

УДК 532.525.2

© 1993 г. Я. Д. АФАНАСЬЕВ, С. И. ВОРОПАЕВ

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача о струйном течении, возбуждаемом в вязкой стратифицированной по плотности жидкости точечным источником импульса, действующим горизонтально. В приближении пограничного слоя получены упрощенные асимптотические уравнения. Показано, что вертикальная компонента скорости мала и движение в струе носит слоистый характер. Экспериментально измерены распределения продольной скорости в струе. Показано, что эти распределения аффинно-подобны и удовлетворительно аппроксимируются известным погранслоинным решением Шлихтинга для круглой затопленной струи в однородной по плотности жидкости.

Задача о стационарном течении, возбуждаемом в однородной по плотности вязкой жидкости особенностью в виде точечного источника импульса, рассматривалась многими авторами, начиная с классической работы Шлихтинга [1], где получено решение в приближении пограничного слоя. Течение это, называемое обычно круглой затопленной струей, неоднократно воспроизводилось экспериментально и первые же опыты [2] подтвердили справедливость решения Шлихтинга. В последующем для этой задачи было получено точное решение [3, 4], по существу лишь незначительно уточняющее решение [1]. Ниже рассматривается аналогичная задача для стратифицированной по плотности жидкости.

1. Анализ уравнений. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой стратифицированной по плотности жидкости, возбуждаемое сосредоточенным источником импульса, действующим в направлении горизонтальной оси x с силой $\rho^0 J = \text{const}$. Пусть фоновое (при отсутствии движения) вертикальное распределение плотности имеет вид

$$\rho_0(z) = \rho^0 \exp\left(-\frac{zN^2}{g}\right), \quad N^2 = -g\rho_0^{-1} \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right) = \text{const}$$

где g — ускорение силы тяжести, $\rho^0 = \text{const}$ — значение плотности на уровне $z = 0$, ось z направлена вверх. Соответствующее распределение гидростатического давления обозначим через $p_0(z)$. Полную плотность и давление в стационарном течении запишем в виде

$$\rho = \rho_0(z) + \rho_1(x, y, z), \quad p = p_0(z) + p_1(x, y, z)$$

где ρ_1, p_1 — возмущения, обусловленные движением. Если вертикальный масштаб движения H мал в сравнении с масштабом плавучести, $H \ll g/N^2$, что обычно всегда выполняется, то можно использовать приближения Буссинеска и уравнения движения записать в безразмерном виде

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.1)$$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.2)$$

$$u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = - \frac{\partial p'}{\partial z'} - \text{Ri} \rho' + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (1.4)$$

$$u' \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \rho'}{\partial y'} + w' \frac{\partial \rho'}{\partial z'} + w' = \text{Sc}^{-1} \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.5)$$

$$(u', v', w') = \left(\frac{u}{U_0}, \frac{v}{U_0}, \frac{w}{U_0} \right), (x', y', z') = \left(\frac{x}{H}, \frac{y}{H}, \frac{z}{H} \right)$$

$$\rho' = \frac{\rho_1}{\rho^0 U_0^2}, \rho' = \rho_1 \left(H \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{-1}, \text{Re} = \frac{H U_0}{\nu}, \text{Ri} = \frac{H^2 N^2}{U_0^2}, \text{Sc} = \frac{\nu}{k}$$

где (u', v', w') — вектор безразмерной скорости в безразмерных декартовых координатах (x', y', z') , ν — кинематическая вязкость жидкости, k — коэффициент молекулярной диффузии примеси, за счет которой изменяется плотность, в опытах это обычная соль. Продольная скорость U_0 на оси струи и поперечный размер H струи искусственно выбраны в качестве масштабов скорости и длины течения. По смыслу задачи эти величины не должны входить в решение, так как характерные масштабы в течении отсутствуют. Ниже будет показано, что числа Рейнольдса (Re) и Ричардсона (Ri), которые вводятся с помощью этих масштабов, а следовательно, и сами масштабы определяются внешними параметрами задачи: потоком импульса в струе $\rho^0 J$, параметром стратификации N и вязкостью ν .

