

УДК 532.517.4

© 1993 г. А. Г. ГУМИЛЕВСКИЙ

## АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ И ЗАКОНЫ ВЫРОЖДЕНИЯ В СЛЕДАХ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ПО ИМПУЛЬСУ И МОМЕНТУ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В работах [1—4] экспериментально изучались законы вырождения средних и пульсационных скоростей в безимпульсных турбулентных следах при наличии и отсутствии закрутки. В [5, 6] проведено теоретическое исследование незакрученных безимпульсных следов, а в [7] — следов с ненулевым моментом количества движения. Однако за рамками данных исследований остаются турбулентные следы с нулевыми импульсом и моментом количества движения. Исследованию этого класса течений и посвящена данная работа.

1. Осесимметричные закрученные турбулентные следы будем описывать уравнениями Рейнольдса, записанными в приближении пограничного слоя и замкнутыми с помощью двухпараметрической модели турбулентности Лоундера — Джонса [8, 9]

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial r} + 2V \frac{\omega}{r} &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \\
 \omega^2 r &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\varepsilon}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) + P - e$$

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\varepsilon}{Pr_e} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{e}{k} (C_1 P - C_2 e)$$

$$P = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon r^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2$$

Здесь  $u = U_0 - U$  — отклонение средней продольной скорости жидкости от скорости спутного течения  $U_0$ ;  $\omega$  — средняя угловая скорость;  $V$  — средняя радиальная скорость;  $x, r$  — продольная и радиальная координаты;  $p, \rho$  — давление и плотность жидкости;  $k, e$  — энергия турбулентности и скорость ее диссипации;  $\varepsilon = C_\mu k^2 e^{-1}$  — турбулентная вязкость;  $P$  — генерация турбулентной энергии;  $C_1, C_2, C_\mu, Pr_k, Pr_e$  — константы.

Будем интересоваться автомодельными решениями системы (1.1)

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 \tau^{-\alpha} f_u(\xi), \quad \omega = \omega_0 \tau^{-\gamma} f_\omega(\xi) \\
 k &= k_0 \tau^{2\beta-2} f_k(\xi), \quad e = e_0 \tau^{2\beta-3} f_e(\xi)
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\tau = x e_0 U_0^{-1} k_0^{-1}, \quad \xi = r^2 e_0^2 k_0^{-3} \tau^{-2\beta}$$

где  $\tau$  — безразмерное время;  $\xi$  — автомодельная переменная. Функции  $f_u, f_\omega, f_k, f_e$  должны удовлетворять граничным условиям

$$f_u(0) = f_\omega(0) = f_k(0) = f_e(0) = 1$$

$$f_u(\infty) = f_\omega(\infty) = f_k(\infty) = f_e(\infty) = 0 \quad (1.3)$$

На больших расстояниях от тела в автомодельных переменных уравнения (1.1) имеют вид, аналогичный уравнениям работы [7]. Эти уравнения содержат безразмерные параметры  $\delta = \omega_0^2 k_0^3 e_0^{-2} U_0^{-1} u_0^{-1}$ ;  $\mu = u_0^2 k_0^{-1}$ ;  $\nu = \omega_0^2 k_0^2 e_0^{-2}$ ;  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $\gamma$ .

Первый параметр характеризует отношение характерной окружной скорости  $\omega_0 k_0^{1.5} e_0^{-1}$  к среднему геометрическому из скоростей  $U_0$  и  $u_0$ ; второй — отношение дефекта скорости к пульсационной скорости, а третий — отношение частоты вращения жидкости к частоте турбулентных пульсаций.

Поскольку члены уравнений (1.1) должны иметь одинаковый порядок, то справедливы неравенства

$$\alpha + \beta \geq 1, \quad \gamma \geq 1, \quad 2\gamma \geq \alpha + 2\beta \quad (1.4)$$

В безимпульсных следах с ненулевым моментом количества движения выполняется равенство  $\gamma = 4\beta$  [7]. Поэтому показатель роста толщины следов  $\beta \geq 0,25$ , причем знак равенства достигается, когда пульсационная скорость и средняя окружная скорость вырождаются одинаково, по закону  $x^{-3/4}$ . Следы с ненулевыми моментом и импульсом расширяются значительно, чем безимпульсные следы:  $\beta \geq 1/3$ . Знак равенства имеет место, когда дефект продольной скорости и пульсационная скорость вырождаются как  $x^{-2/3}$  [9].

