

УДК 532.546

© 1993 г. А. Р. КАСИМОВ

**ПРОФИЛИРОВАНИЕ СИЛЬНОПРОНИЦАЕМОГО ВКЛЮЧЕНИЯ
И ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ПУЗЫРЯ ТЕЙЛОРА — САФМЕНА**

В [1, 2] построено однопараметрическое семейство свободных границ в потенциальном потоке, описывающее контур «пузыря» и «пальца», движущихся с постоянной скоростью в лотке Хеле — Шоу. Эти результаты обобщены для случаев границ с поверхностным натяжением, для системы пузырей, более сложной геометрии зазора и т. п. [3—7]. В настоящей заметке показано, что граница пузыря из [1] является экстремалью задачи оптимизации формы [8], когда управлением является граница области течения [9]. В гидрогеологических терминах это означает, что контур [1] охватывает максимально возможную площадь сильнопроницаемого включения. Ограничением соответствующей изопериметрической задачи является степень загрязнения напорного потока в рамках модели чисто конвективного переноса.

Рассмотрим напорный однородный изотропный пласт с коэффициентом фильтрации k_1 , в котором имеется естественный грунтовый поток с градиентом J . Пусть в пласте расположена система сильнопроницаемых включений с коэффициентом фильтрации k_2 , удаленных на расстояние $2T$ друг от друга так, что расход через один фрагмент равен $2Q = 2k_1JT$. Ограничимся включениями, симметричными относительно направления потока, и соответственно будем рассматривать половину одного фрагмента области фильтрации (фигура, план).

Фильтрацию предполагаем плоской, установившейся, подчиняющейся закону Дарси и считаем справедливой модель Дюпюи — Форхгеймера [10]. При произвольном соотношении k_1 и k_2 точные решения задачи сопряжения течения в пласте и включениях построены на основе обобщения теоремы об окружности [11], исследованы также различные типы анизотропии и переменной толщины напорного пласта [12]. Ниже рассмотрен частный случай, когда $k_2 \gg k_1$ (контур включения BOC можно считать эквипотенциалью и рассматривать фильтрацию только в самом пласте [10]). Тогда в плоскости комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (все фильтрационные характеристики отнесены к величине k_1) области течения соответствует полоса с разрезом G_w .

Линия тока $\psi = q$ (штриховая линия на фигуре) отделяет часть потока I, которая прошла через включение от части II, прошедшей мимо эквипотенциали BOC . Если содержимое включения токсично, то величина q/Q соответствует степени загрязнения пласта вниз по потоку. Известны модели и методы расчета переноса загрязнителей с учетом диффузии и дисперсии [13—14]. Вместе с тем исследования чисто конвективного переноса, в частности отыскание сепаратрис типа AOD , позволяют оценить возможность загрязнения различных участков пласта [15—16].

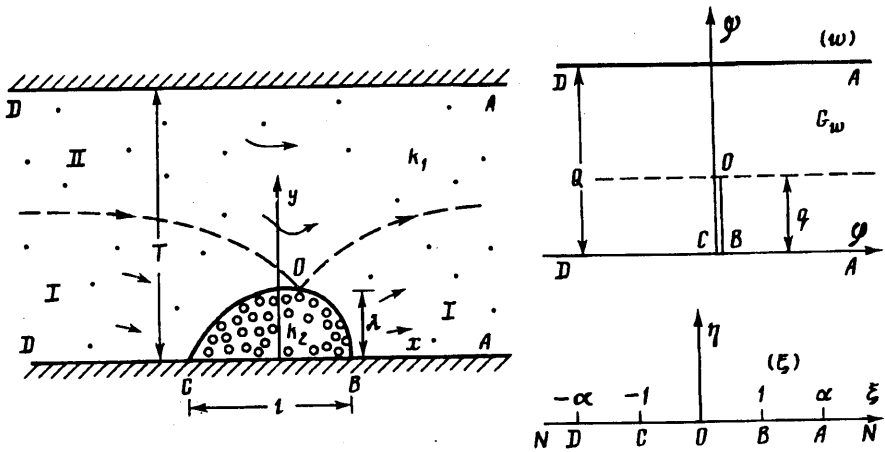
Сформулируем изопериметрическую задачу: при заданных T , Q , q найти форму BOC , ограничивающую экстремальную площадь S .

Для аналогии с [1] рассмотрим лишь пузыри, симметричные относительно оси y .

