МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1993

УДК 532.526.4

© 1993 г. Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ К РАСЧЕТУ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В настоящей статье, завершающей содержание предыдущей работы [1], относящейся к внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя, излагается применение того же метода обобщенного подобия к внешней подобласти и тем самым к турбулентному пограничному слою в целом. Статья посвящена постановочной теоретической стороне метода, представляющей самостоятельный интерес. Относительная сложность расчета внешней подобласти на первом этапе не умаляет достоинств метода в целом, так как часть расчета обладает свойством универсальности, одинаковости для всех частных задач, что позволяет предварительно затабулировать результаты расчета. Второй этап расчета чрезвычайно прост и может быть сведен к интегрированию уравнения в полных производных первого порядка, допускающего приведение решения к квадратуре.

1. Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя во внешней подобласти (первый этап расчета). При выводе уравнений для внешней подобласти воспользуемся уравнениями (1.4) [1], общими для турбулентного пограничного слоя. При этом в отличие от вывода уравнений для внутренней подобласти [1], в уравнении (1.5) [1] примем не «прандтлевские» или «стрэдфордские», а «кармановские» масштабы U (скорость на внешней границе пограничного слоя с безвихревым потоком) и δ^{**} (толщина потери импульса), сохранив при этом те же масштабы для напряжений трения $T = \rho U^2$ и функции тока $\Psi = U\delta^{**}$. Это приведет, согласно (1.5) [1], к следующим кармановским (индекс k) переменным и параметрам:

$$\mathrm{Re}_\delta = \mathrm{Re}^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}, \quad \Phi_k = \frac{\psi}{U\delta^{**}}, \quad y_k = \frac{y}{\delta^{**}}$$

$$f = U'z, \quad f' = Uz', \quad z = \frac{\delta^{**2}}{\nu}, \quad \omega = f + \frac{1}{2}f' = 1 \tag{1.1}$$

* **От редакции.** Автор статьи, Лев Герасимович Лойцянский скончался 3 ноября 1991 г. на девяносто первом году жизни.

Предлагаемая вниманию читателя статья Льва Герасимовича, посвященная применению метода обобщенного подобия к расчету турбулентного пограничного слоя, была завершена незадолго до его кончины и предназначалась ее автором для опубликования в МЖГ.

Основные идеи метода обобщенного подобия в теории пограничного слоя были впервые сформулированы Л. Г. Лойцянским в 1965 г. применительно к ламинарному пограничному слою в несжимаемой жидкости и получили в дальнейшем развитие в работах учеников и последователей Льва Герасимовича у нас в стране и за рубежом см. [8].

Методу обобщенного подобия в теории турбулентного пограничного слоя посвящены лишь две прижизненные публикации Л. Г. Лойцянского [1, 9]. Настоящая работа в определенной степени завершает постановку задачи о применении метода обобщенного подобия к расчету турбулентных пристенных течений и содержит важные для дальнейшей возможной реализации метода практические соображения.

Редакция сочла целесообразным при подготовке рукописи к печати сохранить в неприкосновенности текст оригинала, в том числе и его стилистику, внеся лишь незначительные редакционные изменения.

$$P = \frac{p'\delta^{**2}}{\mu U} = -\rho U U' \frac{\delta^{**2}}{\mu U} = -f$$

$$\theta_k = \frac{\tau}{\rho U^2}, \quad \theta_{kt} = \frac{\tau_t}{\tau U^2}$$

Здесь штрих обозначает производную по абсциссе x, точка над буквой — производную по безразмерной ординате, выраженной в характерном для данного участка пограничного слоя масштабе.

На основе уравнения (1.4) статьи [1] выпишем две формы незамкнутого дифференциального уравнения во внешней подобласти, различие которых зависит от того, в какой форме принято безразмерное трение: в полной θ_k или чисто турбулентной θ_{kt}, отличающихся друг от друга на ламинарное слагаемое

$$\theta_{kl} = (1/\mathrm{Re}^{**})\ddot{\Phi}_k$$

$$(1/\mathrm{Re}^{**})[\Phi_k\ddot{\Phi}_k + f(1 - \dot{\Phi}_k^2)] + \dot{\theta}_k = 0 \tag{1.2}$$

$$(1/\mathrm{Re}^{**})[\dot{\ddot{\Phi}}_k + \Phi_k\ddot{\Phi}_k + f(1 - \dot{\Phi}_k^2)] + \dot{\theta}_{kt} = 0 \tag{1.3}$$

При отбрасывании турбулентного слагаемого $\dot{\theta}_{kt}$ уравнение (1.3) переходит в уравнение Фокнера и Скэн [2] в однопараметрическом приближении Хартри [3], что будет использовано в дальнейшем.