Положим, что интегральный импульс и интегральный момент количества движения равны нулю

$$\int_0^\infty (f_u + 0,5\delta\tau^{\alpha+2(\beta-\gamma)}\xi f_e) d\xi = 0 \quad (1.5)$$

$$\int_0^\infty f_\omega \xi d\xi = 0$$

Эти условия выполняются, например, при равномерном поступательном движении тел, снабженных винтовым движителем.

2. Уравнения (1.1), записанные в автомодельной форме, интегральные равенства (1.5) и краевые условия (1.3) составляют нелинейную задачу на собственные значения. Неизвестными величинами являются:  $\alpha, \gamma, \beta, \delta, \mu, \nu$ . В отличие от работы [7], в которой исследуются следы с ненулевым моментом ( $\gamma = 4\beta$ ), параметр  $\gamma$  независим и должен определяться из решения краевой задачи.

Поставленную задачу легко решить, когда генерация турбулентной энергии в следе является асимптотически малой величиной ( $\gamma > 1, \alpha + \beta > 1$ ). В этом случае уравнения для функций  $f_k, f_e$  «отщепляются» и могут быть решены независимо. Последние при  $\beta = 1/4, C_2 = 2$  и  $Pr_k = Pr_e$  имеют решение вида

$$f_k = f_e = 1 - \frac{Pr_k}{8C_\mu} \xi; \quad \xi < \frac{8C_\mu}{Pr_k} \quad (2.1)$$

$$f_k = f_e = 0; \quad \xi \geq \frac{8C_\mu}{Pr_k}$$

Построенные решения соответствуют асимптотическому росту толщины следа

пропорционально  $x^{1/4}$ , вырождению энергии турбулентности и скорости ее диссипации по законам  $x^{-3/2}$  и  $x^{-5/2}$ .

Константы модели Лоундера — Джонса обычно принимаются следующими [8, 9]:  $C_\mu = 0,09$ ;  $C_1 = 1,44$ ;  $C_2 = 1,92$ ;  $Pr_k = 1$ ;  $Pr_\epsilon = 1,3$ . В выборе этих констант существует большая неопределенность [7]. В рамках этой «неопределенности» положим:  $C_2 = 2$ ;  $Pr_k = Pr_\epsilon = 1$ . При параболических распределениях (2.1) энергии турбулентности и скорости ее диссипации уравнения для продольной и угловой скоростей являются гипергеометрическими. Решения последних выражаются через полиномы Якоби и гипергеометрические функции [10]

$$f_\omega \equiv Q_n = \frac{1}{\xi(n+1)!} \left(1 - \frac{\xi}{8C_\mu}\right) \frac{d^n}{d\xi^n} \left[ \xi^{n+1} \left(1 - \frac{\xi}{8C_\mu}\right)^{n-1} \right], \quad \xi < 8C_\mu$$

$$f_\omega = 0, \quad \xi \geq 8C_\mu$$

$$f_u = A_1 \xi^{-\sqrt{2\alpha}} F\left(\sqrt{2\alpha}, \sqrt{2\alpha}, 1 + \sqrt{8\alpha}, \frac{8C_\mu}{\xi}\right) +$$

$$+ A_2 \xi^{\sqrt{2\alpha}} F\left(-\sqrt{2\alpha}, -\sqrt{2\alpha}, 1 - \sqrt{8\alpha}, \frac{8C_\mu}{\xi}\right) + \Phi$$

$$\gamma_n = 1/2 n(n+1), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

где  $A_1, A_2$  — константы;  $F$  — гипергеометрическая функция;  $\Phi$  — частное решение неоднородного уравнения, соответствующее  $\alpha_k = 2\gamma_k - 1/2 = k(k+1) - 1/2$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ). Из решений однородного гипергеометрического уравнения ограниченным на интервале  $(0, \infty)$  будет только второе слагаемое, которое при  $\alpha_k = 0,5k^2$ , «превращается» в полиномы Якоби. Легко видеть, что при любых  $k, n$ :  $\alpha_k \neq 2\gamma_n - 1/2$ . Поэтому либо второе, либо третье слагаемое в выражении для продольной скорости являются асимптотически малыми. Можно положить