Очевидно, минимум задачи вырождается, т. е. $S_{\min} = 0$. Для отыскания максимума используем технику из [17, 18]. Отобразим G_w на полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ функцией

$$W = \frac{iq}{\beta} \arctg \frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}, \quad \beta = \arctg \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \tag{1}$$

$$\psi = \frac{2Q}{\pi} \arctg \frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$



где параметр отображения α находится из условия $W(\infty) = iQ$ в виде $\alpha = \operatorname{cosec}(\pi q/2Q)$ и $\beta = \pi q/2Q$.

Введем функцию $z^* = z - iT = x + iy^*$, $y^* = y - T$, и функцию управления формой BC в виде $y = y(\psi)$, причем $y_B = y_C = 0$, а $y(\psi)$ принадлежит классу Гельдера.

Граничные условия для z^* имеют вид: $y^* = 0$ при $|\xi| > \alpha$, $y^* = -T$ при $1 \leq |\xi| < \alpha$, $y^* = y(\psi) - T$ при $|\xi| \leq 1$.

Интегральное представление задачи Дирихле с учетом условия $x(\infty) = x_N = 0$ имеет вид

$$z^* = -\frac{T}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(\psi(\tau))}{\tau - \zeta} d\tau \quad (2)$$

где $\psi(\tau)$ определяется (1). Ядро второго интеграла в (2) запишем в виде ряда по полиномам Чебышева 2-го рода. Тогда параметрические уравнения кривой BC будут

$$y = \sum b_n U_n(\xi), \quad x = -\frac{T}{\pi} \ln \frac{\alpha - \xi}{\alpha + \xi} - \sum b_n T_n(\xi), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

В силу симметрии относительно оси y в (3) остаются только нечетные члены. Для площади получим

$$S = \int_{-1}^1 y x'(\xi) d\xi = \frac{2\alpha T}{\pi} \sum b_{2n-1} J_{2n-1} - \frac{\pi}{2} \sum (2n-1) b_{2n-1}^2 \quad (4)$$

где, согласно [19, с. 417, формула (67)]

$$J_{2n-1} = \int_{-1}^1 \frac{U_n}{\alpha^2 - \xi^2} d\xi = \frac{\pi}{\alpha} \alpha_1^{2n-1}, \quad \alpha_1 = \alpha - (\alpha^2 - 1)^{1/2}$$

Тогда из (4) сразу следует, что необходимое условие экстремума $dS = 0$ обеспечивается коэффициентами

$$b_{2n-1} = \frac{2T}{\pi} \frac{\alpha_1^{2n-1}}{2n-1} \quad (5)$$

Поскольку

$$\partial^2 S / \partial b_{2n-1}^2 = -\pi(2n-1) < 0$$

то вторая вариация $d^2 S < 0$, т. е. найденный экстремум — строгий глобальный максимум.

Подставив (5) в (4), получим выражение функционала цели. Подстановка (5) в (3) дает уравнения экстремалей, причем заметим, что при сворачивании рядов использована формула (1.448) из [20], а не ошибочная формула (16) из [19, с. 738]. В результате получены параметрические

уравнения экстремалей, которые в точности совпадают с уравнениями П. Я. Полубариновой-Кочиной «контура постоянной скорости» флютбета бетонной плотины (формулы (9.6) из [10, с. 194], с тем лишь отличием, что параметр конформного отображения k определяется в [10] из отображения прямоугольника на полуплоскость, тогда как в данном случае — полуполосы с разрезом. С учетом (1) этот экстремум и экстремали (разумеется, в задаче о включении скорость фильтрации на $ВОС$ не постоянна) имеют вид

$$\frac{S_{\max}}{T^2} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} = -\frac{1}{\pi} \ln \cos \left(\frac{\pi q}{2Q} \right) \quad (6)$$

$$\frac{x_m}{T} = \frac{1}{2\pi} - \ln \frac{\alpha + \cos(\theta)}{\alpha - \cos(\theta)}, \quad \frac{y_m}{T} = \pi^{-1} \operatorname{arctg} \times \\ \times \left[\frac{\sin \theta}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} \right], \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

При малых q/Q форма $ВОС$ близка к полуокружности [10]. Из сопоставления 1 и 6 следует, что на экстремали выполняется условие $\psi = \gamma u$, $V = 2Q/T$. Отсюда вытекает, что кривая б с точностью до обозначений совпадает с формой пузыря из [1], где принято $Q = 1$, $T = 1$. Иначе говоря, если в постановке [1] отыскивать пузырь — эквипотенциаль с максимальной площадью при заданной высоте разреза в G_w , то второе граничное условие, как то функция управления $u = \psi/V$, получится из решения изопериметрической задачи.