До тех пор, пока величины θ_k или θ_{kt} не будут определены, уравнения (1.2), (1.3) сохраняют свою незамкнутость. Для замыкания этих уравнений необходимо использовать какую-нибудь полуэмпирическую теорию турбулентности, пригодную для внешней подобласти. В качестве таковой возьмем гипотезу Клаузера [4], опирающуюся в отличие от квадратичной теории Прандтля на линейный закон зависимости касательного напряжения турбулентного трения от скорости сдвига.

Среди существующих вариантов закона Клаузера остановимся на классическом (для излагаемой далее теоретической схемы это не существенно)

$$\tau_t = \rho\nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_t = kU\delta^* \tag{1.4}$$

В кармановских масштабах будет

$$\frac{\nu_t}{U\delta^{**}} = k\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = kH, \quad \frac{\tau_t}{\rho U^2} = \theta_{kt} = kH\ddot{\Phi}_k \tag{1.5}$$

где, по принятой в теории пограничного слоя терминологии, $H = \delta^*/\delta^{**}$ — формпараметр.

Подобно модернизации формулы Прандтля [1] путем введения демпфирующего фактора и изменения распределения пути смешения, заменим в формулах (1.5) коэффициент k обобщенным его значением

$$K = k\gamma_1\gamma_2 H \tag{1.6}$$

$$\gamma_1 = [1 + 5{,}5(y/\delta)^6]^{-1} \tag{1.7}$$

$$\gamma_2 = \exp(-0{,}177\beta + 7{,}0\delta^*\beta'), \quad \beta = \delta^* p'/\tau_w \tag{1.8}$$

Здесь γ_1 учитывает влияние явления перемежаемости режимов течения вблизи внешней границы пограничного слоя с безвихревым потоком [5], а γ_2 расширяет применение формулы Клаузера на общий случай неравновесных турбулентных пограничных слоев при наличии продольного перепада давления [6]. Существует

введенный Т. Себеси [7] поправочный множитель, учитывающий влияние числа Re^{**} на константу Клаузера k ($k = 0{,}0168$) при малых числах Re^{**}. Цель настоящей статьи позволяет опустить этот сомножитель.

Заметим, что в равенстве (1.6) наряду с сомножителями k, γ_1, γ_2 помещен и формпараметр H.

В принятых кармановских масштабах, переменных и параметрах (1.1) вместо (1.5) [1] получим

$$\frac{\nu_t}{U\delta^{**}} = K, \quad \theta_{kt} = K\ddot{\Phi}_k, \quad \theta_{kl} = \frac{1}{\mathrm{Re}^{**}}\ddot{\Phi}_k \tag{1.9}$$

$$\theta_k = \theta_{kt} + \theta_{kl} = \left(\frac{1}{\mathrm{Re}^{**}} + K\right)\ddot{\Phi}_k$$

Примем величину θ_{kt} в качестве «связки», переводящей незамкнутую форму уравнений в замкнутую, и получим искомое дифференциальное уравнение для внешней подобласти

$$\frac{1}{\mathrm{Re}^{**}}\left[\dddot{\Phi}_k + \Phi_k\ddot{\Phi}_k + f(1 - \dot{\Phi}_k^2)\right] + \frac{d}{dy_k}(K\ddot{\Phi}_k) = 0 \tag{1.10}$$

Для интегрирования уравнения (1.10) необходимо установить соответствующие ему граничные условия.

2. Граничные условия для дифференциального уравнения (1.10) во внешней подобласти. В отличие от внутренней подобласти, где имелась естественная граница — твердая стенка, расчет сводился в [1] к численному решению задачи Коши, во внешней подобласти такой границы не существует. Такую границу надо искусственно вводить для постановки краевой задачи, учитывающей значения безразмерной функции тока и ее первой производной на этой границе и стремление первой производной к единице при бесконечном удалении от границы. При этом незнание механизма непрерывного перехода закона турбулентного трения Прандтля в закон Клаузера заставляет довольствоваться скачкообразным изменением переменных величин при переходе через границу между внутренней и внешней подобластями, представляющую таким образом линию разрыва значений переменных. Единой непрерывной теории турбулентного трения для обеих подобластей пока не существует.

Определим положение этой границы в плоскости течения равенством $y = y_n(x)$, а на первом, параметрическом, этапе расчета — просто ординатой y_n. Значения переменных на этой границе будем обозначать индексом n. Поскольку эта граница представляет «разрез» в плоскости течения, будем различать внешнюю сторону разреза, граничащую с внешней подобластью, и внутреннюю, граничащую с внутренней подобластью. Внешней стороне границы будем приписывать индекс k, что соответствует принятому во внешней подобласти кармановскому обозначению (1.1), внутренней — индексы * или s, в зависимости от ее расположения в прандтлевской или стрэтфордской зоне [1].

