

УДК 532.529.6.031 : 517.54

© 1993 г. В. П. ЖИТНИКОВ, А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В плоских задачах гидродинамики эффективным средством исследования является теория функций комплексного переменного. В частности, в рамках этой теории были найдены точные аналитические решения для двух частных случаев обтекания газового пузыря [1, 2], получено асимптотическое решение для его малых деформаций [3], предложен итерационный метод расчета на основе разложения искомым функций в степенной ряд по малому параметру [4] и, наконец, дано подробное исследование обтекания мягких оболочек и пузырей [5, 6]. В последних двух работах авторы применили метод Леви — Чивита, предварительно выделив особенности искомым функций.

В случае осесимметричных течений методы аналитических функций не могут быть использованы непосредственно. В работе [7] были введены обобщенные аналитические функции специального вида и показана возможность интегрального представления их через обычные аналитические функции. К таким обобщенным функциям относятся также потенциал и функция тока осесимметричного течения. Следовательно, интегральные преобразования работы [7] позволяют свести осесимметричные задачи к плоским, правда, с более сложными интегральными условиями на границах области.

Применительно к осесимметричным задачам указанное преобразование использовалось в [8—12], где были предложены также другие формы преобразований.

В настоящей работе интегральное преобразование Г. Н. Положего применяется для решения осесимметричной задачи об обтекании пузыря. Поскольку в литературе это преобразование используется еще сравнительно редко, то авторы посчитали целесообразным вначале привести некоторые сведения об интегральных преобразованиях и о поведении аналитической функции вблизи критических и особых точек.

**1. Интегральное преобразование Г. Н. Положего.** В потенциальном осесимметричном течении потенциал  $\varphi$  и функция тока  $\psi$  в цилиндрических координатах  $x, y$  удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

В [7] введена  $p$ -аналитическая функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , удовлетворяющая условиям  $u_x = v_y/p$ ,  $u_y = -v_x/p$ , и для характеристики  $p = x^k$  получено интегральное представление  $f(z)$  через аналитическую в обычном смысле функцию  $f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Для обобщенной аналитической функции  $w = \varphi + i\psi$  с характеристикой  $p = y$  преобразование Положего имеет вид

$$w = \varphi + i\psi = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left( i + \zeta - \frac{z + \bar{z}}{2} \right) \frac{ds}{g(\zeta)},$$
$$g(\zeta) = \sqrt{(\zeta - z)(\zeta - \bar{z})} \quad (1.2)$$

где  $\Gamma$  — контур, соединяющий точку  $\bar{z} = x - iy$  с точкой  $z = x + iy$ ; на действительной оси  $x$  выполняются условия:  $v(x, 0) = 0$ ,  $\psi(x, 0) = 0$ .

Если на бесконечности при  $z \rightarrow \infty$  аналитическая функция  $f(z)$  удовлетворяет условию  $|f(z)| = O(|z|^{-\alpha})$ ,  $\alpha = \text{const} > 0$ , то контур  $\Gamma$  может быть деформирован таким образом, что

будет содержать бесконечно удаленную точку. В частности, из (1.2) можно получить два интегральных преобразования для действительных функций  $\varphi$  и  $\psi$

$$\varphi = \operatorname{Im} \int_z^{x+i\infty} f(\zeta) \frac{d\zeta}{g(\zeta)}, \quad \psi = -\operatorname{Im} \int_z^{x+i\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta - x) d\zeta}{g(\zeta)} \quad (1.3)$$

В многозначной функции  $g(s)$  следует выбрать одну из однозначных ветвей, например из условия  $\operatorname{Im} g(\zeta) > 0$  на интервале  $(z, z + i\infty)$ .

С помощью замены переменных  $\zeta = z + i\eta$  и последующего дифференцирования нетрудно убедиться непосредственно из (1.3), что функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют условиям (1.1). Частные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \operatorname{Im} \int_z^{x+i\infty} f'(\zeta) \frac{d\zeta}{g(\zeta)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\operatorname{Im} \int_z^{x+i\infty} f'(\zeta) \frac{(\zeta - x) d\zeta}{g(\zeta)} \quad (1.4)$$

где  $f'(z)$  обозначает производную по  $z$  от функции  $f(z)$ .

