МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1993

УДК 532.595

© 1993 г. И. М. КАЗМЕРЧУК, В. А. САМСОНОВ

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЕЦЕССИРУЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

Построено решение линеаризованных уравнений Навье — Стокса для определения установившегося относительного движения маловязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей цилиндрический сосуд, который совершает регулярную прецессию с малым углом нутации. Определены форма свободной поверхности и осевая проекция момента сил, действующих на боковую поверхность сосуда со стороны жидкости.

Аналогичная задача для полного заполнения решалась в [1]. Осевой момент вязких напряжений, по теореме об изменении момента количеств движения системы, оказался величиной второго порядка малости. В [2] показано, что соответствующее относительное течение жидкости описывается вторым приближением для решения нелинейных уравнений Навье — Стокса.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело — сосуд имеет полость в форме прямого кругового цилиндра радиуса a и длины $2c$, частично заполненную маловязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ и вязкости μ. Предположим, что тело совершает регулярную прецессию вокруг неподвижного направления L с угловой скоростью прецессии Ω. Будем считать, что собственное вращение сосуда осуществляется с угловой скоростью ω вокруг оси полости, пересекающейся с линией L в центре O цилиндра и составляющей с ней постоянный угол нутации θ.

Рассмотрим задачу об установившемся относительном движении жидкости в полости тела. Для описания движения введем систему координат xyz, ось z которой направлена по оси полости и которая вращается с угловой скоростью прецессии вокруг неподвижной оси L. Ось x расположим в плоскости zL.

В качестве характерных величин длины, времени и плотности используем a, ω^{-1}, ρ. Задача содержит четыре безразмерных параметра: $\lambda = c/a$ — удлинение полости; θ — угол нутации; $\tau = \Omega/\omega$ — частоту; $E = \mu/\rho\omega a^2$ — число Экмана.

В цилиндрических координатах r, φ, z уравнения Навье — Стокса для безразмерных компонент u, v, w скорости $\mathbf{V}$ имеют вид

$$D'u - \frac{v^2}{r} - 2(1+\tau_1)v + 2\varepsilon w\sin\varphi = -\frac{\partial p}{\partial r} + E\left(D''u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

$$D'v + \frac{uv}{r} + 2(1+\tau_1)u + 2\varepsilon w\cos\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + E\left(D''v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) \qquad (1.1)$$

$$D'w - 2\varepsilon v\cos\varphi - 2\varepsilon u\sin\varphi - 2\varepsilon r\cos\varphi = -\frac{\partial p}{\partial z} + ED''w$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$D' = \frac{\partial}{\partial\varphi} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad D'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\varepsilon = \tau\sin\theta, \quad \tau_1 = \tau\cos\theta$$

$$p = P - \tfrac{1}{2}\{r^2(1+\tau_1)^2 + 2\varepsilon\tau_1 zr\cos\varphi + \varepsilon^2 r^2\sin^2\varphi + \varepsilon^2 z^2\}$$

Здесь P — давление.

Будем считать, что угол нутации мал и, следовательно, ε мало. Это позволяет строить решение в виде разложения по параметру ε.

Перейдем к формулировке граничных условий. На боковой стенке должно выполняться условие прилипания

$$r = 1:\quad u = 0,\quad v = 0,\quad w = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение свободной поверхности представим в виде

$$f = r - b - \xi(\varphi, z) = 0$$

Когда $\varepsilon = 0$, то $\xi(\varphi, z) = 0$. Естественно считать, что возмущение $\xi(\varphi, z)$ — малая величина порядка ε. Граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$r = b:\quad -p - \frac{b^2(1+\tau)^2}{2} - b\xi(1+\tau)^2 - \varepsilon\tau z\cos\varphi + 2E\frac{\partial\varphi}{\partial r} + O(\varepsilon^2) = -P_0$$

$$u - \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} + O(\varepsilon^2) = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{b} + O(\varepsilon^2) = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} + O(\varepsilon^2) = 0$$

где P_0 — давление в той части сосуда, где отсутствует жидкость.

Примем, как и в [1, 2], что удлинение полости велико и что влияние торцов цилиндра будет существенным только на расстоянии порядка $O(1)$ от торцов. Поэтому опустим граничное условие на торцах и будем искать установившееся течение на конечном отрезке как бы бесконечно длинного цилиндра.

2. Разложение по параметру ε. Будем искать решение в виде отрезка ряда

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 \ldots,\quad p = p_0 + \varepsilon p_1 \ldots$$

В нулевом приближении получим очевидное решение

$$V_0 = 0,\quad p_0 = P_0 - 0{,}5b^2(1+\tau)^2$$

Для функций V_1, p_1 имеем систему линейных уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} - 2(1+\tau)v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + E\left(D''u_1 - \frac{u_1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_1}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial\varphi} + 2(1+\tau)u_1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial\varphi} + E\left(D''v_1 - \frac{v_1}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial\varphi} - 2r\cos\varphi = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + ED''w_1,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

$$r = 1:\quad u_1 = 0,\quad v_1 = 0,\quad w_1 = 0$$

$$r = b:\quad -p_1 - b\xi(1+\tau)^2 - \tau zb\cos\varphi + 2E\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$u_1 - \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = 0,\quad \frac{1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{b} = 0,\quad \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0$$

Так как жидкость маловязкая, система (2.1) содержит малый параметр E при старших производных. Решение этой системы будем строить методом пограничного слоя [3].