Наконец, принимая во внимание, что, согласно «двухъярусной» схеме [1], следует различать конфузорную, прандтлевскую, внутреннюю сторону разреза от диффузорной, стрэтфордской, введем индекс c для конфузорной и d для диффузорной частей турбулентного пограничного слоя. Для переменных величин на той или другой стороне линии разрыва к предыдущим добавляется еще индекс n. Для внешней стороны разреза сохраним кармановский индекс k, для внутренней — прандтлевский индекс * или стрэтфордский s. Так, индексом kcn обозначено значение переменной величины на внешней стороне разреза, в конфузорном участке, а индексом kdn — в диффузорном участке. Индексами $*cn$ и scn будем обозначать соответствующие значения на внутренней стороне разреза в прандтлевском или стрэтфордском участках.

Несмотря на единственность дифференциального уравнения (1.10) для всей внешней подобласти, разница в граничных условиях на внешней стороне линии разрыва приведет к различным постановкам задачи для конфузорной и диффузорной частей

$$\Phi_{kc} = \Phi_{kcn}, \quad \dot{\Phi}_{kc} = \dot{\Phi}_{kcn} \ (y_{kc} = y_{kcn}), \quad \dot{\Phi}_{kc} \to 1 \ (y_{kc} \to \infty) \tag{2.1}$$

$$\Phi_{kd} = \Phi_{kdn}, \quad \dot{\Phi}_{kd} = \dot{\Phi}_{kdn} \ (y_{kd} = y_{kdn}), \quad \dot{\Phi}_{kd} \to 1 \ (y_{kd} \to \infty) \tag{2.2}$$

Необходимость введения индексов c или d для значений рейнольдсова числа Re^{**}, параметра f и даже для самого аргумента y_k оправдана тем, что все они зависят от толщины δ^{**}, распределение которой будет различным для конфузорного и диффузорного участков.

Величины Φ_{kcn}, $\dot{\Phi}_{kcn}$, Φ_{kdn}, $\dot{\Phi}_{kdn}$, входящие в граничные условия уравнений (2.1) и (2.2), остаются неизвестными, пока не будут определены находящиеся с ними в прямой связи величины Φ_{*cn}, $\dot{\Phi}_{*cn}$, Φ_{scn}, $\dot{\Phi}_{scn}$, а эти в свою очередь станут известными только после фиксирования границы $y = y_n(x)$ между внутренней и внешней подобластями. Для внесения определенности в только что указанные соотношения необходимо задать модель разрывного перехода переменных через линию $y = y_n(x)$ раздела подобластей. Выбор этой модели позволит определить и условия сращивания на границе внутренней и внешней подобластей решения уравнений (2.1), (2.2) настоящей статьи и (6.1) статьи [1].

3. Сращивание решений дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя по внутренней и внешней подобластям. Задача о сращивании решений дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя по отдельным участкам уже встретилась в [1], где рассматривалось сращивание решений по двухъярусной схеме турбулентного ядра течения: нижнему, прандтлевскому, и налегающему на него, стрэтфордскому, участкам. В рассматриваемой сейчас внешней подобласти вопрос усложняется тем, что граница между внутренней и внешней подобластями разделяет участки с различными полуэмпирическими закономерностями турбулентного трения: прандтлевского — во внутренней и клаузеровского — во внешней подобласти. В этом более сложном случае осуществить непрерывный переход из одной подобласти в другую простым изменением закона пути смешения [1] уже нельзя. Установим следующую общую схему сращивания решений по внутренней и внешней подобластям.

Обозначим через a какую-нибудь переменную величину в ее размерном значении, а через A — соответствующее безразмерное значение в масштабе M, зависящем как от выбора размерной величины, так и от участка пограничного слоя, где применяется масштаб M. Скачок a при переходе через линию разрыва плоскости течения определим символом $[a]$. Так как $AM = a$, а по определению $M_k > 0$, имеем

$$[a] = A_kM_k - A_*M_* = A_kM_k - A_sM_s =$$

$$= M_k\left[A_k - \frac{M_*}{M_k}A_*\right] = M_k\left[A_k - \frac{M_s}{M_k}A_s\right]$$

Принимая во внимание, что скачок $[a]$ является слабым по сравнению со скачком $[A]$, зависящим от значений употребляемых масштабов, сделаем общее допущение, что в левых частях предыдущих равенств скачок $[a]$ можно положить равным нулю. Это допущение при современном состоянии знания о турбулентности представляется неизбежным.