$$k^2 + 1 < 2n(n+1):$$

$$f_u \equiv P_k = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{\xi}{8C_\mu}\right) \frac{d^k}{d\xi^k} \left[ \xi^k \left(1 - \frac{\xi}{8C_\mu}\right)^{k-1} \right], \quad \xi < 8C_\mu$$

$$f_u = 0, \quad \xi \geq 8C_\mu$$

$$\alpha_k = 1/2 k^2, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

$$k^2 + 1 > 2n(n+1): \tag{2.3}$$

$$f_u = \Phi_{2n+1}, \quad \xi < 8C_\mu; \quad f_u = 0, \quad \xi \geq 8C_\mu$$

$$\alpha_k = k(k+1) - 1/2, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

где  $\Phi_{2n+1}$  — полином степени  $2n+1$ . Удобно разложить полином  $\Phi$  по полиномам Якоби  $P_k$ , ортогональным друг другу на отрезке  $(0, 8C_\mu)$  с весом  $(1 - \xi/8C_\mu)^{-1}$ .

$$\Phi_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} B_k P_k(\xi), \quad \xi < 8C_\mu, \quad \Phi_{2n+1} = 0, \quad \xi \geq 8C_\mu \tag{2.4}$$

Коэффициенты  $B_k$  могут быть определены при подстановке полинома  $\Phi$  в уравнение для продольной скорости (1.1) и приравнивания нулю получающихся коэффициентов при полиномах  $P_k$ . Эти коэффициенты должны удовлетворять

условию непрерывности решения в точке  $\xi = 8C_\mu$ , условию нормировки (1.3) и интегральному условию (1.5)

$$B_0 = 0, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} B_k = 1 \quad \int_0^{8C_\mu} B_1 P_1 d\xi = -0,5\delta \int_0^{8C_\mu} \xi Q_n^2 d\xi$$

Например, при  $n=2$  с точностью до третьего знака коэффициенты  $B_k$  и параметр  $\delta$  равны:  $B_1 = 0,161$ ;  $B_2 = 0,283$ ;  $B_3 = 0,852$ ;  $B_4 = -0,261$ ;  $B_5 = -0,0351$ ;  $\delta = -13,4$ . Для построенного решения максимальная окружная скорость  $\max(\tau\omega) = 0,23 \max \sqrt{U_0 |u|}$  ( $u_0$  отрицательно).

Для продольной и окружной компонент средней скорости получен целый спектр возможных решений. Возникает вопрос о том, какое же из построенных решений реализуется в натуральных условиях.

Уравнение для угловой скорости линейное. Поэтому решением этого уравнения будет суперпозиция полиномов

$$\omega = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n = \sum_{n=2}^{\infty} D_n x^{-\gamma_n} Q_n(\xi) \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $D_n$  определяются по начальному распределению угловой скорости при  $x = x_0$ . Очевидно, что если  $D_2 = D_3 = \dots = D_{m-1} = 0$ ,  $D_m \neq 0$ , то на больших расстояниях от тела гармоники  $\omega_{m+1}$ ,  $\omega_{m+2}$ ,  $\dots$  являются асимптотически малыми по сравнению с гармоникой  $\omega_m$ . Поэтому к этой гармонике и будет стремиться угловая скорость.

Аналогично дефект продольной скорости в начальный момент времени может быть разложен по полиномам  $P_k$ . Предположим, что первым ненулевым коэффициентом разложения будет коэффициент с индексом  $j$ . Будем считать, что  $j$  удовлетворяет неравенству  $j^2 + 1 < 2m(m+1)$ . Тогда правая часть уравнения продольной скорости является асимптотически малой. Асимптотически малыми будут и гармоники  $u_{j+1}$ ,  $u_{j+2}$ ,  $\dots$  по сравнению с гармоникой  $u_j$ . Следовательно, при увеличении расстояния дефект скорости будет стремиться к гармонике  $u_j$ .