При разложении скорости жидкости V_1 и давления p_1 оставим лишь те три члена, которые потребуются для вычисления старшего ненулевого приближения осевой проекции момента сил, действующих на стенки полости со стороны жидкости

$$V_1 = V_1^\circ + E^{1/2}V_1^1 + V_1^b,\quad p_1 = p_1^\circ + E^{1/2}p_1^1 + p_1^b$$

Здесь V_1°, p_1° описывают основное невязкое течение. Функции V_1^b, p_1^b характеризуют течение в тонком пограничном слое у твердой стенки. Они быстро стремятся к нулю при удалении от стенок внутрь цилиндра. Функции V_1^1, p_1^1 определяют вторичное невязкое течение.

3. Вычисление основного невязкого течения. Функции V_1°, p_1° удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial u_1^\circ}{\partial\varphi} - 2(1+\tau)v_1^\circ = -\frac{\partial p_1^\circ}{\partial r},\quad \frac{\partial v_1^\circ}{\partial\varphi} + 2(1+\tau)u_1^\circ = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_1^\circ}{\partial\varphi} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial w_1^\circ}{\partial \varphi} - 2r\cos\varphi = -\frac{\partial p_1^\circ}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_1^\circ}{\partial r} + \frac{u_1^\circ}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1^\circ}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1^\circ}{\partial z} = 0$$

$$r = 1:\ u_1^\circ = 0, \quad r = b:\ u_1^\circ - \frac{\partial \xi^\circ}{\partial \varphi} = 0, \quad -p_1^\circ - b\xi^\circ (1+\tau)^2 - \tau z b\cos\varphi = 0$$

Решение системы (3.1) ищем в виде

$$u_1^\circ = u^*(r)\, z\sin\varphi, \quad v_1^\circ = v^*(r)\, z\cos\varphi, \quad w_1^\circ = w^*(r)\sin\varphi, \quad p_1^\circ = p^*(r)\, z\cos\varphi$$

$$\xi^\circ = \xi^\circ z\cos\varphi$$

Тогда имеем

$$u^* - 2(1+\tau)\, v^* = -\frac{dp^*}{dr}, \quad -v^* + z(1+\tau)\, u^* = \frac{p^*}{r} \tag{3.2}$$

$$w^* = 2r - p^*, \quad \frac{du^*}{dr} + \frac{u^*}{r} - \frac{v^*}{r} = 0$$

$$r = 1:\ u^* = 0; \quad r = b:\ u^* + \xi^* = 0, \quad -p^* - b\xi^* (1+\tau)^2 - \tau b\cos\varphi = 0 \tag{3.3}$$

Выразим из первых двух уравнений системы (3.2) u^*, v^* через p^*, dp^*/dr и подставим эти выражения в четвертое уравнение. Для p^* получим уравнение

$$\frac{d^2p^*}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dp^*}{dr} - \frac{p^*}{r^2} = 0.$$

Его решение, удовлетворяющее граничным условиям (3.3), имеет вид

$$p^* = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad c_1 = \frac{b^2(1+2\tau)\,\tau}{(b^2-1)\,\tau^2 + 2}, \quad c_2 = \frac{-b^2(3+2\tau)\,\tau}{(b^2-1)\,\tau + 2}$$

Таким образом, для основного невязкого течения имеем

$$p_1^\circ = k\left[(-1-2\tau)\, r + \frac{3+2\tau}{r}\right] z\cos\varphi, \quad k = -\frac{b^2\tau}{(b^2-1)\,\tau^2 + 2}$$

$$u_1^\circ = k\left(\frac{1}{r^2} - 1\right) z\sin\varphi, \quad v_1^\circ = -k\left(\frac{1}{r^2} + 1\right) z\cos\varphi \tag{3.4}$$

$$w_1^\circ = \left[2 + k\left\{(1+2\tau)\, r - \frac{3+2\tau}{r}\right\}\right]\sin\varphi, \quad \xi^\circ = k\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) z\cos\varphi$$

4. Течение в пограничном слое у боковой стенки цилиндра. Для того чтобы обеспечить выполнение условий прилипания на боковой стенке цилиндра, построим пограничные функции $\mathbf{V}_1^b$, p_1^b.