Согласно предыдущему равенству, придем к двум общим формулам раздельно для конфузорного и диффузорного участков

$$A_k = (M_*/M_k)A_*, \quad A_{kd} = (M_s/M_k)A_s \tag{3.1}$$

Таблица 1

a	$M = M_*$	M_s	M_k	M_*/M_k	M_s/M_k
y	$\frac{\nu}{v_*}$	$\frac{\nu}{v_s}$	δ^{**}	$\frac{\nu}{v_*\delta^{**}}$	$\frac{\nu}{v_s\delta^{**}}$
ψ	ν	ν	$U\delta^{**}$	$\frac{\nu}{U\delta^{**}}$	$\frac{\nu}{U\delta^{**}}$
$\frac{\partial\psi}{\partial y}$	v_*	v_s	U	$\frac{v_*}{U}$	$\frac{v_s}{U}$
$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$	$\frac{v_*^2}{\nu}$	$\frac{v_s^2}{\nu}$	$\frac{U}{\delta^{**}}$	$\frac{v_*^2\delta^{**}}{\nu U}$	$\frac{v_s^2\delta^{**}}{\nu U}$

Составим табл. 1 значений M_*, M_s, M_k и M_*/M_k, M_s/M_k при $a = y$, ψ, $\partial\psi/\partial y$, $\partial^2\psi/\partial y^2$. Два последних столбца табл. 1 преобразуем, введя зависимость их от глобальных параметров пограничного слоя

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\left(\frac{v_*}{U}\right)^2, \quad \mathrm{Re}^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}$$

$$\frac{\nu}{v_*\delta^{**}} = \frac{\nu}{U\delta^{**}}\frac{U}{v_*} = \left(\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1}$$

$$\frac{\nu}{v_s\delta^{**}} = \frac{\nu}{U\delta^{**}}\frac{U}{v_*}\frac{v_*}{v_s} = \left(\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\right)^{-1}$$

$$\frac{\nu}{U\delta^{**}} = \mathrm{Re}^{**-1}, \quad \frac{v_*}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \quad \frac{v_s}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}$$

$$\frac{v_*^2\delta^{**}}{\nu U} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}\left(\frac{v_*}{U}\right)^2 = \mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2}$$

$$\frac{v_s^2\delta^{**}}{\nu U} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}\left(\frac{v_*}{U}\right)^2\left(\frac{v_s}{v_*}\right)^2 = \mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2\pi_s}, \quad \frac{v_*}{v_s} = \sqrt{\pi_s}$$

Отношения M_*/M_k и M_s/M_k представлены в табл. 2.

Произведя в равенствах (3.1) замену A_k и A_{kd} на y_{kn}, Φ_{kn}, $\dot{\Phi}_{kn}$, $\ddot{\Phi}_{kn}$ и соответственно y_{*n}, Φ_{*n}, $\dot{\Phi}_{*n}$, $\ddot{\Phi}_{kn}$ и y_{sn}, Φ_{sn}, $\dot{\Phi}_{sn}$, $\ddot{\Phi}_{sn}$, получим искомые связи между этими величинами по обе стороны линии разрыва (табл. 3).

Отметим простую пропорциональность между приведенными переменными величинами с коэффициентами пропорциональности, выраженными через глобальные параметры c_f и Re^{**} в конфузорной части границы между подобластями и присоединяющийся к ним локальный параметр $\pi_s = p_*^{-2/3}$ (вторая строка сверху на с. 28 статьи [1]).

Пользуясь табл. 3, заменим в граничных условиях уравнений (2.1) и (2.2) безразмерные значения переменных на внешней стороне границы между подобластями на соответствующие им значения на внутренней. Чтобы эти последние сделать известными, необходимо найти безразмерные ординаты y_{*cn}, y_{scn}, y_{*dn} и y_{sdn}. Для этого послужит выражение скачка $[\nu_t]$ размерного кинематического коэффициента турбулентной вязкости.

Таблица 2

a	$M = M_*/M_k$	M_s/M_k
y	$\left(\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1}$	$\left[\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\right]^{-1}$
ψ	Re^{**-1}	Re^{**-1}
$\frac{\partial\psi}{\partial y}$	$\sqrt{\frac{c_f}{2}}$	$\sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}$
$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$	$\mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2}$	$\mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2\pi_s}$

Замечая, что размерности ν_t и ψ совпадают, найдем в конфузорной и в диффузорной частях соответственно

$$[\nu_t] = \nu_{tkcn}U\delta^{**} - \nu_{t*cn}\nu = U\delta^{**}(\nu_{tkcn} - \mathrm{Re}_c^{**-1}\nu_{t*cn})$$

$$[\nu_t] = \nu_{tkdn}U\delta^{**} - \nu_{tsdn}\nu = U\delta^{**}(\nu_{tkdn} - \mathrm{Re}_d^{**-1}\nu_{tsdn})$$

