МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1993

УДК 532.546

© 1993 г. С. Е. ХОЛОДОВСКИЙ

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОСРЕДНЕНИИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Предложен метод построения однородных анизотропных моделей новых классов сильно неоднородных недеформируемых пористых сред, состоящих из произвольно ориентированных систем слоев, трещин и завес, вложенных друг в друга с произвольной глубиной вложения, когда функции проницаемости элементарных ячеек в некоторой декартовой системе координат (своей для каждой ячейки) представимы в виде произведения трех интегрируемых функций, зависящих от соответствующих координат. В отличие от известных методов осреднения дифференциальных операторов данный метод основан на фильтрационных соображениях и сводится к замене сильно неоднородных грунтов однородными анизотропными грунтами так, чтобы на границах рассматриваемой области основные параметры течений не изменялись.

Построены однородные анизотропные модели недеформируемых грунтов сложной структуры, состоящие из произвольно ориентированных систем слоев, трещин и завес, вложенных друг в друга с произвольной глубиной вложения. Элементарные ячейки грунта в частном случае изотропны и характеризуются функцией проницаемости, представимой в декартовых координатах (своих для каждой ячейки) произведением трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты. В общем случае ячейки анизотропны и неоднородны. В основу осреднения положены гидродинамические соображения, что отличает данный метод от известных методов осреднения дифференциальных операторов с осциллирующими кусочно-постоянными коэффициентами (осреднение потенциала по объему, разложение по малому параметру и др.) [1—5]. В частных случаях из найденных формул следуют известные результаты.

Процедуру осреднения проиллюстрируем на изотропных средах с функциями проницаемости вида

$$K = P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,P_3(x_3) \tag{1}$$

при наличии трещин и завес $x_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, 3$, которые моделируем бесконечно тонкими слоями бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемости [6]. Здесь x_i — декартовы координаты, $P_i > 0$ — произвольные интегрируемые функции. Построим в области D_1 ($0 < x_1 < l_1$) однородную по x_1 модель грунта проницаемости (1). Поскольку проницаемость модели не должна зависеть от характера потока, то зададим в D_1 конкретное течение (обобщенный поступательный поток) с потенциалом

$$\varphi = \sum_{i=1}^{3} c_i \Phi_i(x_i), \quad \Phi_i = \int_0^{x_i} \frac{dt}{P_i(t)} \tag{2}$$

где c_i — произвольные постоянные, при этом φ удовлетворяет уравнению $\operatorname{div}(K\nabla\varphi) = 0$ и условиям сопряжения на разрывах функции (1).

Заменим грунт в области D_1 на однородную по x_1 среду так, чтобы на границе D_1 потенциал (2), нормальная скорость, т. е. условия 1-го и 2-го рода, и концы линий тока оставались неизменными. Определяя в осредненной модели по граничным данным потенциал и уравнение линий тока

$$\varphi_* = c_1 \sigma_1 x_1 + \sum_{i=2}^{3} c_i \Phi_i; \quad x_1 c_1 P_1^* = c_1 \int_0^{x_i} P_i\,dt, \quad i = 2, 3$$

найдем составляющие скорости $v_i = K_{ii}\partial\varphi_*/\partial x_i$, где $K_{11} = P_2P_3\sigma_1$, $K_{22} = K_{33} = P_2P_3P_1^\circ$, а вид P_1° и σ_1 приведен ниже. При этом из неравенства Коши — Буняковского следует $P_1^\circ \geq \sigma_1$, где $P_1^\circ = \sigma_1$ (изотропная модель) только в случае $P_1 = \mathrm{const}$, т.е. когда исходный грунт однородный по x_1. Осредняя полученный грунт по x_2 и x_3, построим компоненты эффективной проницаемости грунтов (1) в области

$$D_3\ (0 < x_i < l_i),\quad i = 1, 2, 3,\ \text{в виде}$$

$$K_{ii} = \sigma_i P_j^\circ P_r^\circ,\quad K_{ij} = 0 \tag{3}$$

где верхний индекс параметров здесь и ниже указывает на среднее значение соответствующей функции

$$P_i^\circ = \frac{1}{l_i}\left(\int_0^{l_i} P_i\,dt + \sum_\nu A_{i\nu}\right);\quad \sigma_i = l_i\left(\int_0^{l_i}\frac{dt}{P_i} + \sum_\mu B_{i\mu}\right)^{-1} \tag{4}$$