Эксперименты показывают (см. ниже разд. 2), что течение сосредоточено в узком конусе вдоль оси x , поэтому будем рассматривать струю как свободный пограничный слой. В соответствии со стандартной процедурой, принятой в теории пограничного слоя, предположим, что при $\text{Re} \gg 1$ конвективные члены в уравнениях (1.1)–(1.3) балансируются членами, выражающими вязкую диффузию поперек пограничного слоя. Из (1.1) получаем асимптотические оценки

$$x' = \text{Re} x^*, y' = y^*, z' = z^*, u' = u^*, v' = \text{Re}^{-1} v^*$$

$$w' = \alpha \text{Re}^{-1} w^*$$

где звездочкой отмечены величины порядка единицы. По смыслу задачи w' не превышает v' , поэтому $\alpha \leq 1$. Из (1.2) получаем оценку $\partial p' / \partial y' = \text{Re}^{-2} \partial p^* / \partial y^*$. Таким образом, перепад давления $\Delta p'$ поперек струи мал, $\Delta p' \propto \text{Re}^{-2}$, и имеем оценку $\partial p' / \partial z' = \text{Re}^{-2} \partial p^* / \partial z^*$. В уравнении (1.3) все члены, в которые входит w' , по крайней мере не превышают по величине член $\partial p' / \partial z'$. Это дает оценку для оставшегося члена $\text{Ri} \rho' \lesssim \partial p' / \partial z'$, следовательно, $\rho' \lesssim \text{Re}^{-2} \text{Ri}^{-1} \rho^*$. Учитывая, что число Шмидта для соли, растворенной в воде, велико ($\text{Sc} \approx 10^3$), из (1.5) получаем оценку $\alpha = \text{Re}^{-2} \text{Ri}^{-1}$, что дает $w' = \text{Re}^{-3} \text{Ri}^{-1} w^*$. В теории пограничного слоя изменение давления в пограничном слое определяется заданным потенциальным течением вне пограничного слоя. В рассматриваемой задаче окружающая жидкость покоится, следовательно, $\partial p' / \partial x' = 0$.

Подставляя полученные оценки в уравнения (1.1)–(1.5) и пренебрегая членами, малыми по порядку величины при $\text{Re} \gg 1$, $\text{Re} \text{Ri} > 1$, получаем редуцированные асимптотические уравнения и граничные условия

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, p' = 0, \rho' = 0, w' = 0. \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0, v^* = 0 (y^* = 0); \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0 (z^* = 0)$$

$$u^* = 0 (y^{*2} + z^{*2} = \infty) \quad (1.8)$$

Постоянство потока импульса вдоль оси x служит условием нетривиальности решения

$$\frac{I}{\text{Re}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{*2} dy^* dz^* = 1 \quad (1.9)$$

где $I = J/\sqrt{2}$ — безразмерная интенсивность источника.

Таким образом, число Ричардсона (Ri), учитывающее влияние стратификации на течение, не входит ни в уравнение движения (1.6) — (1.7), ни в граничные условия (1.8) — (1.9). Тем не менее именно эффекты, обусловленные стратификацией, определяют своеобразный слоистый характер течения — частицы жидкости в струе движутся в горизонтальных плоскостях ($w \approx 0$), и обмен импульсом между слоями осуществляется за счет вязкой диффузии.

Уравнения (1.6) — (1.7) и граничные условия (1.8) — (1.9) допускают замену переменных $(X, Y, Z) = (x^*, y^*/x^*, z^*/x^*)$. Такая замена с использованием подстановки $(U, V) = (u^*x^*, v^*x^*)$ уменьшает количество переменных с трех до двух и дает для искомой продольной скорости u зависимость

$$u = U(Y, Z) \text{Re}^2 \frac{v}{x}, \quad Y = \text{Re} \frac{y}{x}, \quad Z = \text{Re} \frac{z}{x} \quad (1.10)$$

