

УДК 532.526.2

© 1993 г. Г. Л. КОРОЛЕВ, Вик. В. СЫЧЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБТЕКАНИЯ ЗАДНЕЙ ОКОНЕЧНОСТИ ТОНКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Рассмотрено стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около тонкого осесимметричного тела. Исследована структура ближнего следа и пограничного слоя вблизи его задней оконечности. Установлена связь между максимальной относительной толщиной тела и формой его кормовой части, при которых в некоторой ее малой окрестности лежит область взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. Получено численное решение краевой задачи для этой области.

Согласно результатам асимптотической теории [1, 2] обтекания плоскопараллельным потоком вязкой несжимаемой жидкости пластины конечной длины при больших числах Рейнольдса R в окрестности ее задней кромки лежит область взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потенциальным потоком. В этой области действует большой самоиндуцированный градиент давления. Дальнейшее развитие [3, 4] этой теории позволило установить зависимость между относительной толщиной тела h ($h(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$) и формой его задней кромки, при которых в вязком подслое в области взаимодействия возникает зона рециркуляционного течения [5–7]. Так, если задняя кромка имеет степенную форму и m — показатель степени, то $h = O(R^{-(5-3m)/8})$, $0 \leq m < 5/3$.

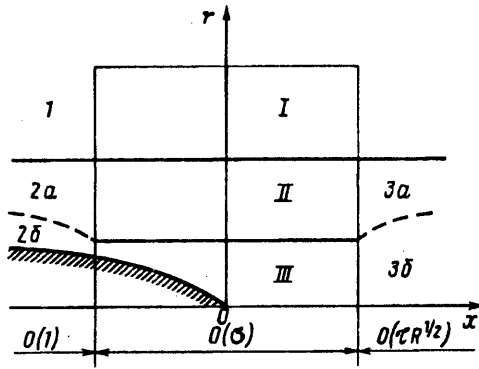
Что касается соответствующих осесимметричных течений, то к настоящему времени исследована [8, 9] их структура для тел, имеющих радиус порядка толщины пограничного слоя, т. е. порядка $R^{-1/2}$. Данная работа посвящена изучению обтекания тонких тел вращения также со степенной формой задней оконечности, но с толщинами большими по порядку величины, чем $R^{-1/2}$, и установлению предельных значений толщины в зависимости от показателя степени, при которой возникает взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потоком. Такие режимы являются промежуточными между безотрывными и отрывными с образованием развитых зон возвратного течения.

1. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого тела вращения, помещенного в однородный набегающий поток под нулевым углом атаки. Пусть l — продольный размер тела, u_∞ , p_∞ — скорость и давление в набегающем потоке, ρ — плотность жидкости, lx , lr , θ — цилиндрические координаты, $u_\infty u$, $u_\infty v$ и $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$ — соответствующие проекции вектора скорости и давление, $l^2 u_\infty \psi$ — функция тока; ось x совпадает с осью симметрии тела, а начало системы координат — с его задней оконечностью. Число Рейнольдса $R = u_\infty l / \nu$, где ν — кинематическая вязкость жидкости. В качестве независимых переменных будем использовать x и $y = r^2/2$. Система уравнений Навье — Стокса при этом имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{V^2}{2y} + 2y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = rv = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



Фиг. 1

Обозначим через $r_w(x)$, $-1 \leq x \leq 0$, форму поверхности тела вращения. Относительно характерной толщины $\tau = \tau(R)$ будем предполагать, что она по порядку величины больше толщины пограничного слоя, т. е. $\tau \rightarrow 0$ и $\tau > O(R^{-1/2})$ при $R \rightarrow \infty$. Кроме того, предположим, что тело имеет кормовую часть степенной формы, например

$$r_w = \sqrt{2a} (-x)^n (x+1)^{1/2}$$

и тогда при $x \rightarrow -0$

$$r_w = \sqrt{2a} (-x)^n + o(|x|^n), \quad f_w = r_w^2/2, \quad n > 0 \quad (1.2)$$

При $R \rightarrow \infty$ в поле течения, как обычно, можно выделить две характерные области: внешнего потенциального потока I (фиг. 1) и вязкого пограничного слоя вблизи поверхности тела и следа за ним. Во внешней области, где $x = O(1)$, $y = O(1)$, в соответствии с теорией малых возмущений для осесимметричных течений [10] решение имеет вид

$$u = 1 + \tau^2 u_1(x, y) + o(\tau^2), \quad V = \tau^2 V_1(x, y) + o(\tau^2) \\ p = \tau^2 p_1(x, y) + o(\tau^2); \quad u_1 = -p_1 \quad (1.3)$$

$$p_1 = -\frac{1}{2} f_w''(x) \ln y + O(1), \quad V_1 = f_w'(x) + O(y \ln y); \quad y \rightarrow 0$$