где $i = 1, 2, 3$; $j = 2, 3, 1$; $r = 3, 1, 2$, $A_{i\nu}$ и $B_{i\mu}$ — параметры трещин и завес: $h_{i\nu}\alpha_{i\nu} \to A_{i\nu}$, $h_{i\nu}/\beta_{i\nu} \to B_{i\nu}$ при $h_{i\nu}$, $\beta_{i\nu} \to 0$, $\alpha_{i\nu} \to \infty$, где $h_{i\nu}$ — раскрытие, а $\alpha_{i\nu}$ ($\beta_{i\nu}$) — проницаемость трещин (завес) [6]. Если функции P_i (1) периодические с периодом l_i, то формулы (3) для всего пространства не изменятся. При $P_1 = P_2 = \mathrm{const}$, $A_{i\nu} = B_{i\mu} = 0$ и кусочно-постоянной функции P_3 из равенств (3) следуют известные формулы [1].

Аналогично компоненты K_{ij} эффективной проницаемости анизотропных сред с функциональными тензорами проницаемости F_{ij} в области D_3 найдем в виде

$$K_{ii} = \sigma_i Q_j^\circ T_r^\circ,\quad K_{ij} = \frac{1}{l_r}\int_0^{l_r} F_{ij}\,dt$$

$$F_{ii} = P_i(x_i)\,Q_j(x_j)\,T_r(x_r),\quad F_{ij} = F_{ij}(x_r) \tag{5}$$

где параметры $\sigma_i, Q_j^\circ, T_r^\circ$ и индексы i, j, r определены в (4).

Рассмотрим область D $(0 < x_3 < l)$, состоящую из анизотропных слоев G_n $(a_{n-1} < x_3 < a_n)$, $a_0 = 0$, $a_m = l$, с произвольными постоянными тензорами проницаемости K_{ij}^n, причем слои G_n могут перемежаться с трещинами и завесами с параметрами A_ν и B_μ. Здесь и ниже в суммах индексы n, ν, μ меняются в пределах $n = 1,\ldots, m$, $\nu = 1, \ldots, N$, $\mu = 1, \ldots, M$. Осредняя данный грунт по переменной x_3, найдем компоненты тензора эффективной проницаемости области D в виде

$$K_{ii} = l^{-1}(R_{jj} + F_i^2\sigma),\quad K_{i3} = F_i\sigma,\quad i = 1, 2;\ j = 2, 1$$

$$K_{33} = l\sigma,\quad K_{12} = l^{-1}\left(F_1F_2\sigma - \sum_n C_{12}^n q_n\right) \tag{6}$$

$$\sigma^{-1} = \sum_n q_n + \sum_\mu B_\mu,\quad F_i = \sum_n K_{i3}^n q_n$$

$$R_{jj} = \sum_n C_{jj}^n q_n + \sum_\nu A_\nu$$

$$q_n = l_n/K_{33}^n,\quad l_n = a_n - a_{n-1}$$

Здесь C_{ij}^n — адъюнкты матрицы K_{ij}^n. При этом результирующая матрица K_{ij} является симметричной и положительно определенной. Заданные в слоях G_n тензоры K_{ij}^n могут в свою очередь быть моделями грунтов с компонентами проницаемости (5) в декартовых координатах, определенных для каждого слоя. Последнее позволяет строить тензоры эффективной проницаемости произвольного числа систем слоистых грунтов, вложенных друг в друга, когда каждый слой одной системы состоит из произвольно ориентированных слоев, трещин и завес другой системы и проницаемость элементарных ячеек в определенной для каждой ячейки системе координат описывается функциями (1) или тензорами (5). При этом формулы (6) применяются последовательно, начиная с внутренних систем слоев, трещин и завес.

В частности, если в грунте с непроницаемыми блоками имеет место N систем трещин, причем параметры трещин и расстояние между ними в каждой системе не меняются, то из равенств (6) следуют известные формулы для эффективной проницаемости чисто трещиноватых сред, полученные из других соображений [5].

Уравнения фильтрации жидкости в построенных моделях приводятся к уравнению Лапласа в переменных, определяющих главные направления анизотропии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат. 1953. 616 с.
2. *Панфилов М. Б.* Осредненная модель фильтрации в сильно неоднородных средах//Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 313—317.
3. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. *Швидлер М. И.* Об условном осреднении неустановившихся фильтрационных полей в случайных композитных пористых средах//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 69—74.
5. *Ромм Е. С.* Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
6. *Холодовский С. Е.* О фильтрации в пластах с кольцевыми неоднородными анизотропными зонами, трещинами и завесами//Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 606—608.

Чита

Поступила в редакцию
19.III.1992