$$U_0 = u(x, 0, 0) = A \text{Re}^2 v/x \quad (1.11)$$

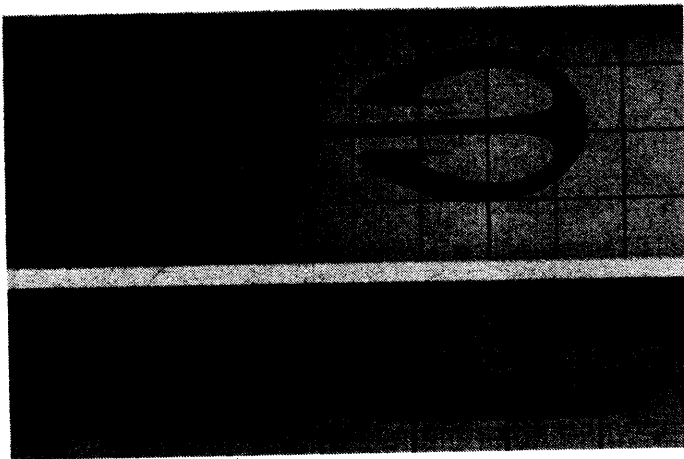
где $A = U(0, 0)$ — универсальная постоянная. Учитывая, что $\text{Re} = HU_0/v$, находим $H = x/A \text{Re}$, что дает

$$\text{Ri} = H^2 N^2 / U_0^2 = N^2 x^4 / A^4 \text{Re}^6 v^2 \sim x^4 \quad (1.12)$$

Число Ричардсона в отличие от числа Рейнольдса, которое постоянно, быстро растет вниз по потоку. С увеличением расстояния от источника вертикальная компонента скорости быстро затухает ($w \sim \text{Ri}^{-1} \sim x^{-4}$), так как силы плавучести становятся преобладающими, и течение превращается в слоистое. Соотношения (1.9) и (1.12) связывают числа Re и Ri с внешними определяющими параметрами и позволяют выразить масштабы длины и скорости, введенные ранее искусственно, через внешние параметры задачи.

2. Результаты эксперимента. Опыт проводился по схеме, описанной в [5], в бассейне из оптического стекла размером $30 \times 30 \times 80 \text{ см}^3$, заполненном жидкостью с примерно постоянной по глубине частотой Вайсяля — Брента (N). Рабочая жидкость — дистиллированная вода, плотность которой изменяется за счет изменения ее солености. Источник импульса — тонкое круглое сопло (стеклянное диаметром $D = 0,083 \text{ см}$ или металлическое $D = 0,054 \text{ см}$), из которого горизонтально на уровне своей плотности (ρ^*) выпускается жидкость с контролируемым и малым по величине объемным расходом $Q_* = 10^{-2} - 10^{-1} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$.

В струйном течении, возбуждаемом таким источником, расход жидкости $Q(x)$ быстро растет с увеличением расстояния от источника ($Q \approx 8\pi x$ [1]) за счет вязкого вовлечения в струю окружающей жидкости и при $x > Q_*/8\pi v$ малым внешним параметром Q_* можно пренебречь, тогда как поток импульса $\rho^0 J$ в направлении действия источника остается постоянным и равным примерно



Фиг. 1

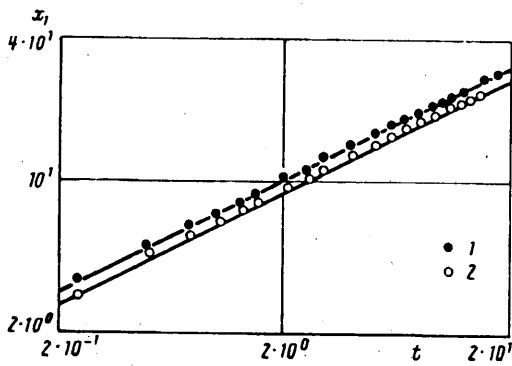
$J = \pi U_*^2 D^2 / 4 = 4Q_*^2 / \pi D^2$, где U_* — характерная продольная скорость на срезе сопла. Таким образом, при малых Q_* и D источник можно рассматривать как локализованный источник импульса интенсивности J .