В области пограничного слоя справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$y = \tau^2 f_w(x) + \tau R^{-1/2} Y, \quad \psi = \tau R^{-1/2} \Psi \\ \Psi = \Psi_0(x, Y) + \tau^2 \ln \tau^{-1} \Psi_1(x, Y) + \tau^{-1} R^{-1/2} \Psi_2(x, Y) + \dots \quad (1.4)$$

$$p = \tau^2 \ln \tau^{-1} P_1(x, Y) + O(\tau^2)$$

из сращения которого с разложением (1.3) следует, что при $Y \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} \rightarrow -f_w''(x), \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow f_w''(x) \quad (1.5)$$

Появление члена с $\Psi_2(x, Y)$ в (1.4) обусловлено (см. (1.6)) осесимметричностью течения, которая в сущности не проявляется в главном приближении, так как $\tau > O(R^{-1/2})$.

В результате подстановки (1.4) в (1.1) получим

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial Y^2} = 2f_w(x) \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial Y^3}$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x \partial Y} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial Y} \frac{\partial \Psi_k}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial Y^2} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} = H_k + 2f_w(x) \frac{\partial^3 \Psi_k}{\partial Y^3} \quad (1.6)$$

$$H_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad H_2 = 2Y \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial Y^3} + 2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial Y} = 0; \quad k = 1, 2$$

$$Y = 0: \quad \Psi_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} = \Psi_k = \frac{\partial \Psi_k}{\partial Y} = 0$$

Здесь также выписаны краевые условия прилипания на поверхности тела.

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1.6), (1.5) при $x \rightarrow -0$.

Решение для $\Psi_0(x, Y)$, как известно, с помощью преобразования Степанова — Манглера сводится к решению Блазиуса, описывающего течение в пограничном слое при обтекании пластины

$$\Psi_0 = \sqrt{s} F_0 \left(\frac{Y}{\sqrt{s}} \right), \quad s(x) = 2 \int_{-1}^x f_w(x) dx$$

$$2F_0''' + F_0 F_0'' = 0, \quad F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) = 1$$

Тогда при $x \rightarrow -0$

$$\Psi_0 = \Psi_{00}(Y) + O(|x|^{2n+1})$$

$$\Psi_{00} = \sqrt{s_0} F_0 \left(\frac{Y}{\sqrt{s_0}} \right), \quad s_0 = s(0) \quad (1.7)$$

$$\Psi_{00} = \frac{a_0}{2} Y^2 + O(Y^3), \quad a_0 = \frac{0,3321}{\sqrt{s_0}}; \quad Y \rightarrow 0$$

Градиент давления, согласно (1.2), (1.5), (1.6), имеет особенность $x = -0$, поэтому, как и для плоских течений (см. [5]), для удовлетворения условию прилипания вблизи поверхности тела необходимо ввести «вязкий» подслой (область 2б). Исходя из баланса инерционных и «вязких» членов с градиентом давления в уравнении (1.6) для $\Psi_1(x, Y)$ представим решение здесь в виде

$$\Psi_0 = (-x)^{2\alpha} f_0(\eta) + O(|x|^{5\alpha}), \quad f_0 = \frac{a_0}{2} \eta^2; \quad \Psi_1 = (-x)^\beta f_1(\eta) + o(|x|^\beta) \quad (1.8)$$

$$\eta = \frac{Y}{(-x)^\alpha}, \quad \alpha = \frac{2n+1}{3}, \quad \beta = 2n-2$$

Вид решения для $\Psi_0(x, Y)$ следует из (1.7). В результате подстановки этого представления в (1.6) приходим к уравнению

$$\frac{2a}{a_0} f_1''' - \alpha \eta^2 f_1'' + \beta \eta f_1' - \beta f_1 = d_1 \quad (1.9)$$

$$d_1 = -2n(2n-1)(2n-2) a a_0^{-1}$$

Аналогично строится решение уравнения в (1.6) при $k=2$

$$\Psi_2 = (-x) f_2(\eta) + o(|x|) \quad (1.10)$$

$$\frac{2a}{a_0} f_2''' - \alpha \eta^2 f_2'' + \eta f_2' - f_2 = d_2, \quad d_2 = -2$$