Положим, что индекс  $j$  такой, что имеет место неравенство  $j^2 + 1 > 2m(m+1)$ . В этом случае правая часть уравнения дефекта скорости не является асимптотически малой. Поэтому закон вырождения дефекта скорости будет определяться начальным распределением окружной скорости. На «небольших» расстояниях дефект будет убывать по закону  $x^{0,5-m(m+1)}$ . Впоследствии благодаря закрутке в профиле скорости появится гармоника  $u_2$  и дефект начнет убывать как  $x^{-2}$ .

Другим предельным случаем краевой задачи (1.1), (1.3), (1.5), записанной в автомодельной форме, является случай, когда генерация турбулентной энергии не является асимптотически малой. Это возможно, когда:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \gamma > 1; \quad \alpha + \beta > 1, \quad \gamma = 1; \quad \alpha + \beta = \gamma = 1$$

В первом случае уравнения для функций  $f_u$ ,  $f_k$ ,  $f_e$  «отщепляются» от уравнения  $f_\omega$  системы (1.1). Из их решения могут быть определены параметры  $\beta$ ,  $\mu$ , а затем параметр  $\gamma$  и функция  $f_\omega$ . Во втором случае при  $\alpha + 2\beta < 2$  «независимыми» будут уравнения для функций  $f_\omega$ ,  $f_k$ ,  $f_e$ , а подлежащими определению — параметры  $\beta$ ,  $\nu$ , а затем  $\alpha$  и функция  $f_u$ . При  $\alpha + 2\beta = 2$  правая часть уравнения продольной скорости асимптотически не мала. Поэтому все четыре уравнения системы (1.1) зависимы и должны решаться вместе. Определяемыми параметрами будут  $\beta$ ,  $\nu$ ,

δ. В третьем случае необходимо решать уравнения системы (1.1) одновременно. Подлежат определению параметры β, μ, ν.

При  $P \sim e$  показатель вырождения угловой скорости γ может определяться начальным отношением окружной скорости к пульсационной, т. е. величиной ν, а показатель α — начальными значениями δ, μ, ν. Иначе говоря, следы, различающиеся в начальный момент времени отношением продольной и окружной скоростей к пульсационной, будут вырождаться, асимптотически, по разным законам.

Представляется сложным доказать или опровергнуть существование решения краевой задачи при  $P \sim e$ . Поэтому вопрос, бесследное ли течение в следе с нулевым импульсом и моментом асимптотически ( $P \ll e$ ), открыт. Он может быть решен из анализа численного решения уравнений (1.1), либо из анализа экспериментальных данных.

3. Было проведено численное исследование эволюции турбулентных закрученных следов с малым импульсом. Цель этого исследования состояла в выявлении влияния начальных условий на законы вырождения в следах.

Уравнения (1.1) интегрировались численно, методом конечных разностей. Использовался стандартный набор модельных констант [9]. Расчеты велись на сетке с переменным числом узлов, меняющимся от 150 до 300. Когда число узлов достигало максимального вследствие расширения следа, сетка сжималась в 2 раза.

При постановке граничных условий предполагалось, что на оси следа имеют место условия симметрии и что закрученный след распространяется в «слаботурбулентной» окружающей жидкости с некоторыми значениями энергии турбулентности  $k_\infty$  и скорости ее диссипации  $e_\infty$ . Эволюция величин  $k_\infty, e_\infty$  определялась из решения уравнений, получающихся из соответствующих уравнений (1.1) выбором производных по радиусу.