При включении такого источника в однородной по плотности жидкости фронт развивающейся струи имеет форму осесимметричного вихря (см., например, [5]). Со временем фронтальный вихрь удаляется от источника и за ним устанавливается хорошо изученное течение типа круглой затопленной струи. В стратифицированной же жидкости фронт струи имеет форму плоского вихревого диполя, показанного на виде сверху (фиг. 1, а) и виде сбоку (фиг. 1, б). Крупная сетка — в дюймах, $Re = 85$, $N = 1,2 \text{ с}^{-1}$. Динамика фронта развивающейся струи в стратифицированной жидкости исследовалась в [6, 7]. Рассмотрим распределения продольной скорости в установившейся струе, которая формируется за фронтальным вихревым диполем.

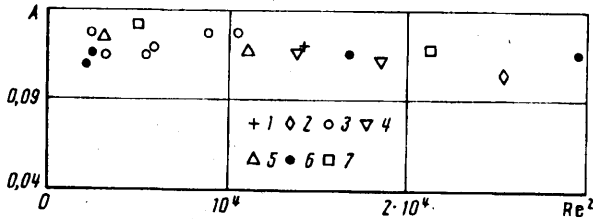
Распределения продольной скорости $U_0(x)$ по оси струи измерялись по методике [8]. После того как фронт струи удалялся на достаточное расстояние от источника (40—60 см), в струю вносилось слабое возмущение — «метка», которая движется вдоль оси струи со скоростью, в точности равной локальной скорости движения жидкости на оси струи [8]. Движение метки снималось с экрана теневого прибора кинокамерой с целью получить зависимости положения метки $x(t)$ от времени. Во все измерения вводилась небольшая поправка $x_0 = Q_*/8\pi v$ на виртуальное положение идеального точечного источника импульса.

Типичные зависимости $x_1 = x + x_0$ от времени, полученные в двух опытах при $Re = 105$, $N = 0,55 \text{ с}^{-1}$, $x_0 = 0,2 \text{ см}$ (1) и $Re = 118$, $N = 0,48 \text{ с}^{-1}$, $x_0 = 0,5 \text{ см}$ (2), показаны на фиг. 2. Во всех опытах расстояние $(x + x_0)$ увеличивалось со временем по закону $(x + x_0) \sim t^{1/2}$. При $x \gg x_0$ получаем $x \sim t^{1/2}$, что дает $U_0(x) \sim x^{-1}$. По экспериментальным данным типа показанных на фиг. 2 определялись средние (для каждого опыта) значения A в формуле (1.11). Результаты, полученные в опытах при различных Re и N , показаны на фиг. 3. Здесь точки 1—7 соответствуют $N = 0,4; 0,6; 0,7; 1,0; 1,1; 1,5; 1,6 \text{ с}^{-1}$. Осреднение по всем опытам дало $A = 0,12 \pm 0,02$, что практически совпадает с теоретической оценкой Шлихтинга ($A = 3/8\pi$) для струи в однородной жидкости.

Типичные картины треков от мелких частиц (алюминиевая пудра), сфотографированные с выдержкой $\Delta t = 6 \text{ с}$ в установившейся струе, показаны на фиг. 4. Вид сверху (плоскость $z = 0$) дан на фиг. 4, а, а вид сбоку (плоскость $y = 0$) — на