Наоборот, можно считать заданным граничное условие $\psi = \gamma u$ на контуре пузыря, ввести функцию Жуковского $\omega = W - Vz$ и найти управление в виде $u = u(\operatorname{Re} \omega)$, реализующее экстремум площади. Для фильтрационной схемы имеет смысл и сопряженная задача об отыскании формы $ВОС$, обеспечивающей минимум перехватываемого расхода при заданной площади включения, на основе чего возможна изопериметрическая оценка удаления сепаратриссы AOD от оси течения.

Заметим, что ширина l включения b ровно вдвое меньше, чем ширина горизонтальной щели эквипотенциали с тем же перехватываемым расходом q . Подобные результаты относительно «половинной ширины» экстремали по сравнению с эквивалентными по расходу геометрически простейшими контурами (щель Жуковского и щель Ведерникова) получены для кровтовых дрен [21]. Обтекание непроницаемых включений как для течений с депрессионными кривыми, так и в напорных пластах исследовано в [22], причем в последнем случае экстремалью задачи об экстремуме падения напора является круг — еще одна форма, описанная в [1]. Интересно отметить, что круг является экстремалью оптимизационной задачи, аналогичной исследованной выше, в случае обходной фильтрации в районе завесы (схема [10, с. 394—398]) и для «симметричной» задачи об откачке из котлована [23]. Что касается экспериментально наблюдавшегося «пальца» шириной, равной половине ширины лотка Хеле — Шоу [2], то эта форма реализует экстремум «сопряженной» площади в однопараметрическом классе свободных границ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Taylor G., Saffman P. G. A note on the motion of bubbles in a Hele — Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1959. V. 12. № 3. P. 265—279.
2. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312—329.
3. McLean J. W., Saffman P. G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a Hele — Shaw cell // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 455—469.
4. Burgess D., Tanveer S. Infinite stream of Hele — Shaw bubbles // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 3. P. 367—376.
5. Brener E., Levine H., Tu Y. Nonsymmetric Saffman — Taylor fingers // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 4. P. 529—534.
6. Новиков П. А., Любин Л. Я., Новикова В. И. Течения и тепломассообмен в щелевых системах. Минск: Наука и техника, 1991. 357 с.
7. Pelce P. The motion of a curved interface. Liquids at interfaces // Les Houches 1988 Sessla XLVIII. Amsterdam: North Holland, 1990. P. 561—591.
8. Pironneau O. Optimal shape design for elliptic systems. N. Y.: Springer-Verlag, 1984. 168 p.

9. Freeze R. A., Massmann J., Smith L. et al. Hydrogeological decision analysis. 1. A framework//Ground Water. 1990. V. 28. № 5. P. 738—766.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
11. Голубева О. В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения (к вопросу о течениях в кусочно-неоднородных грунтах)//Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 1. С. 113—116.
12. Задачи динамических процессов в сплошных средах//Сб. тр. Под ред. Н. П. Петрова и др. Свердловск, 1991. 110 с.
13. Latinopoulos P., Tolikas D., Mylopoulos Y. Analytical solutions for two-dimensional chemical transport in aquifers//J. Hydrology. 1988. V. 98. № 1—2. P. 11—19.
14. Leji F. J., Dane J. H. The effect of transverse dispersion on solute transport in soils//J. Hydrology. 1991. V. 122. № 1—4. P. 407—422.
15. Nelsen R. W. Evaluating the enviromental consequences of groundwater contamination. 2. Obtaining location/arrival time and location/outflow quantity distributions for steady flow systems//Water Resour. Res. 1978. V. 14. № 3. P. 416—428.
16. Harmsen E. W., Converse J. C., Anderson M. P., Hoopes J. A. A model for evaluating the three-dimensional groundwater dividing pathline between a contaminant source and a partially penetrating water-supple well//J. Contaminant Hydrology. 1991. V. 8. P. 71—90.
17. Касимов А. Р. Оптимизация полива в гидродинамической модели фильтрации//ПММ. 1991. Т. 55. № 2. С. 338—341.
18. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. The estimation of integral seepage characteristics of hydraulic structures in terms of the theory of inverse boundary-value problems//Zeitschrift Angew. Math. Mech. 1992. V. 72. № 2. P. 103—112.
19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
21. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. Problems of seepage to empty ditch and drain//Water Resour. Res. 1992. V. 28. № 3. P. 871—877.
22. Kacimov A. R., Nicolaev A. N. Steady seepage near an impermeable obstacle//J. Hydrology. 1992. V. 138. P. 17—40.
23. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. Analytical estimation of ground water flow around cutoff wall and into interceptor ditches//Ground Water. 1992. V. 30. № 6. P. 901—907.

Казань

Поступила в редакцию
9.III.1992