МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 532.613.013.4:537.84

© 1993 г. М. П. ЗЕКЦЕР

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

На фоне решения с покоящейся жидкостью определен спектр линейных возмущений и выделена его неустойчивая область. Показано, что электрическое поле оказывает дестабилизирующее воздействие, а магнитное поле и вязкость влияют только на величину декремента возмущений, а не на сам факт существования неустойчивости. Построен пример регулятора с обратной связью, стабилизирующего две неустойчивые моды.

1. Неустойчивость жидкого металла во внешнем электрическом поле исследовалась многими авторами. В [1] показано наличие принципиальной возможности потери устойчивости слоем жидкости, пороговое значение напряженности электрического поля, приводящее к возникновению неустойчивости получено в [2], а в [3] найдено приближенное решение для вязкой жидкости. Цель настоящей работы — определить область неустойчивости стационарных состояний плоского слоя проводящей несжимаемой, в общем случае вязкой жидкости, находящейся во внешнем электромагнитном поле, и застабилизировать эти состояния с помощью введения специального регулятора с обратной связью. Решение указанной задачи может быть полезным при анализе процессов в катодном пятне, дуговой сварке, гранулирования металлов и других МГД-технологий.

Рассмотрим слой жидкости глубиной h со свободной верхней границей, находящейся во внешнем электрическом $E = E(0;\ E_0,\ 0)$ и магнитом $B = B(0,\ bB_0,\ B_0)$ полях. Внешняя электрическая цепь разомкнута и $j_0 = 0$. В этом случае уравнения магнитной гидродинамики допускают стационарное решение для покоящейся жидкости с гидростатическим распределением давления за счет силы тяжести.

Будем считать, что магнитное число Рейнольдса мало. Тогда, линеаризуя уравнения относительно этого решения и переходя к функции тока Ψ и потенциалу φ, получим в безразмерном виде

$$R\lambda\Delta\Psi = \Delta^2\Psi + R\alpha_3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2},$$

$$\Delta\varphi = -M\Delta\Psi;\quad \alpha_3 = MNb^2 \tag{1.1}$$

Параметр M указывает на наличие ($M = 1$) или отсутствие ($M = 0$) магнитного поля, R — число Рейнольдса, N — параметр МГД-взаимодействия, определенный по магнитному полю B_0. В качестве характерных значений при обезразмеривании приняты: для координаты — h, времени $-\sqrt{h/g}$, давления — ρgh. Будем искать решение (1.1) в виде $\exp(ikx + \lambda t)$, где k — волновое число, а λ — спектральный параметр с амплитудами, зависящими от поперечной координаты. Граничными условиями для первого уравнения (1.1) являются

$$y = 0,\ \ \Psi = 0,\ \ \Psi' = 0$$

$$y = 1,\ \ \Psi = -\frac{\lambda\beta}{ik},\ \ \Psi'' + k^2\Psi = 0 \tag{1.2}$$

Здесь β — возмущение свободной границы. В безразмерном виде решение (1.1), (1.2) имеет вид

$$\Psi = -\frac{\lambda\beta}{ik}(c_1e^{ry} - c_2e^{-ry} - c_3e^{qy} - c_4e^{-qy})$$

$$r^2 = k^2 + 0{,}5\lambda R + 0{,}5\alpha_3 R + S; \quad q^2 = k^2 + 0{,}5\lambda R + 0{,}5\alpha_3 R - S$$

$$S = \sqrt{\lambda^2 + \alpha_3\frac{\alpha_3 + 2\lambda + 4k^2}{R}}$$

$$b_1 = (r^2 + k^2)\, e^r - \frac{(q + r)(q^2 + k^2)\, e^q}{2q} - \frac{(q - r)(q^2 + k^2)\, e^{-q}}{2q} \tag{1.3}$$

$$b_2 = (r^2 + k^2)\, e^{-r} - \frac{(q - r)(q^2 + k^2)\, e^q}{2q} - \frac{(q + r)(q^2 + k^2)\, e^{-q}}{2q}, \quad c = \frac{b_1}{b_2}$$

$$c_1 = \left(e^r + ce^{-r} - \left(\frac{q + r}{2q} - \frac{(q - r)\,c}{2q}\right) e^q - \left(\frac{q - r}{2q} - \frac{(q + r)\,c}{2q}\right) e^{-q}\right)^{-1}$$

$$c_2 = cc_1, \quad c_3 = c_1\left(\frac{q + r}{2q} - \frac{(q - r)\,c}{2q}\right), \quad c_4 = c_1\left(\frac{q - r}{2q} - \frac{(q + r)\,c}{2q}\right)$$

Возмущение давления восстанавливается из уравнения движения с учетом (1.3)

$$p = -\frac{\lambda\beta}{2k^2}\left(r\,(c_1e^{ry} - c_2e^{-ry})(\lambda + \alpha_3 + S) + q(c_3e^{qy} - c_4e^{-qy})(\lambda + \alpha_3 - S)\right) \tag{1.4}$$

Сформулируем теперь граничные условия для второго уравнения (1.1). Полагая нижнюю стенку идеальным проводником, получим

$$y = 0, \quad \varphi = 0 \tag{1.5}$$

На свободной границе должны быть выполнены условия непрерывности нормальной компоненты плотности тока и касательной составляющей вектора напряженности электрического поля. Из первого следует, что

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = M\frac{\partial\Psi}{\partial y} \tag{1.6}$$

Решение второго уравнения (1.1) с граничными условиями (1.5), (1.6) имеет вид

$$\varphi = -M\Psi \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что в рассматриваемой постановке электрическое поле в объеме жидкости отлично от нуля только при наличии приложенного магнитного поля.