Кроме условий прилипания $f_k(0) = f'_k(0) = 0$ решения уравнений (1.9), (1.10) должны удовлетворять условиям отсутствия экспоненциального роста при $\eta \rightarrow \infty$, что необходимо для сращивания с разложением в основной части пограничного слоя (область 2а), где $Y = O(1)$. Эти решения могут быть выписаны в явном виде через вырожденные гипергеометрические функции и поэтому при $\eta \rightarrow \infty$

$$f_1 = A_0 \eta^{\beta/\alpha} + A_1 \eta + O(1), \quad \alpha \neq \beta; \quad f_1 = A_0^* \eta \ln \eta + O(\eta), \quad \alpha = \beta \quad (1.11)$$

$$f_2 = B_0 \eta^{1/\alpha} + B_1 \eta + O(1), \quad \alpha \neq 1$$

$$f_2 = B_0^* \eta \ln \eta + O(\eta), \quad \alpha = 1$$

$$A_0 = -d_1 m_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\lambda-2\beta} \frac{\alpha^2}{\beta(\beta-\alpha)}, \quad A_1 = -d_1 m_1 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\lambda}$$

$$A_0^* = -d_1 m_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\lambda-2\beta}, \quad m_0 = \frac{1}{(36\alpha)^{1/3}} \left(\frac{6}{\alpha}\right)^{\lambda} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(2/3)}$$

$$m_1 = \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(\lambda - 1/3)}{3(6\alpha^2)^{1/3} \Gamma(\lambda + 1/3)}, \quad \lambda = \frac{2\alpha - \beta}{3\alpha}$$

где B_0, B_1, B_0^* совпадают соответственно с A_0, A_1, A_0^* , если в последних положить $\beta = 1, d_1 = -2$. Заметим, что при $n = 1/2$ и 1 значение $d_1 = 0$ и решение уравнения (1.9) вырождается: $f_1(\eta) = 0$.

Переходя в (1.8), (1.10), (1.11) от η к внешней переменной Y , определяем вид решения в основной части пограничного слоя при $x \rightarrow -0$. Так, например, при $0 < \beta < \alpha$ $\Psi_1 = (-x)^{\beta-\alpha} \Psi_{10}(Y) + O(1)$ и в результате подстановки этого разложения вместе с (1.7) в (1.6) и последующего сращивания при $\eta \rightarrow \infty$ и $Y \rightarrow 0$ находим, что $\Psi_{10} = (A_1 a_0^{-1}) \Psi_{00}'(Y)$. Таким образом, при подходе к задней оконечности тела решение ведет себя особым образом. Это означает, что в некоторой малой окрестности сечения $x = 0$ лежит область, где полученное решение становится несправедливым. Перейдем к построению решения в этой области.

2. Из выражений (1.2) для $f_w(x)$ и (1.4) для u следует, что при $x = O(\sigma_0)$, $\sigma_0 = (\tau R^{1/2})^{-1/2n}$ в основной части пограничного слоя уже в главном приближении проявляется осесимметричность течения. Однако эта область промежуточная и носит второстепенный характер. Дело в том, что взаимодействие течения в пограничном слое с внешним потоком здесь отсутствует. Решение в этой области представляет собой переразложение полученного решения при $x \rightarrow -0$ через переменную $x^* = \sigma_0^{-1} x$. Поэтому введем в рассмотрение область с продольным размером $x = O(\sigma)$, $\sigma < O(\sigma_0)$. Представляет интерес рассмотреть прежде всего течение при таких характерных толщинах $\tau(R)$, когда в «вязком» пристеночном подслое (область III на фиг. 1) было бы существенным действие градиента давления. Это означает, что при $x = O(\sigma)$ все три главных члена разложения (1.4), (1.8), (1.10) для пристеночной области 2б должны становиться одного порядка.

На основании сказанного и в силу малости изменений давления при $x = O(\sigma)$ в основной части пограничного слоя (область II) $\Psi = \Psi_0^*(Z) + o(1)$, $u = \tau R^{-1/2} Z$. В области III, согласно (1.4), (1.2), $u = O(\tau^2 \sigma^{2n})$ и, вспоминая выражение (1.7) для $\Psi_{00}(Y) = \Psi_0^*(Z)$ при $Y \rightarrow 0$, находим, что здесь $\Psi = O(\tau^2 \sigma^{4n} R)$.