Принимая и в этом случае допущение о равенстве нулю слабого скачка размерной величины ν_t, найдем соотношения между безразмерными величинами коэффициента турбулентной вязкости ν_t на линии раздела со стороны внешней и соответствующими значениями со стороны внутренней подобластей на конфузорном и диффузорном участках

$$\nu_{tkcn} = \mathrm{Re}_c^{**-1}\nu_{t*cn}, \qquad \nu_{tkdn} = \mathrm{Re}_d^{**-1}\nu_{tsdn}$$

Согласно (1.10) настоящей статьи и (4.9), (4.10) статьи [1], эти равенства преобразуются к виду

$$\varkappa_*^2(y_{*cn}/p_*)(1 + p_*y_{*cn} + g_*I_{*cn})\ddot{\Phi}_{*cn} = K_c\mathrm{Re}_c^{**}$$

$$\varkappa_*^2 y_{sdn}(\pi_s + y_{sdn} + g_sI_{sdn})\ddot{\Phi}_{sdn} = K_d\mathrm{Re}_d^{**}$$

Последняя строка табл. 3 в граничных условиях уравнений (2.1) и (2.2) не используется. Получив решение краевой задачи, представленной этими уравнениями, определим величины вторых производных на внешней стороне границы между подобластями. Отметим их штрихом: $\ddot{\Phi}'_{kcn}$, $\ddot{\Phi}'_{ksn}$, чтобы не смешивать с помещенными в табл. 3 значениями $\ddot{\Phi}_{kcn}$ и $\ddot{\Phi}_{ksn}$. Определим местный коэффициент трения c_f, согласно последней строке табл. 3, в конфузорном и в диффузорном участках формулами:

$$c_f = \frac{2}{\mathrm{Re}_i^{**}}\frac{\ddot{\Phi}'_{kin}}{\ddot{\Phi}_{*in}} \quad (i = c, d)$$

Можно заметить, что в конфузорном участке $c_f \neq 0$, что говорит об отсутствии отрыва в этом участке. В диффузорном участке отрыв ($c_f = 0$) будет при $\pi_s = 0$ ($p_* = \infty$).

4. Дополнительные соотношения между параметрами, не связанные с условиями сращивания решений по подобластям. К числу этих соотношений можно прежде всего отнести уже использованные равенства

$$\pi_s = p_*^{-2/3}, \quad p_* = \pi_*^{-3/2} \tag{4.1}$$

Таблица 3

Конфузорная часть	Диффузорная часть
$y_{kcn} = \left(\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1} y_{*cn}$	$y_{kdn} = \left[\mathrm{Re}^{**}\sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\right]^{-1} y_{*dn}$
$\Phi_{kcn} = \mathrm{Re}^{**^{-1}}\Phi_{*cn}$	$\Phi_{kdn} = \mathrm{Re}^{**^{-1}}\Phi_{sdn}$
$\dot{\Phi}_{kcn} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_{*cn}$	$\dot{\Phi}_{kdn} = \sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\,\dot{\Phi}_{sdn}$
$\ddot{\Phi}_{kcn} = \frac{c_f}{2}\mathrm{Re}^{**}\,\ddot{\Phi}_{*cn}$	$\ddot{\Phi}_{kdn} = \frac{c_f}{2\pi_s}\mathrm{Re}^{**}\,\ddot{\Phi}_{sdn}$

Непосредственно можно установить связь между кармановским параметром $f = U'\delta^{**^2}/\nu$ и прандтлевским параметром p_* или стрэтфордским π_s. По теореме Бернулли, справедливой на внешней границе пограничного слоя, $p_* = -\nu UU'/v_*^3$ и поэтому

$$\frac{f}{p_*} = -\frac{U'\delta^{**^2}}{\nu}\Big/\left(\frac{\nu UU'}{v_*^3}\right) = -\left(\frac{U\delta^{**}}{\nu}\right)^2\left(\frac{v_*}{U}\right)^3 = -\mathrm{Re}^{**^2}\left(\frac{c_f}{2}\right)^{3/2}$$

так что по (4.1)

$$f = -\mathrm{Re}^{**^2}\left(\frac{c_f}{2}\right)^{3/2} p_* = -\mathrm{Re}^{**^2}\left(\frac{c_f}{2\pi_s}\right)^{3/2} \tag{4.2}$$

Некоторую сложность представляет вычисление отношений толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} к характерной толщине δ, так как определяющие δ^* и δ^{**} интегралы приходится выражать как суммы интегралов по отдельным участкам пограничного слоя. По определению величин δ^* и δ^{**}, выделяя фигурными скобками интегралы по отдельным участкам в характерных для них масштабах, в конфузорной части будем иметь

$$\frac{\delta_c^*}{\delta} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta} =$$

$$= \left\{\int_0^{y_{*n}} \left(1 - \frac{v_*}{U}\frac{u}{v_*}\right) dy_*\right\}\frac{\nu}{v_*\delta} + \left\{\int_{y_{kcn}}^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta}\right\} \tag{4.3}$$

$$\frac{\delta_c^{**}}{\delta} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta} =$$

$$= \left\{\int_0^{y_{*n}} \frac{u}{v_*}\left(1 - \frac{v_*}{U}\frac{u}{v_*}\right) dy_*\right\}\frac{\nu}{U\delta} + \left\{\int_{y_{kcn}}^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta}\right\} \tag{4.4}$$