Рассмотрим предельное значение первого интеграла (1.3) при  $z \rightarrow x + i0$ . В этом случае функция  $g(\zeta) \rightarrow \zeta - x$  и подынтегральная функция в точке  $\zeta = x$  будет иметь простой полюс с главной частью  $u(x, 0)/(\zeta - x)$ . Пусть контур осесимметричного тела  $C$  находится правее точки  $z = x$ . Если рассмотреть в верхней полуплоскости  $z$  ( $\operatorname{Im} z > 0$ ) вне границы  $C$  два замкнутых контура слева и справа от прямой  $\{x + i0, x + i\infty\}$ , интеграл вдоль которых равен нулю, то путем деформирования этих контуров можно получить две формы для одного и того же значения потенциала скорости

$$\varphi(x, 0) = \frac{\pi}{2} u(x, 0), \quad \text{или} \quad \varphi(x, 0) = -\frac{\pi}{2} u(x, 0) + \operatorname{Im} \int_C f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \quad (1.5)$$

Здесь интегрирование ведется по часовой стрелке, т. е. осесимметричное тело остается справа. Аналогичные формулы можно найти для точки  $x$ , находящейся справа от осесимметричного тела

$$\varphi(x, 0) = -\frac{\pi}{2} u(x, 0), \quad \text{или} \quad \varphi(x, 0) = \frac{\pi}{2} u(x, 0) - \operatorname{Im} \int_C f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x} \quad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что поведение функции  $u(x)$  на оси  $x$  такое же, что и потенциала  $\varphi$ . Формулы (1.5) и (1.6) справедливы также для системы осесимметричных тел, расположенных на одной оси. Значение потенциала в точках  $x$  между осесимметричными телами может быть найдено по вторым формулам (1.5) или (1.6).

Пусть скорость потока на бесконечности равна  $V$ . Тогда потенциал скорости  $\Phi$  и функция тока  $\Psi$  при осесимметричном обтекании получаются путем суперпозиции невозмущенного и возмущенного течений, т. е.

$$\Phi = \varphi + Vx, \quad \Psi = \psi + Vy^2/2 \quad (1.7)$$

Вблизи критической точки конусовидной вершины  $x_0$  тела потенциал  $|\Phi(x, 0) - \Phi(x_0, 0)| = O(|x - x_0|^\gamma)$ , где показатель  $\gamma$  зависит только от угла конусности [13]. Следовательно

$$f(z) - f(x_0) = \pm \frac{2V}{\pi} (z - x_0) + O(|z - x_0|^\gamma)$$

где верхний знак отвечает правой критической точке, нижний знак — левой. Для тел с гладкой поверхностью в критических точках показатель  $\gamma = 2$ , т. е. аналитичность функции  $f(z)$  в этих точках не нарушается.

**2. Постановка задачи и параметрическое решение.** Пусть пузырь (или мягкая оболочка) обтекается потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. На поверхности пузыря  $\zeta$  выполняются кинематическое условие и динамическое условие Лапласа

$$\Psi = \psi + 0,5Vy^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{T \cos \vartheta}{y} + \frac{T}{R} = P_0 - P \quad (2.2)$$

Здесь  $V$  — скорость набегающего потока,  $T$  — поверхностное натяжение (одинаковое по всем направлениям и в любой точке поверхности),  $y$  — расстояние точки поверхности от оси  $x$ ,  $1/R = -d\vartheta/ds$  — меридиональная кривизна поверхности,  $s$  — дуговая абсцисса образующей тела вращения, положительное направление которой определяется по направлению часовой стрелки,  $P_0$  и  $P$  — давление внутри пузыря и снаружи. Если ввести безразмерные параметры

$$\mu = 2(P_0 - P_\infty)/\rho V^2, \quad We = \rho V^2 L / 2T \quad (2.3)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $P_\infty$  — давление жидкости на бесконечности,  $We$  — число Вебера,  $L$  — длина образующей  $\zeta$ , и воспользоваться интегралом Бернулли, то условие (2.2) может быть представлено в следующем виде:

$$L \left( -\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\cos \vartheta}{y} \right) = We \left( \mu - 1 + \frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}{V^2} \right) \quad (2.4)$$

Решение задачи, как и в плоском случае [6], проще отыскивать в параметрическом виде, отобразив конформно область течения в осевой плоскости  $z$  на внешность единичной окружности вспомогательной плоскости  $\xi$ . Искомые аналитические функции  $z(\xi)$  и  $f[\zeta(\xi)]$  с учетом симметрии относительно осей координат могут быть представлены в виде рядов

$$z = L \left[ a_0 \xi + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{\xi^{2m+1}} \right], \quad f = VL \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{2m}}{\xi^{2m}} \quad (2.5)$$

с действительными коэффициентами  $a_0$ ,  $a_{2m+1}$ ,  $b_{2m}$ .

