alpha_1 = A(\mu_0)\beta_1, \quad \alpha_1 = B(0)\beta_1$$

$$\beta_1 A'(\mu_0) = \alpha_0 - (\beta_0 + \beta_2) A(\mu_0)$$

$$\alpha_1 = \beta_1 B(0) - \mu_0 [-\alpha_0 + (\beta_0 + \beta_2) B(0)]$$

Можно найти, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\beta_0 = -\beta_2 = -X_{22}^{-1}(\infty)$. Теперь видно, что ε_T и ε_n стремятся к нулю при $u \to 0$.

Отметим, что при малых $u > 0$ (слабое испарение) полученное здесь решение не совпадает с решением из [18, 17]. Это означает некоммутативность двух подходов: линеаризации уравнения Больцмана с его последующим решением и решения общего уравнения с последующей линеаризацией полученных результатов. Это объясняется наличием множителя $(1 - 2u\mu)^{-1}$ у нижнего элемента вектора граничных значений $F(\mu)$, возникающего вследствие линеаризации максвеллиана относительно равновесного состояния вдали от стенки. Если сначала устремить $u \to 0$ в этом множителе и затем строить решение краевой задачи (4.7), то тогда $F(z) = O(z)$ $(z \to \infty)$ и на этом пути в точности получается решение задачи о слабом испарении [18, 17].

2. *Случай* $-1/\sqrt{2} < u < 0$. Решение (6.1) имеет в точке $z = -u$ простой полюс, остальные особенности те же самые, что и в предыдущем случае. Вместо (6.3) поэтому имеем

$$\chi_1(z) = O(z + u) \quad (z \to -u)$$

откуда вместо уравнений (6.8) и (6.9) получим одно уравнение

$$\varphi_1(-u) - (u + \mu_0)\psi_1(-u) = 0$$

Учитывая, что в точке μ_0 теперь функция $U_2(z)$ имеет простой полюс, получим уравнения

$$\varphi_2(\mu_0) = 0, \quad \varphi_2'(\mu_0) + \psi_2(\mu_0) = 0$$

вместо уравнений (6.6) и (6.7).

Итак, в данном случае для определения констант на одно уравнение меньше, чем число констант. Для однозначного решения поэтому следует задать два параметра из трех: ε_T, ε_n и u.

3. *Случай* $u^2 = {}^1/_2$. Здесь

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} (m_{11} - m_{22})^{-1} & 0 \\ -(m_{11} - m_{22})^{-1} & m_{21}^{-1} \end{bmatrix}$$

Следовательно

$$\Omega_\alpha(z) = m_{\alpha\alpha}(z) + \gamma^2(1 - 2uz) J(z), \quad \alpha = 1, 2$$

$$m_{11} = 1 - 2uz, \quad m_{22} = -4/3uz$$

Из условий разрешимости при $u = {}^1/_2$ получим

$$\varepsilon_n = 1 \tag{6.14}$$

$$\varepsilon_T = \gamma X_{21}^{-1}(\infty), \quad \beta_0 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_0 = -X_{21}^{-1}(\infty)$$

а при $u = {}^1/_2$ имеем

$$\varepsilon_T = -\gamma\alpha_0, \quad \varepsilon_n = 1 - \beta_2 X_{22}\left(\frac{1}{2u}\right)$$

$$\beta_0 = \frac{\beta_2}{2}, \quad \alpha_0 X_{21}(\infty) + \beta_0 + 1 = 0$$

4. *Случай* $^1/_2 < u^2 < ^5/_6$. Если $u \in (1/\sqrt{2}, \sqrt{5/6})$, то $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$, поэтому решение строится точно так же, как и в случае *1*. Если $u \in (-\sqrt{5/6}, -1/\sqrt{2})$, то $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = -1$. Это означает, что решение здесь выводится так же, как и в случае 2.

5. *Случай* $u^2 \geq 5/6$. При $u > \sqrt{5/6}$, как указывалось, $\varkappa_1 = -1$, $\varkappa_2 = -2$. Согласно (5.2) функция $U_1(z)$ в точке $z = -u$ имеет полюс 2-го порядка, а функция $U_2(z)$ в этой точке имеет простой полюс. Условия разрешимости состоят из девяти уравнений относительно восьми неизвестных и в общем случае не имеют решения. При $u = -\sqrt{5/6}$, так же как и в случае *2*, следует задавать два параметра из трех ε_T, ε_n и u). Пусть, наконец, $u < -\sqrt{5/6}$. Здесь $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Для однозначности решения следует задать все три параметра (ε_T, ε_n и u). Итак, анализ условий разрешимости завершен. Теорема полностью доказана.

7. Заключение. Математическая особенность данной задачи, отличающая ее от задачи о слабом испарении, заключается в появлении дополнительного полюса в точке $x_1 = (2u)^{-1}$ у краевого условия векторной краевой задачи, который необходимо устранить в ходе решения. Это принципиальная особенность, отличающая данную задачу от всех других задач в линейной постановке. При этом из разложения решения по собственным векторам видно, что данная точка x_1 соответствует расстоянию порядка $x_0 = \lambda(2M)^{-1}$ от поверхности. Таким образом, в задаче возникает дополнительный параметр длины $\sim x_0$. При числах Маха порядка единицы этот параметр практически совпадает с λ. Однако при $M \to 0$ величина параметра x_0 неограниченно растет и, следовательно, необходимо рассматривать отдельно зависимость решения от величины этого параметра.