или в принятых параметрах и переменных

$$\frac{\delta_c^*}{\delta} = \left(\mathrm{Re}_\delta\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)^{-1}\left\{\int_0^{y_{*n}}\left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} +$$

$$+ \left\{\int_{y_{kcn}}^\infty (1 - \dot{\Phi}_{kc})\, dy_{kc}\right\} \tag{4.5}$$

$$\frac{\delta_c^{**}}{\delta} = \mathrm{Re}_\delta^{-1}\left\{\int_0^{y_{*n}} \dot{\Phi}_* \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} + \left\{\int_{y_{kcn}}^{\infty} \dot{\Phi}_{kc}(1 - \dot{\Phi}_{kc})\, dy_{kc}\right\} \tag{4.6}$$

Положив в последних двух равенствах $\delta = \delta_c^{**}$, получим

$$H_c = \frac{\delta_c^*}{\delta_c^{**}} = \frac{1}{\mathrm{Re}^{**}\sqrt{c_f/2}}\left\{\int_0^{y_{*n}} \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} +$$

$$+ \left\{\int_{y_{kcn}}^{\infty} \left(1 - \dot{\Phi}_{kc}\right) dy_{kc}\right\} \tag{4.7}$$

$$1 = \frac{1}{\mathrm{Re}_c^{**}}\left\{\int_0^{y_{*n}} \dot{\Phi}_* \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} + \left\{\int_{y_{kcn}}^{\infty} \dot{\Phi}_{kc} \left(1 - \dot{\Phi}_{kc}\right) dy_{kc}\right\} \tag{4.8}$$

Первое из этих равенств определяет значение «формпараметра» в конфузорных сечениях турбулентного пограничного слоя, из второго следует выражение рейнольдсова числа

$$\mathrm{Re}_c^{**} = \left\{\int_0^{y_{*n}} \dot{\Phi}_* \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} \cdot \left[1 - \left\{\int_{y_{kcn}}^{\infty} \dot{\Phi}_{kc} \left(1 - \dot{\Phi}_{kc}\right) dy_{kc}\right\}\right]^{-1} \tag{4.9}$$

Те же соотношения в диффузорном участке усложняются возникновением третьего интегрального слагаемого, относящегося к стрэтфордскому участку, расположенному, как это следует из двухъярусной схемы [1], между прандтлевским и кармановским.

Найдем аналогично предыдущему

$$H_d = \frac{\delta_d^*}{\delta_d^{**}} = \left\{\int_0^{y_{*m}} \left(1 - \frac{u}{v_*}\frac{v_*}{U}\right) d\frac{yv_*}{\nu}\right\} \frac{\nu}{U\delta_d^{**}}\frac{U}{v_*} +$$

$$+ \left\{\int_{y_{sm}}^{y_{sn}} \left(1 - \frac{u}{v_s}\frac{v_s}{v_*}\frac{v_*}{U}\right) d\frac{yv}{\nu}\right\} \frac{\nu}{U\delta_d^{**}}\frac{U}{v_*}\frac{v_*}{v_s} + \left\{\int_{y_{kdn}}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta_d^{**}}\right\} \tag{4.10}$$

$$1 = \left\{\int_0^{y_{*m}} \frac{u}{v_*}\frac{v_*}{U} \left(1 - \frac{u}{v_*}\frac{v_*}{U}\right) d\frac{yv_*}{\nu}\right\} \frac{\nu}{U\delta_d^{**}}\frac{U}{v_*} +$$

$$+ \left\{\int_{y_{sm}}^{y_{sn}} \frac{u}{v_s}\frac{v_s}{v_*}\frac{v_*}{U} \left(1 - \frac{u}{v_s}\frac{v_s}{v_*}\frac{v_*}{U}\right) d\frac{yv_*}{\nu}\right\} \frac{\nu}{U\delta_d^{**}}\frac{v_*}{v_s}\frac{U}{v_*} +$$

$$+ \left\{\int_{y_{kdn}}^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\frac{y}{\delta_d^{**}}\right\} \tag{4.11}$$