В вакууме возмущения электрического поля описываются уравнением Лапласа, убывающее на бесконечности решение которого определяется следующим соотношением:

$$\varphi_0 = C_0e^{-ky} \tag{1.8}$$

Из уравнения непрерывности касательной составляющей напряженности электрического поля при $y = 1$ получим, полагая $\sqrt{gh}\,B_0/cE_0 \ll 1$ (c — скорость света в вакууме), что $\beta - \varphi_0 = 0$. Отсюда находим постоянную в (1.8)

$$C_0 = \beta e^k \tag{1.9}$$

Выпишем теперь, пренебрегая членами второго порядка малости, условие непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений на свободной границе с учетом силы тяжести и давления Лапласа

$$p - \alpha_2\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = \beta\,(1 + \alpha_1 k^2), \quad \alpha_1 = \frac{\sigma}{\rho gh^2}, \quad \alpha_2 = \frac{E_0^2}{4\pi\rho gh} \tag{1.10}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения. С учетом (1.4), (1.8), (1.9) из (1.10) получим дисперсионное соотношение

$$\lambda^2 + Wf = 0, \quad W = 1 + \alpha_1 k^2 - \alpha_2 k \tag{1.11}$$

$$f = 2k^2 \left(r(c_1 e^r - c_2 e^{-r}) \left(1 + \frac{(\alpha_3 - S)}{\lambda} \right) + q\,(c_3 e^q - c_4 e^{-q}) \left(1 + \frac{(\alpha_3 + S)}{\lambda} \right) \right)^{-1}$$

В случае невязкой жидкости и в отсутствие магнитного поля $f = f_0 = k\,\mathrm{th}\,(k)$, а при наличии магнитного поля $f = f_m = w\,\mathrm{th}\,(w)$, где $w^2 = k^2\lambda/(\lambda + \alpha_3)$. Расчеты показали, что f, f_0 и f_m всегда принимают положительные значения, причем $f_0 > f_m > f$ при любом значении k. Отсюда следует, что магнитное поле, как, впрочем, и вязкость, приводит лишь к уменьшению декремента возмущений, никак не влияя на само существование неустойчивости, условие которого $W < 0$.

2. Перейдем теперь к решению задачи стабилизации неустойчивых стационарных состояний, возникающих в рассмотренной выше системе протяженностью L в продольном направлении. Предположим для простоты, что магнитное поле мало или вовсе отсутствует и вязкость несущественна (параметр МГД-взаимодействия мал, число Рейнольдса велико). Разлагая функции в (1.1) в ряд по тригонометрическим функциям, получим условие (1.11) с безразмерным волновым числом $k_n = \pi n h/L$, где n — натуральное число. Задача стабилизации решается с помощью введения в систему регулятора с обратной связью [4]. Регулятор должен включать систему воздействия и систему наблюдения.

Построим модельный регулятор, в котором система воздействия реализуется в виде давления на свободную поверхность, причем на участке $(0,\ x_2)$ оно принимает некоторое безразмерное значение p_0, определяемое в процессе решения, а вне его равно нулю. Раскладывая такую ступенчатую функцию в ряд, получим с учетом (1.4) вместо (1.10) следующее соотношение:

$$\left(\frac{\lambda^2}{k_n} \mathrm{cth}\,(k_n) + 1 + \alpha_1 k_n^2 - \alpha_2 k_n \right) \beta_n = \frac{2p_0}{k_n L} \sin\,(k_n x_2) \tag{2.1}$$

Пусть система наблюдения регулятора измеряет возмущение свободной поверхности в точке $(x_1,\ 1)$. Тогда, согласно [3], система объект—регулятор будет устойчивой, если уравнение

$$Q\,(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\,(k_n x_1) = 1 \tag{2.2}$$

не имеет решения с $Re\lambda > 0$; $Q(\lambda)$ — искомая функция, определяющая временной характер воздействия регулятора.

Рассмотрим ситуацию, когда неустойчивыми являются две первые гармоники, а соответствующие им значения спектрального параметра равны λ_1 и λ_2. Разложим функцию β_n, определяемую (2.1), в ряд Лорана

$$\beta_n = \frac{C_1}{\lambda - \lambda_1} \frac{C_2}{\lambda - \lambda_2} + \sum_{n=3}^{\infty} \Phi\,(\lambda,\ n) \tag{2.3}$$

$$C_1 = \frac{p_0 \sin\,(k_1 x_2)\ \mathrm{th}\,(k_1)}{L\lambda_1}, \quad C_2 = \frac{p_0 \sin\,(k_2 x_2)\ \mathrm{th}\,(k_2)}{L\lambda_2}$$

$$\Phi\,(\lambda,\ n) = \frac{2p_0 \sin\,(k_n x_2)\ \mathrm{th}\,(k_n)}{L\,(\lambda^2 - W_n)}$$

где C_1 и C_2 — вычеты функции β_n в точках λ_1 и λ_2, а $\Phi(\lambda,\ n)$ — аналитическая функция.