В качестве начальных брались следующие распределения:

$$u = u_m P_k(0,5R^2), \quad \omega = \omega_m Q_n(0,5R^2)$$

$$k = (k_m - k_\infty)(1 - 0,5R^2) + k_\infty, \quad e = (e_m - e_\infty)(1 - 0,5R^2) + e_\infty; \quad R < \sqrt{2} \quad (3.1)$$

$$u = \omega = 0, \quad k = k_\infty, \quad e = e_\infty; \quad R \geq \sqrt{2}$$

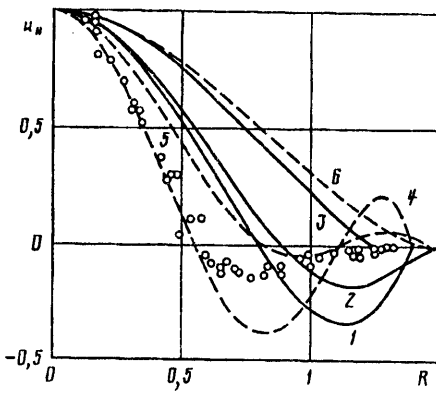
$$e_m = k_m^{1,5} r_*^{-1}, \quad R = r r_*^{-1}; \quad k, n = 2, 3, 4$$

Начальные значения величин  $k_\infty, e_\infty$  составляли 0,1% от  $k_m, e_m$ . Полуширина следа  $r_*$ , максимальные значения продольной и окружной скоростей, энергии турбулентности брались на расстоянии 10 калибров от тела, согласно экспериментальным данным [4]. Это тело представляло собой сферу, из центра которой инжестрировалась закрученная струя для уравновешивания сил сопротивления и тяги. Диаметр сферы составлял  $D_0 = 2,5$  см, а скорость набегающего потока  $U_0 = 15$  м/с, что соответствовало числу Рейнольдса  $Re = 25000$ .

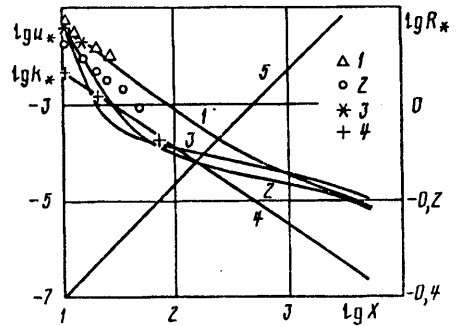
Было проведено две серии расчетов. В первой серии начальный профиль продольной скорости содержал вторую, третью, либо четвертую гармонику, а профиль окружной скорости — вторую. Во второй серии, наоборот, профиль окружной скорости содержал вторую, либо третью гармонику, а профиль продольной скорости — вторую.

В расчетах следы имели отличный от нуля импульс и момент количества движения, не превосходящие значений  $2 \cdot 10^{-4} \rho U_0 D_0^2$  и  $10^{-4} \rho U_0 D_0^3$ .

На фиг. 1 показана эволюция продольной скорости, содержащей первоначально вторую гармонику (кривые 1—3), либо третью (кривые 4—6). Распределения 1—6 соответствуют расстояниям от тела, равным 10, 301, 1076, 10, 41 и 132 калибрам. По вертикальной оси отложен безразмерный дефект скорости  $u_H =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$= u / \max |u|$ , по горизонтальной —  $R = r/r_*$ , где  $r_*$  — полуширина следа. Точками представлены значения  $-u_H$ , согласно данным [3]. Поскольку интегральный импульс следа отличен от нуля (положительный), то имеет место перестройка течения — с удалением вниз по потоку трехгорбые и двухгорбые профили постепенно превращаются в одногорбый профиль, который характерен для следов за буксируемыми телами [9]. Эту перестройку можно наблюдать по убыванию дефекта скорости  $u_* = \max |u| / U_0$  от продольного расстояния  $X = x/D_0$  (кривые

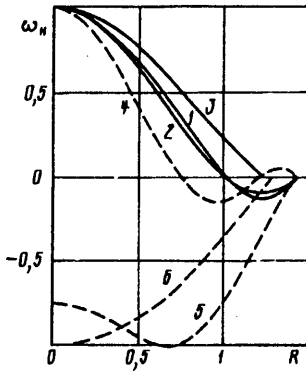
1—3 на фиг. 2). Если, примерно, до 50 калибров трехгорбый дефект скорости вырождается по закону  $x^{-3,8}$ , то впоследствии он вырождается как  $x^{-0,5}$  (сравните с законом  $x^{-2,3}$  для следов за буксируемыми телами [9]). Последний обусловлен сохранением импульса и законом роста толщины следа  $r_* \sim x^{0,23}$ . На расстояниях до 100 калибров двухгорбый дефект скорости убывает как  $x^{-1,8}$ , т. е. медленнее, чем трехгорбый. Наконец, четырехгорбый дефект скорости убывает до 30 калибров по закону  $x^{-5,5}$  (пропорционально квадрату окружной скорости), а затем, как и для случая трехгорбого дефекта, — по закону  $x^{-0,5}$  (кривая 3 на фиг. 2). Энергия турбулентности  $k_* = \max k / U_0^2$  (кривая 4) и толщина следа  $R_* = r_* / D_0$  (кривая 5)