$$H_d = \frac{\delta_d^*}{\delta_d^{**}} = \frac{1}{\mathrm{Re}_d^{**}\sqrt{1/2c_f}}\left\{\int_0^{y_{*m}} \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\,\dot{\Phi}_*\right) dy_*\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}_d^{**}\sqrt{c_f/2\pi_s}}\left\{\int_{y_{sm}}^{y_{sn}} \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\,\dot{\Phi}_s\right) dy_s\right\} + \left\{\int_{y_{kdn}}^{\infty} (1 - \dot{\Phi}_{kd}) dy_{kd}\right\} \tag{4.12}$$

$$1 = \frac{1}{\mathrm{Re}_d^{**}} \left\{ \int_0^{y_{*m}} \dot{\Phi}_* \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\, \dot{\Phi}_* \right) dy_* \right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi_s}}{\mathrm{Re}_d^{**}} \left\{ \int_{y_{sm}}^{y_{sn}} \dot{\Phi}_s \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\, \dot{\Phi}_s \right) dy_s \right\} + \left\{ \int_{y_{kdn}}^{\infty} \dot{\Phi}_{kd}(1 - \dot{\Phi}_{kd}) dy_{kd} \right\} \tag{4.13}$$

Из последнего равенства непосредственно следует

$$\mathrm{Re}_d^{**} = \left\{ \int_0^{y_{*m}} \dot{\Phi}_* \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2}}\, \dot{\Phi}_* \right) dy_* \right\} + \sqrt{\pi_s} \int_{y_{sm}}^{y_{sn}} \dot{\Phi}_s \left(1 - \sqrt{\frac{c_f}{2\pi_s}}\, \dot{\Phi}_s \right) dy_s \times$$

$$\times \left[1 - \left\{ \int_{y_{kdn}}^{\infty} \dot{\Phi}_{kd}(1 - \dot{\Phi}_{kd}) dy_{kd} \right\} \right]^{-1} \tag{4.14}$$

Параметр β (1.9) будет также иметь два значения β_c и β_d в зависимости от того, к какому участку пограничного слоя он относится: к конфузорному или диффузорному. Наличие формул (4.7) для H_c и (4.12) для H_d позволяет найти связь между β_c, β_d и p_*. Составим отношение

$$\frac{\beta}{p_*} = \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dp}{dx} \left(\frac{\nu}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx} \right)^{-1} = \frac{v_* \delta^*}{\nu} = \frac{v_*}{U} \frac{U\delta^{**}}{\nu} \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}\, \mathrm{Re}^{**} H$$

Из последнего следуют раздельно по конфузорному и диффузорному участкам равенства

$$\beta_i = H_i \mathrm{Re}_i^{**} \sqrt{\frac{c_f}{2}}\, p_* \quad (i = c, d) \tag{4.15}$$

Составленные в предыдущем и настоящем пункте равенства, связывающие между собой значения переменных и параметров по обе стороны разреза в плоскости течения, и дополнительные соотношения образуют систему со многими неизвестными неявного вида. Численное решение этой системы и его представление должны быть предметом последующих исследований, основанных на теоретической схеме, изложенной в настоящей статье.

Можно указать путь значительного упрощения постановки и численного решения задачи. Пользуясь тем, что, согласно двухъярусной схеме турбулентного ядра, течению с малым p_* будет соответствовать сравнительно тонкая стрэтфордская область, которой, вероятно, можно будет пренебречь, приняв за ординату границы между подобластями y_n значение y_m [1], и аналогично при малых π_s (больших p_*) пренебречь вблизи сечения отрыва пограничного слоя тонким прандтлевским слоем.

Все содержание настоящего и предыдущего разделов относится лишь к первому, параметрическому этапу, когда в отсутствие влияния абсциссы x остается открытым вопрос о распределении значений параметров и переменных по отдельным сечениям. Это является целью второго этапа, обобщающего решение по обеим, внутренней и внешней, подобластям и выполняющего персонификацию решений первого этапа по отдельным конкретным сечениям пограничного слоя при заданном распределении скорости на внешней границе $U(x)$ или давления $p(x)$.

5. Второй, завершающий расчет этап метода. По сравнению с первым, сравнительно сложным с вычислительной стороны этапом расчета, сводящимся к наполнению заранее заготовленных таблиц, одинаковых для всех частных примеров расчета, второй этап крайне прост. Он состоит из применения известного «интегрального условия Кармана», одинаково справедливого как для ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя.