Будем искать $Q(\lambda)$ в виде

$$Q(\lambda) = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{s_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{s_2}{\lambda - \mu_2} + D(\lambda)\right)^{-1} \tag{2.4}$$

где s_i и μ_i — искомые параметры, а $D(\lambda)$ — искомая функция. Перепишем (2.2) в виде

$$\frac{1}{s_0} + \frac{s_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{s_2}{\lambda - \mu_2} + D(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda - \lambda_2} + \sum_{n=3}^{\infty} \Phi(\lambda, n)$$

Рассмотрим функцию $G(\lambda)$

$$G(\lambda) = \frac{1}{s_0} + \frac{s_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{s_2}{\lambda - \mu_2} - \frac{C_1}{\lambda - \lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda - \lambda_2} \tag{2.5}$$

и потребуем, чтобы она не имела корней с $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Пусть ее корни — z_1, z_2, z_3, z_4. Тогда указанную функцию можно представить в виде

$$G(\lambda) = \frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\,a_0}; \quad g_1(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \tag{2.6}$$

$$g_2(\lambda) = (\lambda - z_1)(\lambda - z_2)(\lambda - z_3)(\lambda - z_4)$$

Приравняем (2.5) и (2.6). Полученное соотношение домножим на $(\lambda - \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Полагая затем $\lambda = \lambda_i$, получим два соотношения для определения неизвестных μ_1 и μ_2

$$(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2) = g_3(\lambda_1); \quad (\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2) = g_3(\lambda_2) \tag{2.7}$$

$$g_3(\lambda_i) = -\frac{g_2(\lambda_i)}{(\lambda_i - \lambda_j)\,\alpha_0 C_i}$$

Аналогично, домножая на $(\lambda - \mu_i)$ и полагая затем $\lambda = \mu_i$, получим два соотношения, определяющие α_1 и α_2

$$\alpha_i = \frac{g_2(\mu_i)}{(\mu_i - \mu_j)(\mu_i - \lambda_1)(\mu_i - \lambda_2)} \tag{2.8}$$

Аппроксимируем искомую функцию $D(\lambda)$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа [5]

$$D(\lambda) = \sum_{s=1}^{N+1} F(\lambda_s) \prod_{j \neq s} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_s - \lambda_j}; \quad F(\lambda) = \sum_{n=3}^{\infty} \Phi(\lambda, n)$$

$$\lambda_s = \frac{1 + \xi_s}{1 - \xi_s}; \quad \xi_s = \exp\frac{2\pi i s}{N + 1}$$

где λ_s — узлы интерполяции, число которых равно N.

Рассмотрим конкретную ситуацию. Пусть имеется слой жидкого алюминия, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 7$. В этом случае характерные значения обратного гидродинамического и магнитного чисел Рейнольдса много меньше единицы, что оправдывает безындукционное приближение идеальной жидкости. Условие малости параметра МГД-взаимодействия оказывается выполненным в этом случае для магнитных полей, индукция которых меньше 0,1 T. Пусть $L/h = 2$, $x_1 = 0{,}8$ и $x_2 = 0{,}4$. Значения λ_1 и λ_2 соответственно равны 2,70016 и 1,97950. Тогда из (2.7) и (2.8) $\mu_1 = -0{,}325 \cdot 10^3$, $\mu_2 = -0{,}255 \cdot 10^1$, $\alpha_1 = -0{,}318 \cdot 10^3$, $\alpha_2 = 0{,}757 \cdot 10^{-3}$.

При проведении расчетов необходимо задать число n учитываемых гармоник. Значение этой величины выбиралось таким образом, чтобы ее удвоение слабо сказывалось на результатах. В рассматриваемом здесь примере это условие всегда выполнялось при $n = 16$.

Отображая правую полуплоскость комплексной плоскости λ на единичную окружность, можно по теореме о вычетах определить с учётом (2.3), (2.4) число корней с $Re\lambda > 0$. Оказалось, что они отсутствуют уже в случае $s_0 = 1$, $N = 1$, $p_0 = 1$.

Таким образом, определены параметры регулятора, стабилизирующего неустойчивые стационарные состояния в рассматриваемой системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tonks L. A.* Theory of liquid surface rupture by a uniform electric field//Phys. Rev. 1935. V. 48. № 6. P. 562—568.
2. *Френкель Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме//ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 347—350.
3. *Невровский В. А.* Неустойчивость пленки расплавленного металла в электрическом поле//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С 20—28.
4. *Бучин В. А.* Стабилизация неустойчивого состояния равновесия жидкости, подогреваемой снизу//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 15—27.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 429 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1993