Таким образом, решение в области III может быть представлено в виде

$$x = \sigma x^*, \quad y = \tau^2 \sigma^{2n} Y^*, \quad \psi = \tau R^{-1/2} \Psi$$

$$\Psi = \tau^2 \sigma^{4n} R \Psi^* (x^*, Y^*) + o(\tau^2 \sigma^{4n} R) \quad (2.1)$$

$$p = \Delta_0 P^* (x^*, Y^*) + o(\Delta_0)$$

Подставляя это разложение в (1.1) и приравнявая порядки величин градиента давления и инерционных и «вязких» членов, находим

$$\Delta_0 = \tau^2 \sigma^{4n} R, \quad \tau = \sigma^{(1-4n)/3} R^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^* \partial Y^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}} + \frac{dp^*}{dx^*} = 2Y^* \frac{\partial^3 \Psi^*}{\partial Y^{*3}} + 2 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}}, \quad P^* = p^* (x^*) \quad (2.2)$$

$$Y^* = f_w^* (x^*), \quad x^* < 0: \quad \Psi^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial Y^*} = 0$$

$$Y^* = 0, \quad x^* > 0: \quad \Psi^* = 0, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial Y^{*2}} \right| < \infty$$

Здесь выписаны также краевые условия прилипания на поверхности тела и обычные условия на оси симметрии следа:

$$\partial u / \partial r = v = 0 \text{ при } r = 0, x > 0.$$

Из сращения с основной частью пограничного слоя следует, что при $Y^* \rightarrow \infty$

$$\Psi^* = \frac{a_0}{2} Y^{*2} + \chi^* (n, Y^*) + A^* (x^*) Y^* + o(Y^*) \quad (2.3)$$

Вид функции $\chi^* (n, Y^*)$ определяется условиями вверх по потоку. Действительно, из сращения с решением в области 2б следует, что при $x^* \rightarrow -\infty$

$$\Psi^* \rightarrow (-x^*)^{2\alpha} \frac{a_0}{2} \eta^{*2} + (-x^*)^\beta f_1^* (\eta^*) + (-x^*) f_2^* (\eta^*) \quad (2.4)$$

$$\eta^* = \frac{Y^* - f_w^* (x^*)}{(-x^*)^\alpha}, \quad f_w^* \rightarrow a (-x^*)^{2n}, \quad p^* \rightarrow a 2n (2n - 1) (-x^*)^{2n-2}$$

где $f_1^* (\eta^*)$ и $f_2^* (\eta^*)$ удовлетворяют уравнениям вида (1.9) и (1.10), причем $1/4 < n < 4$ (смысл этого условия будет выяснен ниже). Переходя в разложениях (1.11) к переменной Y^* , на основании (2.4) и (2.3) находим, что

$$x^* \rightarrow -\infty: \quad A^* \rightarrow -a a_0 (-x^*)^{2n}$$

$$\chi^* = B_0 Y^{*1/\alpha} \quad (1/2 < n < 1), \quad \chi^* = B_0^* Y^* \ln Y^* \quad (n = 1)$$

$$\chi^* = 0 \quad (1 < n < 7/4), \quad \chi^* = A_0^* Y^* \ln Y^* \quad (n = 7/4) \quad (2.5)$$

$$\chi^* = A_0 Y^{*\beta/\alpha} \quad (7/4 < n < 5/2)$$

При $n \leq 1/2$ и $n \geq 5/2$ для определения $\chi^* (n, Y^*)$ необходимо учитывать следующие члены в разложении (2.4).

Рассмотрим течение в основной части пограничного слоя (область II). Переходя в (2.1), (2.3), (2.5) к внешней переменной Z , получаем, что в этой области

$$\Psi = \Psi_0^*(Z) + \Phi_0(n, R, Z) + \Delta_0^{1/2} \Psi_1^*(x^*, Z) + o(\Delta_0^{1/2}) \quad (2.6)$$

$$p = \Delta_0 p_0^*(x^*, Z) + o(\Delta_0), \quad y = \tau R^{-1/2} Z$$

Вид функции $\Phi_0(n, R, Z)$ определяется путем перераспределения $\chi^*(n, Y^*)$. Так, например, при $1/2 < n < 1$:

$$\Phi_0 = (\tau \sigma^{2n} R^{1/2})^c \Psi_{01}(Z), \quad c = (4n - 1)/(2n + 1).$$

Подставив (2.6) в (1.1) и произведя сравнение с (2.1), находим

$$\Psi_1^* = a_0^{-1} A^*(x^*) \Psi_0^{*'}(Z), \quad P_0^* = p^*(x^*) \quad (2.7)$$