В критических точках слева и справа от пузыря в соответствии с (1.5) и (1.6) выполняется условие  $df/dx = \pm 2V/\pi$ . Подставляя сюда функции (2.5) и полагая  $\xi = \pm 1$ , получаем одно и то же условие

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2mb_{2m} + \frac{2}{\pi} \left( a_0 - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) a_{2m+1} \right) = 0 \quad (2.6)$$

На окружности  $\xi = e^{i\sigma}$  действительные и мнимые части функций (2.5) равны соответственно

$$\begin{aligned} x &= L \left[ a_0 \cos \sigma + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \cos (2m+1) \sigma \right] \\ y &= L \left[ a_0 \sin \sigma - \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \sin (2m+1) \sigma \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$u = VL \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \cos 2m\sigma, \quad v = -VL \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin 2m\sigma$$

Длина образующей  $C$  осссимметричного пузыря

$$L = \int_0^{\pi} s'(\sigma) d\sigma, \quad s'(\sigma) = \sqrt{(x'(\sigma))^2 + (y'(\sigma))^2} \quad (2.8)$$

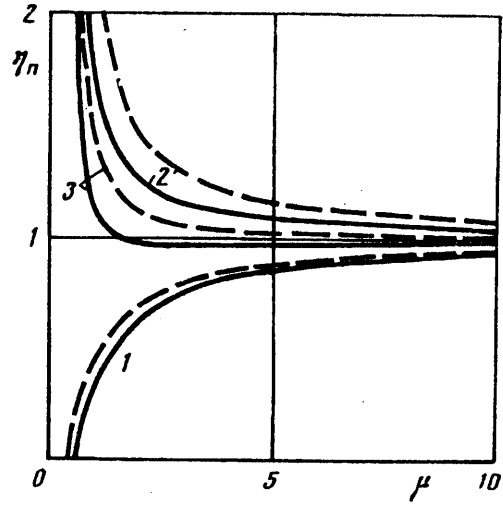
Для определения коэффициентов  $a_{2n+1}$ ,  $b_{2m}$  необходимо удовлетворять одновременно условиям (2.1) и (2.4), которые следует выразить через переменную  $\sigma$

$$\cos \vartheta = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(\sigma)}{s'(\sigma)}; \quad -\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{y''(\sigma)x'(\sigma) - x''(\sigma)y'(\sigma)}{(s'(\sigma))^3} \quad (2.9)$$

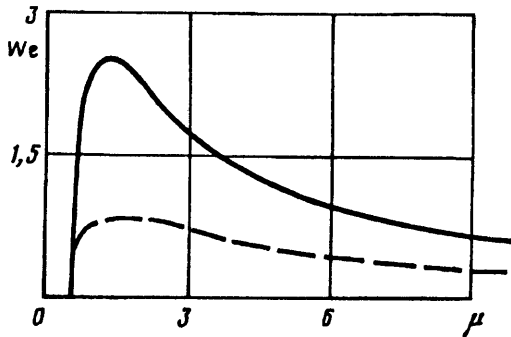
Интегралы в (1.3) и (1.4) для точек  $z$  на границе тела путем деформации



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

контура могут быть сведены к интегрированию вдоль границы  $C$  осесимметричного тела [12] и, следовательно, вдоль дуги окружности  $\xi = e^{\sigma}$

$$\psi = \text{Im} \int_0^{\sigma} f(\xi) \frac{\xi - x(\xi) \xi' d\beta}{g(\xi)} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\text{Im} \int_0^{\sigma} f'(\beta) \frac{d\beta}{g(\xi)}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{y} \text{Im} \int_0^{\sigma} f'(\beta) \frac{(\xi - x(\sigma)) d\beta}{g(\xi)} \quad (2.11)$$

$$z = z(e^{\sigma}) = x(\sigma) + iy(\sigma), \quad \xi = z(e^{\beta}), \quad \text{Re } \xi = x(\beta), \quad \text{Im } \xi = y(\beta),$$