Воспользуемся этим уравнением в виде формул (111) и (113) как и на с. 535 учебника [8], с той лишь разницей, что в случае турбулентного пограничного слоя параметр ζ будет равен

$$\zeta = \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})}\Big|_{y=0} = \frac{\delta^{**}}{\mu U}\tau_w = \frac{\delta^{**}}{\mu U}\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}\frac{1}{2}\rho U^2 =$$

$$= \frac{U\delta^{**}}{\nu}\frac{c_f}{2} = \mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2} \tag{5.1}$$

Считая, что Re^{**}, c_f и H на первом этапе были выражены через параметр f, а следовательно, F является известной функцией f, сведем расчет к интегрированию нелинейного уравнения в полных производных первого порядка

$$\frac{df}{dx} = 2\frac{U'}{U}\left[\mathrm{Re}^{**}\frac{c_f}{2} - (2+H)f\right] + \frac{U''}{U'}f \tag{5.2}$$

$$\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{Re}_c^{**}, \mathrm{Re}_d^{**}, \quad H = H_c, H_d, \quad f = f_c, f_d$$

Граничными условиями будут служить: $f = f_0$ $(x = 0)$ при отсутствии в лобовой части крылового профиля ламинарного участка, и $f = f_*$ $(x = x_*)$ при наличии точки перехода ламинарного слоя к турбулентному с абциссой x_*.

Если, согласно структуре функции $F(f)$, использовать линейное приближение $F = a - bf$, где постоянные a и b определить по способу наименьших квадратов, то уравнение (5.2) примет линейный вид и сведется к простой квадратуре

$$\frac{df}{dx} = a\frac{U'}{U} - \left(b\frac{U'}{U} - \frac{U''}{U'}\right)f, \quad f = \frac{U'}{U^b}\left(a\int_0^x U^{b-1}\,dx + C\right)$$

Следует различать два случая.

1. Ламинарный участок в передней части крылового профиля отсутствует. Тогда из условия конечности f при $x = 0$, $U = 0$ будет следовать $C = 0$.

2. Ламинарный участок в лобовой части крылового профиля существует в интервале абсцисс $0 \le x \le x_*$. В этом случае $C \ne 0$. Исключим C и найдем выражение f в случае наличия точки перехода

$$f(x)\frac{U^b}{U'} = a\int_0^x U^{b-1}\,dx + C, \quad f_*\frac{U_*^b}{U_*'} = a\int_0^{x_*} U^{b-1}\,dx + C$$

$$f(x) = \frac{U'}{U^b}\left(a\int_{x_*}^x U^{b-1}\,dx + f_*\frac{U_*^b}{U_*'}\right)$$

где f_* рассчитывается по теории ламинарного пограничного слоя, а x_* задается рядом своих возможных значений или берется из опыта.

6. Заключение. Предлагаемый в настоящей статье метод расчета конкурирует с методом непосредственного численного интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в частных производных для каждой отдельной задачи [6, 7] с непременным заданием решения в точке перехода. При этом сохраняется необходимость раздельного задания законов турбулентного трения Прандтля и Клаузера для внутренней и внешней подобластей и сращивания решений по этим подобластям.

Предлагаемый метод обладает рядом преимуществ, очевидных из опыта расчета ламинарного слоя. Во-первых, универсальность метода, сводящая решение всех задач турбулентного пограничного слоя к использованию один раз и навсегда составленных таблиц; во-вторых, само одноразовое составление этих таблиц

требует численного интегрирования дифференциальных уравнений в полных, а не в частных производных, что гораздо проще; в-третьих, после изготовления таблиц расчет сведется к их использованию и простым квадратурам, что при практическом решении отдельных задач устраняет численное интегрирование дифференциальных уравнений.

К недостаткам метода можно отнести ограниченность точности его применения к задачам с малыми или большими p_*. Проверка метода сравнением с опытными данными может быть произведена после того, как будет закончено численное интегрирование универсальных уравнений внешней подобласти на первом этапе. Напомним, что для внутренней подобласти это уже выполнено в статье [1]. Первые результаты решения простейших задач (турбулентный пограничный слой на пластине) дают надежду на успешное применение метода обобщенного подобия в более сложных случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л. Г.* Метод обобщенного подобия в расчетах внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 25—34.
2. *Falkner V. M., Skan S. W.* Solutions of the boundary-layer equations//Phil. Mag. Ser. 7. 1931. V. 12. № 80. P. 865—896.
3. *Hartree D. R.* On an equation occuring in Falkner-Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1937. V. 33. Pt 2. P. 223—239.
4. *Клаузер Ф.* Турбулентный пограничный слой//Проблемы механики. Вып. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. С. 297—340.
5. *Klebanoff P. S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient//NACA, 1955. № 1247. 19 p.
6. *Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.* Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев//Теплофиз. высоких температур. 1985. Т. 23. № 3. С. 522—529.
7. *Bradshaw P., Cebeci T., Whitelaw J. H.* Engineering calculation methods for turbulent flow. London: Acad. Press, 1981. P. 43, 110, 111.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
9. *Лойцянский Л. Г.* Метод обобщенного подобия в теории турбулентного пограничного слоя//Гидрогазодинамика. Л.: Изд-во Ленингр. гос. техн. ун-та, 1990. С. 4—24.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
10.III.1992