Для замыкания задачи в области взаимодействия рассмотрим область I внешнего потенциального потока. Здесь, как обычно, течение описывается уравнениями теории малых возмущений [10]

$$x = \sigma x^*, \quad y = \sigma^2 y^*; \quad u = 1 + \varepsilon u_1^*(x^*, y^*) + o(\varepsilon)$$

$$V = \sigma \varepsilon V_1^*(x^*, y^*) + o(\sigma \varepsilon), \quad p = \varepsilon p_1^*(x^*, y^*) + o(\varepsilon) \quad (2.8)$$

$$y^* \rightarrow 0: \quad -u_1^* = p_1^* = -1/2 S''(x^*) \ln y^* + O(1); \quad V_1^* = S'(x^*) + O(y^* \ln y^*)$$

В результате срачивания разложений (2.6), (2.7) и (2.8) при $Z \rightarrow \infty$ и $y^* \rightarrow 0$ получим

$$\varepsilon = \tau \sigma^{-2} \Delta_0^{1/2} R^{-1/2}, \quad \Delta_0 = \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2 R^{1/2}}{\tau} \right) \quad (2.9)$$

$$p^*(x^*) = S''(x^*) = -a_0^{-1} A^{*''}(x^*)$$

Последнее соотношение, которое, как и следовало ожидать, совпадает с соответствующим соотношением теории взаимодействия для осесимметричных течений [11—13], дает недостающую связь между изменениями давления и площади трубок тока. Наконец, из системы уравнений (2.2), (2.9) для малых параметров находятся размер области взаимодействия и порядки величин давления и толщины тела

$$\sigma = \sigma^* = O((R^{-1} \ln R)^{1/2(n+1)}), \quad \Delta_0 = \Delta^* = O((R^{-1} \ln R)^{(2n+1)/3(n+1)}) \quad (2.10)$$

$$\tau = \tau^* = O(R^{-(4-n)/6(n+1)} (\ln R)^{(1-4n)/6(n+1)})$$

Из этих выражений следует, что $n > 1/4$, так как $\tau > O(R^{-1/2})$. При $n = 1/4$ значения $\tau^* = O(R^{-1/2})$ и $\sigma^* = O(R^{-1} \ln R)^{2/3}$ совпадают с полученными в [8]. С другой стороны, рассматриваемый режим течения имеет место, если только $n < 4$. Действительно, из (1.4)—(1.6) получаем, что градиент давления в области III $p_x = O(\pi_0)$, $\pi_0 = \tau^2 \sigma^{2n-3} \ln \tau$, а из (2.1), (2.2) находим порядок инерционных членов: $uu_x = O(\mu_0)$, $\mu_0 = \tau^2 \sigma^{4n-1} R$. Сравнивая эти выражения с учетом (2.2), заключаем, что для $R^{-1/2} < O(\tau) < 1$ при $n \geq 4$ значение $\mu_0 > O(\pi_0)$. Это же неравенство имеет место и при $\tau < O(\tau^*)$, когда $1/4 < n < 4$. Таким образом, взаимодействие имеет место при $\tau = \tau^*$ и $1/4 < n < 4$, а при $n \geq 4$ и при $\tau < O(\tau_*)$ градиент давления не входит в уравнение (2.2), как и при $\tau = R^{1/2}$, $1/3 < n < 1/2$ [8]. В этом состоит одно из главных отличий от соответствующих плоских течений [1—7].

3. Перейдем к рассмотрению течения в следе за телом. Следуя [1, 2, 14], на основании (2.3) и баланса инерционных и «вязких» членов в уравнении (2.2) представим решение в области III при $x^* \rightarrow \infty$ в виде

$$\Psi^* = x^* g_0(t) + o(x^*), \quad p^* = o(x^*), \quad t = \frac{Y^*}{x^{*1/2}} \quad (3.1)$$

Подставляя это разложение в (2.2) и удовлетворяя условиям сращивания с решением в области II, получим

$$2tg_0''' + (g_0 + 2)g_0'' - \frac{1}{2}g_0'^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$g_0(0) = 0, \quad |g_0''(0)| < \infty, \quad g_0''(\infty) = a_0$$

Решение этой задачи, так же как и соответствующих задач для плоских течений [15, 16] (см. также [17]), не единственно. Причем в данном случае оно находится в явном виде

$$g_0 = \frac{a_0}{2}t^2 + b_0t, \quad b_0 = \pm 2a_0^{1/2} \quad (3.3)$$

Скорость на оси симметрии $\Psi_{Y^*=0}^* \rightarrow b_0x^{*1/2}$, $x^* \rightarrow \infty$, т. е. второе решение ($b_0 < 0$) соответствует течению с возвратными токами. Как и в случае плоских течений (см. [16]), смысл этого решения пока не ясен. Нетрудно убедиться, что других решений задача (3.2) не имеет. Действительно, в силу регулярности решения в окрестности $t = 0$ оно представимо здесь в виде $g_0 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m t^m$, а в результате подстановки этого ряда в (3.2) получаем, что $c_m = 0$ при $m > 2$.