$$f'(\beta) = u'(\beta) + iv'(\beta)$$

В критической точке при  $\sigma = 0$  условие (2.4) принимает вид

$$-\frac{2Lx''(0)}{[y'(0)]^2} = We(\mu - 1) \quad (2.12)$$

3. Численные расчеты. Для численных расчетов применялся метод коллокации, т. е. условия (2.1) и (2.4) удовлетворяются в дискретных точках  $\sigma_k = \pi k/2N$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , и кроме того, выполняются равенства (2.6), (2.7) и (2.12). Численно решалась система  $2N+3$  нелинейных уравнений относительно числа Вебера  $We$ , коэффициента  $a_0$ ,  $N$  первых коэффициентов  $a_{2m+1}$  и  $N$  коэффициентов  $b_{2m}$ . Все остальные коэффициенты сумм (2.5) считались равными нулю. Параметр  $\mu$  считался заданным. Длина образующей  $L$  и скорость  $V$  при переходе к безразмерным переменным сокращаются, поэтому без ограничения общности можно принять  $L = 1$ ,  $V = 1$ .

Результаты вычислений представлены на фиг. 1—3, где сплошные линии соответствуют осесимметричному пузырю, пунктирные — цилиндрическому [6].

На фиг. 1 показана конфигурация пузыря при  $\mu = 1$  (кривая 1) и 0,6814 (кривая 2). Во втором случае поверхность пузыря в критических точках соприкасается. В реальной жидкости это может привести к образованию тороидальных пузырей. Кривые 3 и 4 соответствуют цилиндрическому пузырю при  $\mu = 0,5463$  и 1. Для последнего случая может быть найдено точное аналитическое решение [2].

Масштаб выбран таким образом, чтобы объем внутри пузыря соответствовал объему шара единичного радиуса. В плоской задаче площадь сечения пузыря считается равной  $\pi$ .

Геометрические размеры пузыря характеризуются расстоянием между критическими точками  $l$  и диаметром максимального поперечного сечения  $d$ . На фиг. 2 приведены зависимости геометрических размеров осесимметричного и цилиндрического пузырей от параметра  $\mu$  при постоянном объеме (кривые 1—3 соответствуют функциям  $\eta_1(\mu) = l/2$ ,  $\eta_2(\mu) = d/2$ ,  $\eta_3(\mu) = 2L/\pi$ ).

Расчеты показывают, что изменение конфигурации осесимметричного пузыря аналогично плоскому. С уменьшением параметра  $\mu$  происходит сжатие в направлении потока и растяжение в поперечном направлении. При  $\mu < 0,6814$  ( $\mu < 0,5463$  в плоском случае) границы пузыря самопересекаются, что соответствует течениям на двулостной поверхности. В частности, при  $\mu = 0,5479$  (для плоского пузыря при  $\mu = 0,4412$ ) теоретически рассчитанный объем пузыря равен нулю. При этих значениях  $\mu$  кривые на фиг. 2 имеют вертикальные асимптоты.

На фиг. 3 показана зависимость числа Вебера от параметра  $\mu$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока//Тр. ЦАГИ. 1930. Вып. 41. С. 134—144.
2. McLeod E. B., Jr. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension//J. Rat. Mech. 1955. V. 4. № 5. P. 557—567.
3. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости//Уч. зап. МГУ. 1951. Вып. 152. Т. 3. Механика. С. 61—75.
4. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 13—23.
5. Житников В. П., Терентьев А. Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 6. С. 43—48.
6. Житников В. П., Терентьев А. Г. Безотрывное обтекание гибкой оболочки//Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 15—20.
7. Положий Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. 442 с.

8. *Попов В. В.* К задаче об ударе плавающего конуса//Гидромеханика. Киев, 1979. Вып. 40. С. 28—35.
9. *Гоман О. Г., Попов В. В.* К решению задач осесимметричного потенциала//Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1980. С. 55—61.
10. *Гоман О. Е.* О получении осесимметричных течений из плоскопараллельных//Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 113—121.
11. *Коковин Е. Т.* К решению внешних осесимметричных задач гидромеханики//Динамика механических систем: Тр. Всесоюз. школы-семинара. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987. С. 65—68.
12. *Житников В. П.* Видоизменение метода Леви — Чивиты для численного исследования осесимметричных потенциальных течений//Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. С. 48—56.
13. *Гесс, Фолкнер.* Точные значения показателя степени в законе, определяющем потенциальное поле течения около полубесконечных конусов//Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 4. С. 239—240.

Уфа  
Чебоксары

Поступила в редакцию  
19.II.1992