для всех случаев изменяются практически одинаково ( $x^{-1,6}$ ,  $x^{0,23}$ ) и представлены одной кривой. Для сравнения точками 1—2 показаны значения модуля дефекта скорости и энергии турбулентности в эксперименте [1], а точками 3—4 — в эксперименте [3].

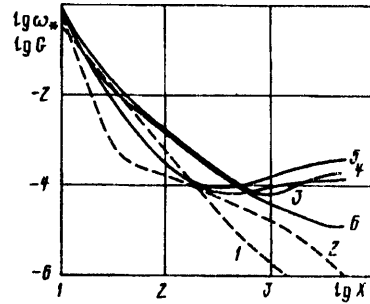
Таковую же перестройку можно наблюдать и для угловой скорости. На фиг. 3 кривыми 1—3 помечены при различных расстояниях от тела профили угловой скорости, содержащей вторую гармонику, а кривыми 4—6 — третью ( $X = 10, 301, 851, 10, 41, 964$ ). Поскольку след имеет ненулевой момент количества движения, то постепенно двух- и трехгорбые профили угловой скорости превращаются в одногорбый профиль. Если двухгорбая угловая скорость  $\omega_* = \max |\omega| D_0 / U_0$  (фиг. 4) убывает по закону  $x^{-2,8}$  (кривая 1), то трехгорбая — по закону  $x^{-5,8}$  (кривая 2). Начиная примерно с 50 калибров, трехгорбая угловая скорость вырождается как  $x^{-0,92}$  (пропорционально  $r_*^4$ ), что обусловлено сохранением момента количества движения.

Для всех случаев генерация турбулентной энергии вырождается быстрее, чем ее диссипация или диффузия. Это следует из фиг. 4, на которой кривыми 3—6 представлены отношения генерации турбулентной энергии к ее диссипации

$$G = \int_0^{\infty} Pr dr \left\{ \int_0^{\infty} er dr \right\}^{-1}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Кривые 3—5 соответствуют следам, продольная компонента скорости которых, первоначально, содержала 2-ю, 3-ю и 4-ю гармонику, а окружная — 2-ю. Кривая 6 соответствует следу, окружная компонента скорости которого содержала 3-ю, а продольная — 2-ю гармонику. С расстояний примерно 1000 калибров величина  $G$  начинает расти и стремится к конечному значению, характерному для следов за буксируемыми телами [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Naudascher E. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence//J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 4. P. 625—656.
2. Schetz J. A., Jakubowski A. K. Experimental studies of the turbulent wake behind self-propelled slender bodies//AJAA Journal. 1975. V. 13. № 12. P. 1568—1575.
3. Kostomakha V. A., Lesnova N. V. Turbulent axisymmetric momentumless wake in turbulized and non-turbulized external flow//Bulgarian Ship Hydrodynamics Centre. Proc. 1989. V. 1. P. 14/1—14/7.
4. Костомаха В. А., Леснова Н. В. Развитие турбулентного закрученного следа с нулевым избыточным импульсом//Всесоюз. конф. «Проблемы стратифицированных течений», Канев, 1991: Тез. докл. Т. 1. Канев, 1991. С. 30—31.
5. Hassid S. Similarity and decay laws of momentumless wakes//Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 2. P. 404—405.
6. Finson M. L. Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes//J. Fluid Mech. 1975. V. 71. № 3. P. 465—479.
7. Гумилевский А. Г. Исследование безимпульсных закрученных следов на основе двухпараметрической модели турбулентности//Изв. АН. МЖГ. 1992. № 3. С. 35—41.
8. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1972. V. 15. № 2. P. 301—314.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
10. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.1.1992