Используя полученное решение (3.1), (3.3) и (2.3), (2.9), находим, что при $x^* \rightarrow \infty$

$$A^* \rightarrow b_0x^{*1/2}, \quad p^* \rightarrow \frac{b_0}{4a_0}x^{*-3/2} \quad (3.4)$$

Обратимся к рассмотрению течения в ближнем следе. Согласно (2.6), его радиус есть величина порядка $\tau^{1/2}R^{-1/4}$ и продольная составляющая $\psi_y = O(1)$. Поэтому на основании баланса инерционных и «вязких» членов в (1.1) определяем характерный продольный масштаб следа: $x = O(\tau R^{1/2})$. Таким образом, решение в следе имеет вид

$$x = \tau R^{1/2}X, \quad y = \tau R^{-1/2}Z$$

$$\psi = \tau R^{-1/2}\Psi^{\circ}(X, Z) + o(\tau R^{-1/2}) \quad (3.5)$$

$$p = O(\tau^{-1}R^{-3/2} \ln R)$$

Порядок величины давления находится на основании выражений (2.1), (2.10) и (3.4) или путем рассмотрения области внешнего потенциального течения, где справедлива теория малых возмущений. Подставив (3.5) в (1.1), приходим для функции $\Psi^{\circ}(X, Z)$ к уравнению вида (2.2), но без градиента давления. При $X \rightarrow +0$ и $Z = O(X^{1/2})$ (область 3б) решение (3.5) сращивается с (3.1), (3.3) и $\Psi^{\circ}(+0, Z) = \Psi_0^*(Z)$ (область 3а).

Таким образом, в отличие от соответствующих плоских течений [1—7], для которых известна дальняя асимптотика Толлмина для следа (см. [18]) имеет место при $x \rightarrow \infty$, в случае течения с осевой симметрией дальняя асимптотика [19, 20] справедлива при $X = (\tau R^{1/2})^{-1} x \rightarrow \infty$, т. е. на расстояниях, существенно

больших, так как $\tau R^{1/2} \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. Что же касается расстояний $x = O(1)$, то здесь, очевидно, решение определяется выражениями (3.1), (3.3), переписанными в соответствующих переменных.

4. Перейдем к описанию результатов численного решения краевой задачи для области взаимодействия.

После аффинных преобразований

$$x^* = a_0^{-3/5} X', \quad Y^* = a_0^{-4/5} Y', \quad \Psi^* = a_0^{-3/5} \Psi', \quad p^* = a_0^{2/5} P'$$

$$A^* = a_0^{1/5} A, \quad f_1^* = a_0^{3(\beta-1)/5} F_1, \quad f_2^* = F_2, \quad \eta^* = a_0^{(3\alpha-4)/5} \eta'$$

$$\eta' = (Y' - a^* |X'|^{2n}) |X'|^{-\alpha}, \quad a^* = a a_0^{2(2-3n)/5}$$

система соотношений (2.2)–(2.5), (2.9), (3.1), (3.3), (3.4) принимает вид

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{dP}{dX} = 2Y \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial Y}$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = - \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad P = - A''(X) \quad (4.1)$$

$$Y = a^* F_w(X), \quad X < 0: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0$$

$$Y = 0, \quad X > 0: \quad \Psi = 0, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right| < \infty$$

$$Y \rightarrow \infty: \quad \Psi = \frac{Y^2}{2} + \chi(n, Y) + A(X) Y + o(Y)$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad \Psi \rightarrow |X|^{2\alpha} \frac{\eta'^2}{2} + |X|^\beta F_1(\eta) + |X| F_2(\eta)$$

$$A \rightarrow -a^* |X|^{2n}, \quad P \rightarrow 2n(2n-1) a^* |X|^\beta$$

$$X \rightarrow \infty: \quad \Psi \rightarrow X \left(\frac{\zeta^2}{2} + 2\zeta \right), \quad \zeta = \frac{Y}{X^{1/2}}, \quad A \rightarrow 2X^{1/2}, \quad P \rightarrow \frac{1}{2X^{3/2}}$$

$$\chi = C_0 Y^{3/2} + O(Y \ln Y), \quad n = 1/2; \quad \chi = C_0 Y^{1/\alpha}, \quad (1/2 < n < 1)$$

$$\chi = C_0^* Y \ln Y, \quad n = 1; \quad \chi = 0, \quad 1 < n < 3/4$$

$$C_0^* = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{[\Gamma(1/3)]^2}{(6a^*)^{1/3}}, \quad \alpha = \frac{2n+1}{3}, \quad \beta = 2n-2$$