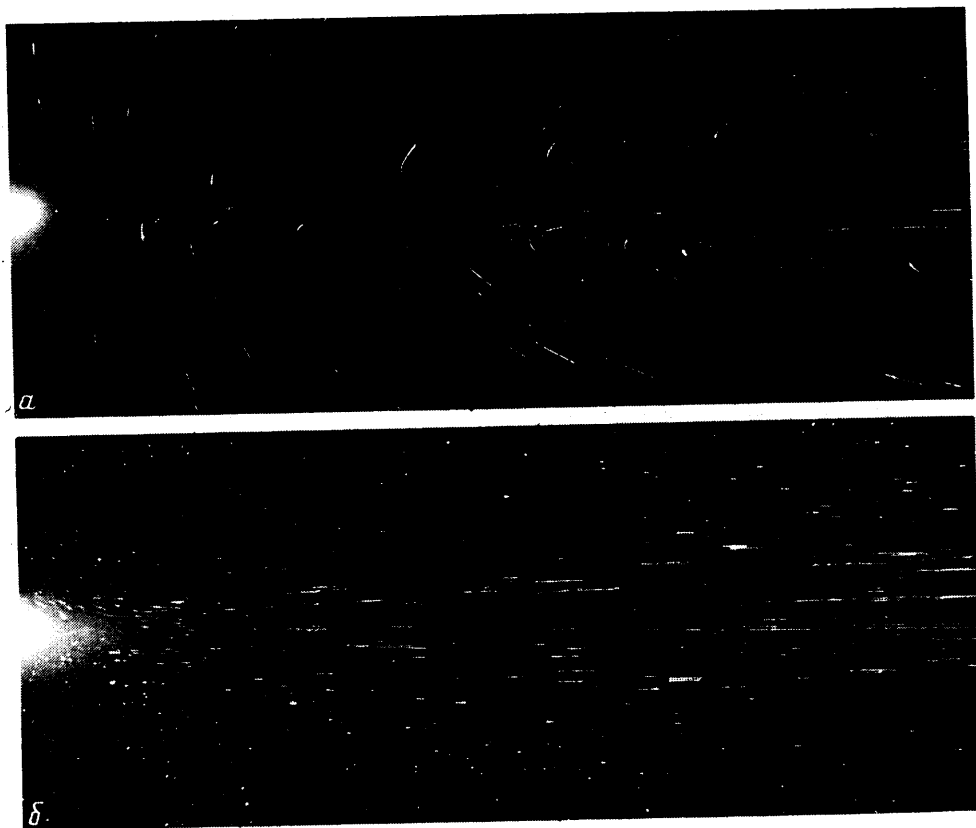
Фиг. 2



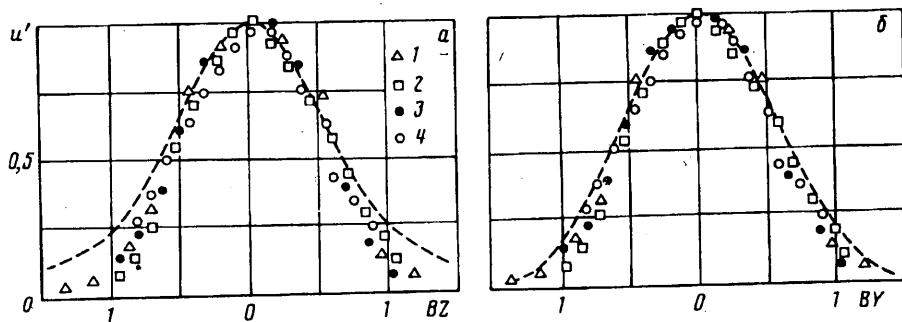
Фиг. 3

фиг. 4, б. Металлическое сопло слева на фотографиях при освещении световым «ножом» от лазера дает блик и плохо видно. Параметры опыта: $Re = 145$, $N = 0,7 \text{ с}^{-1}$. Собственно струя представляет собой течение в узком конусе с вершиной у среза сопла. Измерения продольной компоненты скорости поперек струи проводились именно в этой узкой области. Слабое возвратное течение вдали от оси струи, хорошо видимое на фиг. 4, а, обусловлено компенсационным потоком из-за ограниченного размера экспериментального бассейна и пренебрежимо мало. Картины движения частиц в струе в горизонтальной и вертикальной плоскостях различны: вертикальная компонента скорости практически отсутствует, за исключением области вблизи источника (фиг. 4, б), тогда как горизонтальная компонента поперечной скорости имеется (фиг. 4, а), таким образом, движение жидкости слоистое. С удалением от источника струя расширяется по горизонтали за счет медленного подтекания в нее окружающей жидкости в каждом из слоев. Вертикальный же размер струи увеличивается только за счет вязкого трения между горизонтальными слоями. Естественно ожидать, что при таком движении поперечное сечение струи будет не круглым, как в однородной жидкости, а эллиптическим, вытянутым по горизонтали. Измерения показывают, однако, что это не так.