Физическую картину при малых числах Маха можно представить следующим образом. На расстояниях $\lambda \ll x \ll x_0$ (λ — длина свободного пробега) течение газа выходит на промежуточную асимптотику. При этом параметры газа соответствуют параметрам газа при слабом испарении. При $x \gg x_0$ достигается истинная асимптотика с параметрами, отличными от параметров промежуточной асимптотики. Этим объясняется отмеченная выше некоммутативность двух предельных переходов. Следует отметить, что данное обстоятельство (наличие двух асимптотик при малых числах Маха) затрудняет анализ задачи численными методами, так как результаты численного анализа могут быть ограничены лишь промежуточной асимптотикой и не смогут выявить истинную асимптотику в поведении газа вдали от стенки. Отметим, что результаты численного анализа, приведенные в [11], представляются сомнительными, так как по крайней мере при $u^2 = ^1/_2$ они дают неверный результат, что следует из сравнения результатов этой работы с соотношением (6.14) настоящей работе.

Наличие двойной асимптотики позволяет по-новому взглянуть на парадокс течения газа между двумя испаряющимися поверхностями, состоящий в том, что направление температурного градиента становится противоположным разности температур на стенках при раздвигании стенок на расстояние много большее, чем λ/M. Дело в том, что, как следует из данной работы, при переходе через это расстояние результатами линеаризованной теории пользоваться нельзя. Это можно представить следующим образом. Число Рейнольдса для этой задачи $Re = Lw/\nu$, где L — расстояние между поверхностями, ν — кинематическая вязкость, w — скорость пара. Число Рейнольдса можно представить в виде $Re \sim \sim LM/\lambda$. Таким образом, когда $L \gg \lambda/M$, число $Re \gg 1$, а в таких условиях существенны нелинейные эффекты. Следовательно, испарение даже при малых скоростях становится сильным (нелинейным), когда расстояние между поверхностями становится достаточно большим. Отсюда следует, что испарение в полупространство всегда в некотором смысле сильное (даже при малых скоростях).

О выделенности числа Маха. Из данной теории следует, что число Маха $M = 1$ является выделенным (при $M \geq 1$ решение задачи не существует) для процессов испарения в том смысле, что испарение как стационарный процесс может осуществляться только при числах Маха, меньших единицы. Данное утверждение находится в соответствии с результатами, полученными другими методами (в том числе и численными) [5—7]. Из результатов данной работы следует, что процессы испарения и конденсации несимметричны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Реди Дж.* Действие мощного лазерного излучения. М.: Мир, 1974. 468 с.
2. *Анисимов С. Н.* Об испарении металла, поглощающего лазерное излучение // ЖЭТФ. 1968. Т. 54. № 1. С. 339—342.
3. *Найт Ч. Дж.* Теоретическое моделирование быстрого поверхностного испарения при наличии противодавления // Ракетная техника и космонавтика. 1979. Т. 17. № 5. С. 81—86.
4. *Ytrehus T.* Theory and experiments on gas kinetics in evaporation // Rar. Gas Dynam. Techn. Pap. 10th Int. Symp. 1976. Pt2. New York. N. Y., 1977. P. 1197—1212.
5. *Абрамов А. А., Коган М. Н., Макашев Н. К.* Численное моделирование процессов в сильно неравновесных слоях Кнудсена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 72—81.
6. *Абрамов А. А.* Решение задачи о сильном испарении одноатомного газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 185—187.
7. *Кузнецова И. А., Юшканов А. А., Яламов Ю. И.* Применение метода Мотт — Смита к решению задачи о сильном испарении с плоской поверхности // Теплофиз. высоких температур. 1992. Т. 30. № 2. С. 345—350.
8. *Arthur M. D., Cercignani C.* Non-existence of a steady rarefied supersonic flow in a half-space // Z. Ang. Math. und Phys. 1980. V. 31. № 5. P. 634—645.
9. *Siewert C. E., Thomas J. R., Jr.* Strong evaporation into a half space // Z. Ang. Math. und Phys. 1981. V. 32. № 4. P. 421—433.
10. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитическое решение одномерной задачи об умеренно сильном испарении (и конденсации) в полупространстве // ПМТФ. 1993. № 1. С. 102—108.
11. *Siewert C. E., Thomas J. R., Jr.* Strong evaporation into a half space . The three dimensional BGK-model // Z. Ang. Math. und Phys. 1982. V. 33. № 2. P. 202—218.
12. *Greenberg W., Mee C., van der, Protopopescu V.* Boundary value problems in abstract kinetic theory. Basel: Birkhäuser Verlag, 1987. 524 p.
13. *Cercignani C., Frezzotti A.* Linearized analysis of a onespeed BGK-model in the case of strong condensation // Теорет. и прикл. механика. 1988. Т. 19. № 3. Р. 19—23.
14. *Arthur M. D.* Preliminary results on the non-existence of solutions for a half space Boltzmann collision model with three degrees of freedom // Transport Theory and Stat. Phys. 1984. V. 13. № 1—2. P. 176—191.
15. *Siewert C. E., Thomas J. R., Jr.* Analytical solutions to two matrix Riemann—Hilbert problems // Z. Ang. Math. Phys. 1982. V. 33. № 5. P. 626—639.
16. *Латышев А. В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК-уравнения в задаче о температурном скачке // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 581—586.
17. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Точное решение уравнения Больцмана с оператором столкновений БГК в задаче о слабом испарении // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 6. С. 55—63.
18. *Долгошеина Е. Б., Латышев А. В., Юшканов А. А.* Точные решения модельного БГК-уравнения Больцмана в задачах о скачке температуры и слабом испарении // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 163—171.
19. *Латышев А. В.* Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 151—164.

Москва

Поступила в редакцию
25.VI.1992