Здесь и ниже штрихи в обозначениях опущены. Постоянная $C_0 = 2m_0 \alpha^2 a^{*\lambda-2\alpha} (1-\alpha)^{-1}$, где m_0 и λ берутся из (1.11) при $\beta = 1$; a^* — параметр подобия задачи. Относительно формы поверхности тела будем полагать, что $F_w(X) = |X|^{2n}$ при все $X \leq 0$. При значениях $n = 1/2$ и 1, как уже отмечалось, $F_1(\eta) = 0$, поэтому при $X \rightarrow -\infty$

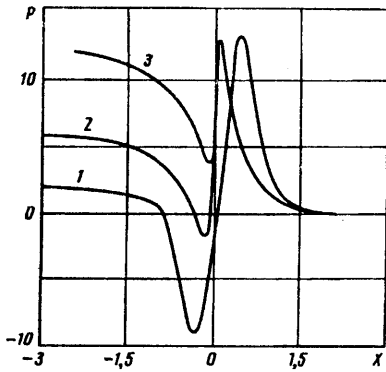
$$A = -a^* |X| + C_1 |X|^{1/3} + O(\ln |X|),$$

$$P = \frac{2}{9} C_1 |X|^{-5/3} + O(|X|^{-2}), \quad n = 1/2 \quad (4.2)$$

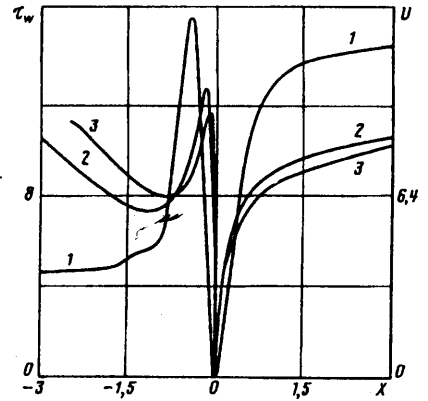
$$A = -a^* |X|^2 - C_0^* \ln |X| + O(1), \quad P = 2a^* + O(|X|^{-2}), \quad n = 1$$

Здесь $C_1 = 2m_1 a^{*-1/3}$ при $\alpha = 2/3$, $\lambda = 1/6$ в m_1 из (1.11).

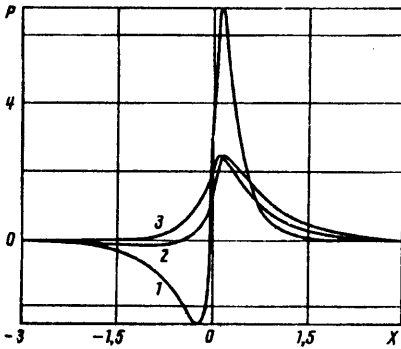
Для решения задачи использовался численный метод, подробно описанный в [21]. Этот метод основан на аппроксимации уравнений (4.1) конечно-разностной схемой второго порядка точности,



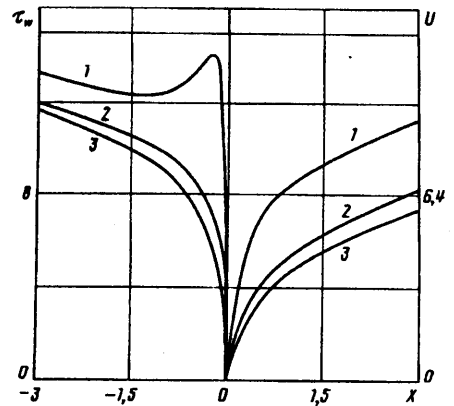
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

применении метода Ньютона для решения полученной нелинейной системы уравнений и использовании метода матричной прогонки для обращения матрицы Якоби на итерации.

Данный метод применен к расчету течения на неравномерной сетке с максимальным количеством узловых точек 81×51 и минимальным значением шага вблизи задней оконечности тела $\Delta X = 0,01$, $\Delta Y = 0,02$. Расчетная область заключалась в пределах $-50 \leq X \leq 20$, $0 \leq Y \leq 30$. В качестве нулевого приближения использовалось решение, полученное для значений a^* , меньших на единицу. Как правило, требовалось шесть — семь итераций для получения сходимости с точностью порядка 10^{-6} : $|\Delta U, \Delta P|'_{\max} < 10^{-6}$.

Проверка полученных результатов проводилась с помощью изменения максимального значения шага расчетной сетки по направлениям X , Y в 2 раза, а также путем изменения максимальных границ рассчитываемой области в 1,5 раза. Наибольшие отклонения наблюдались в области максимума давления и не превышали 4%.