Сделаем замену переменных в (2.1), $\eta = (1-r)\, E^{-0,5}$, $u_\eta^b = u_1^b E^{-0,5}$. Приравнивая в полученных таким образом уравнениях и граничных условиях члены при одинаковых степенях E и пользуясь (3.4), будем иметь

$$\frac{\partial p_1^b}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v_1^b}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 v_1^b}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial w_1^b}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 w_1^b}{\partial \eta^2} \tag{4.1}$$

$$v_1^b(0, \varphi, z) = 2kz\cos\varphi, \quad w_1^b(0, \varphi, z) = 2(k-1)\sin\varphi \tag{4.2}$$

$$\eta \to \infty, \quad v_1^b \to 0, \quad w_1^b \to 0, \quad p_1^b \to 0$$

Из (4.1), (4.2) следует, что $p_1^b = 0$, и для v_1^b, w_1^b с помощью метода разделения переменных получим

$$v_1^b = 2kzB\cos(A+\varphi), \quad w_1^b = 2(k-1)\, B\sin(A+\varphi), \quad B = \exp A, \quad A = -\eta\sqrt{2}$$

Составляющая u_η^b находится из уравнения неразрывности

$$u_\eta^b = -2kzB\cos(A+\Phi), \quad \Phi = \varphi + \pi/4$$

5. Определение вторичного невязкого течения и уточнение формы свободной поверхности. Система уравнений для функций $\mathbf{v}_1^1$, p_1^1 имеет вид

$$\frac{\partial u_1^1}{\partial \varphi} - 2(1+\tau)\, v_1^1 = -\frac{\partial p_1^1}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_1^1}{\partial \varphi} + 2(1+\tau)\, u_1^1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_1^1}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial w_1^{\rm l}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial p_1^{\rm l}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_1^{\rm l}}{\partial r} + \frac{u_1^{\rm l}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1^{\rm l}}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1^{\rm l}}{\partial z} = 0 \tag{5.1}$$

$$r = 1: \ u_1 = -\frac{u_1^b}{E^{1/2}} = 2kz\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{5.2}$$

$$r = b: \ u_1 - \frac{\partial \xi^{\rm l}}{\partial \varphi} = 0, \ -p_1^{\rm l} - b\xi^{\rm l}(1+\tau)^2 = 0$$

Решение системы (5.1) с граничными условиями (5.2) имеет вид

$$p_1^{\rm l} = 2k\left[(-1-2\tau)Kr + \frac{T(3+2\tau)}{r}\right] z\sin\Phi, \quad K = k\tau + 1, \quad T = k\tau$$

$$u_1^{\rm l} = 2k\left[K - \frac{T}{r^2}\right] z\cos\Phi, \quad v_1^{\rm l} = -2k\left[K - \frac{T}{r^2}\right] z\sin\Phi$$

$$w_1^{\rm l} = 2k\left[(-1-2\tau)Kr + \frac{T(3+2\tau)}{r}\right]\cos\Phi, \quad \xi^{\rm l} = 2k\left[K - \frac{T}{b^2}\right] z\sin\Phi$$

Уравнение свободной поверхности в построенном приближении имеет вид

$$r = b + \varepsilon k\left\{\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) z\cos\varphi + E^{1/2}\left[2K - \frac{2T}{b^2}\right]\right\} \varepsilon kz\sin\Phi \tag{5.3}$$

Для применимости формулы (5.3) нужно потребовать, чтобы

$$\frac{a}{c}\varepsilon k\left|\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) + E^{1/2}2\left((k\tau+1) - \frac{k\tau}{b^2}\right)\right| \ll \min\{b; 1-b\}$$

6. Определение осевой проекции момента сил, действующих на тело со стороны жидкости. Для определения момента сил, действующих на него со стороны жидкости, воспользуемся теоремой об изменении момента количеств движения относительно начала координат. Тогда для гидродинамического момента получим

$$\mathbf{M} = \iiint_V \mathbf{R}\times[((\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\nabla)(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})]dV \tag{6.1}$$

где V — объем, занятый жидкостью.

Подставляя полученные выше решения в (6.1), для осевой проекции момента будем иметь

$$M_z = -4\sqrt{2}\,\varepsilon^2 E^{1/2}\omega^2 a^5\rho\lambda\pi\left[1 - k + k(1+\tau)\left\{(1+\tau)k(1-b^2) - (k\tau+1)\frac{1-b^4}{2}\right\}\right] \tag{6.2}$$

Если цилиндр полностью заполнен жидкостью, то из (6.2) получим

$$M_z = -4\sqrt{2}\,\varepsilon^2 E^{1/2}\omega^2 a^5\rho\lambda\pi \tag{6.3}$$

Такая же формула получается из [1] для случая маловязкой жидкости.

Из (6.2) видно, что M_z, как и в [1], имеет порядок ε^2. Это означает, что для прямого вычисления этой величины через касательные напряжения на стенках цилиндра необходимо строить второе приближение по ε решения нелинейных уравнений Навье — Стокса, как и в [2, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herbert Th.* Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder//J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 181—198.
2. *Казмерчук И. М.* Движение вязкой несжимаемой жидкости в прецессирующем цилиндре//Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1992. № 2. С. 93—96.
3. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
4. *Ждан Л. А., Самсонов В. А.* О движении двух вязких несмешивающихся несжимаемых жидкостей в цилиндре//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 92—99.

Ивано-Франковск
Москва

Поступила в редакцию
2.III.1993