Распределения продольной скорости поперек струи измерялись по методике [9] с использованием индикатора тимола-голубого. Перекрестье из двух тонких платиновых проволок (диаметр $2 \cdot 10^{-3}$ см, длина 10 см) закреплялось на державке с микрометрическими винтами и помещалось точно на оси струи на расстоянии x от источника. Одна проволока была размещена вертикально, а другая горизонтально. На проволоки подавалось небольшое переменное напряжение низкой частоты (1—3 Гц). В слабом растворе тимола-голубого вокруг проволок формируются тонкие цилиндры окрашенной жидкости, которые сносятся потоком, создавая маркеры нейтральной плавучести (такой способ визуализации не меняет плотность жидкости). С помощью зеркала кинокамерой снимались одновременно вид сбоку и сверху, что позволило строго контролировать совпадение центра перекрестья с осью струи. Это важно, так как на больших расстояниях от источника струя слабо меандрирует в горизонтальной плоскости и в случае несовпадения перекрестья с осью струи погрешность измерений неприемлемо велика. Именно поэтому был выбран такой метод измерений.



Фиг. 4



Фиг. 5

Распределения продольной скорости поперек оси струи по вертикали ($y=0$) и по горизонтали ($z=0$) на различных расстояниях от источника ($x=5-20$ см) рассчитывались по смещениям маркеров и известной частоте напряжения. Типичные распределения, полученные в серии опытов при $N=0,7$ с⁻¹, показаны точками на фиг. 5 (точки — результат оцифровывания профилей при обработке измерений).

Условия проведения опытов приведены ниже:

№	1	2	3	4
Re	99	69	96	50
Ri	0,24	0,25	2,3	14
x, см	5	10	15	20

Для проверки соотношения (1.10) безразмерные распределения скорости $u' = u/U_0$ представлены в координатах $Y = \text{Re } y/x$, $Z = \text{Re } z/x$, которые умножены на постоянную $B = (3/64\pi)^{1/2}$ для сопоставления с решением Шлихтинга [1]. Измеренные профили аффинно-подобны и не зависят от числа Ричардсона. Сравнение вертикальных (фиг. 5, а) и горизонтальных (фиг. 5, б) распределений показывает также, что струя в стратифицированной жидкости является фактически круглой и распределение Шлихтинга (штриховая линия на фиг. 5, а) неплохо аппроксимирует оба распределения. На фиг. 5, б штриховой линией показано горизонтальное распределение скорости, рассчитанное по полной нестационарной системе уравнений для развивающейся струи в стратифицированной жидкости [10]. Это распределение получено при $\text{Re} = 60$, $\text{Ri} = 9,5$, $N = 1 \text{ с}^{-1}$, $x = 5,5 \text{ см}$ практически сразу за фронтом струи.

Благодарим И. А. Филиппова за помощь при проведении эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung//Zeitschr. fur Angew. Math. und Mech. 1933. В. 13. № 4. С. 260—263.
2. *Andrade E. N., Tsien L. C.* The velocity-distribution in a liquid-into-liquid jet//Proc. Phys. Soc. London. 1937. V. 49. P. 381—391.
3. *Слезкин Н. А.* Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости//Уч. зап. МГУ. 1934. Вып. 2. С. 89—90.
4. *Ландау Л. Д.* Новое точное решение уравнений Навье — Стокса//Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. С. 108—110.
5. *Воропаев С. И., Филиппов И. А.* Развитие горизонтальной струи в однородной по плотности и в стратифицированной жидкостях. Лабораторный эксперимент//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 9. С. 964—972.
6. *Афанасьев Я. Д., Воропаев С. И.* О спиральной структуре грибовидных течений в океане//Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. № 1. С. 179—183.
7. *Voropayev S. I., Afanasyev Ya. D., Filippov I. A.* Horizontal jets and vortex dipoles in a stratified fluid//J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 543—566.
8. *Stern M. E., Voropayev S. I.* Formation of vorticity fronts in shear flow//Phys. Fluids. 1984. V. 27. N 4. P. 848—855.
9. *Baker D. J.* A technique for the precise measurement of small fluid velocities//J. Fluid Mech. 1966. V. 26. Pt 3. P. 573—575.
10. *Воропаев С. И., Неелов И. А.* Лабораторное и математическое моделирование течений дипольного типа (грибовидных течений) в стратифицированной жидкости//Океанология. 1991. Т. 31. Вып. 1. С. 68—75.

Москва

Поступила в редакцию
14.VI.1991