Численное решение задачи (4.1), (4.2) получено для значений $n = 1$ и $1/2$.

На фиг. 2, 3 представлены распределения давления $P(X)$ и поверхностного трения $\tau_w(X)$ ($\tau_w = (2a^*)^{1/2} |X|^{2n} \partial^2 \psi / \partial Y^2$ при $Y = a^* |X|^{2n}$, $X < 0$) вместе с распределением скорости $U(X, 0)$, $X > 0$ на оси симметрии для $n = 1$ при $a^* = 1, 3, 6$ (соответственно кривые 1—3). В рассмотренном диапазоне изменения параметра подобия a^* течение оказалось безотрывным. Более того, как видно, с увеличением a^* минимальное значение трения $\tau_w(X)$ при $X < 0$ увеличивается, а область неблагоприятного (положительного) градиента давления сужается. Это означает, что для рассматриваемого режима течения отрыва при $n = 1$ в масштабах области взаимодействия, по-видимому, не происходит.

На фиг. 4 и 5 представлены распределения тех же функций для $n = 1/2$ при $a^* = 1, 2, 3$. С увеличением a^* область, где градиент давления положителен, расширяется, однако течение остается безотрывным. При дальнейшем увеличении a^* возникают вычислительные трудности, связанные с необходимостью увеличения размеров расчетной области.

Таким образом, в отличие от решений для соответствующих течений [5—7] и решения задачи для плоского течения вязкой струи в окрестности задней кромки [22], где условие взаимодействия имеет вид (4.1), по крайней мере в рассмотренном диапазоне изменения a^* течение остается безотрывным. Обращение величины поверхностного трения в нуль происходит лишь при $X = -0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate II//*Mathematika*. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106—121.
2. Messiter A. F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate//*SIAM J. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241—257.
3. Riley N., Stewartson K. Trailing edge flows//*J. Fluid Mech.* 1969. V. 39. Pt 1. P. 193—207.
4. Stewartson K. On laminar boundary layers near corners//*Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1970. V. 23. Pt 2. P. 137—152.
5. Рубан А. И. К асимптотической теории течения вблизи задней кромки тонкого профиля//Уч. зап. ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 1. С. 6—11.
6. Королев Г. Л. К асимптотической теории течения вблизи задней кромки эллиптического профиля//Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 4. С. 8—16.
7. Smith F. T., Merkin J. H. Triple-deck solutions for subsonic flow past humps, steps, concave or convex corners and wedged trailing edges//*Int. J. Comput. and Fluids*. 1982. V. 10. № 1. P. 7—25.
8. Bodonyi R. J., Smith F. T., Klwrick A. Axisymmetric flow past a slender body of finite length//*Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1985. V. 400. № 1818. P. 37—54.
9. Сычев Вук. В. О течении вблизи задней оконечности тонкого осесимметричного тела//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 10—18.
10. Adams M. C., Sears W. R. Slender-body theory — review and extension//*J. Aeronaut. Sci.* 1953. V. 20. № 2. P. 85—98.
11. Тригуб В. Н. Взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком при обтекании тонких осесимметричных тел//Уч. зап. ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 6. С. 8—17.
12. Klwrick A., Gittler P., Bodonyi R. J. Viscous-inviscid interactions on axisymmetric bodies of revolution in supersonic flow//*J. Fluid Meth.* 1984. V. 140. P. 281—301.
13. Тимошин С. Н. Ламинарное течение в окрестности линии излома поверхности удлиненного тела вращения//Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 5. С. 10—21.
14. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics//*Proc. Camb. Phil. Soc.* 1930. V. 26. Pt 1. P. 1—30.
15. Stewartson K. On the flow downstream of separation in an incompressible fluid//*Proc. Camb. Phil. Soc.* 1953. V. 49. Pt 3. P. 561—569.
16. Smith F. T. Non-uniqueness in wakes and boundary layers//*Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1984. V. 391. № 1800. P. 1—26.
17. Диевспров В. Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения//ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 403—414.
18. Berger S. A. Laminar wakes. N. Y.: Amer. Elsevier, 1971. 296 p.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.; Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
20. Berger S. A. The incompressible laminar axisymmetric far wake//*J. Math. and Phys.* 1968. V. 47. № 3. P. 292—309.
21. Королев Г. Л. Об одном методе решения задач асимптотической теории взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 8. С. 1224—1232.
22. Merkin J. H., Smith F. T. Free convection boundary layers near corners and sharp trailing edges//*ZAMP*. 1982. V. 33. № 1. P. 36—52.