МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1993

УДК 532.529.6

© 1993 г. АБДЕЛЬ АЗИЗ Н.

ПОВЕДЕНИЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Проанализировано явление тепловой релаксации газовых пузырьков в жидкости за фронтом ударной волны. На основе подхода к решению задачи теплообмена газового пузырька с жидкостью, развитого автором, получено решение, описывающее начальную стадию схлопывания пузырьков за фронтом ударной волны.

Рассмотрим поведение одиночного сферического пузырька, наполненного инертным газом, в переменном поле давления. Переменность давления в жидкости может быть вызвана, в частности, прохождением ударной волны через пузырьковую завесу.

Известно [1], что в широком диапазоне размеров пузырька определяющее влияние на затухание его колебаний оказывает тепловая диссипация. Поэтому для простоты будем полагать жидкость несжимаемой и невязкой. Если радиальная скорость поверхности пузырька значительно меньше скорости звука в газе, поле давления внутри пузырька можно полагать пространственно однородным [2]. Уравнения Рэлея и притока тепла, описывающие динамику и теплообмен газового пузырька с жидкостью, имеют вид

$$R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{p-p_\infty-2\sigma/R}{\rho_l} \tag{1}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{dp}{dt} \tag{2}$$

Здесь R — радиус пузырька, p — давление, T — температура, ρ — плотность, v — скорость, r — радиальная эйлерова координата, отсчитываемая от центра пузырька, t — время, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, λ — коэффициент теплопроводности, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Нижний индекс l относится к параметрам жидкости, индекс ∞ — к параметрам вдали от пузырька.

Граничные условия для уравнения (2) могут быть записаны в виде [1]

$$r=0:\ v=0,\ \partial T/\partial r=0 \tag{3}$$

$$r=R:\ v=\dot{R},\ T=T_0 \tag{4}$$

Начальные условия

$$t=0:\ v=0,\ T=T_0 \tag{5}$$

Здесь T_0 — постоянная температура окружающей жидкости, которая ведет себя как термостат.

Предположим, что для газа справедливо уравнение состояния совершенного газа

$$p=\rho BT \tag{6}$$

где B — газовая постоянная.

Уравнение неразрывности газовой фазы имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v)=0 \tag{7}$$

Используя предположение об однородности поля давления внутри пузырька, это уравнение с учетом (2) перепишем в виде

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{3(\gamma-1)}{R}q_R-\frac{3\gamma p}{R}\frac{dR}{dt} \tag{8}$$

$$q_R = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Аналитическое решение уравнения (2), предполагающее неподвижность границы пузырька, может быть получено в виде ряда [3]. Выражение для теплового потока на межфазной границе имеет при этом вид

$$q_R = \frac{a}{R} \int_0^t [\theta_3(0, \eta) - 1] \frac{dp}{d\tau} d\tau \tag{9}$$

$$\eta = \frac{t - \tau}{t_T}, \quad t_T = \frac{R^2}{\pi^2 a}$$

где θ_3 — тета-функция [5], a — коэффициент температуропроводности, t_T — характерное время прогрева пузырька [2]. При $\eta << 1$ и $\eta >> 1$ имеют место асимптотики

$$\theta_3(0, \eta) - 1 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{\eta}} - 1, & \eta << 1 \\ 2e^{-\eta}, & \eta >> 1 \end{cases} \tag{10}$$

В быстро протекающих волновых процессах в пузырьковых средах характерные времена обычно значительно меньше времени полного прогрева пузырьков t_T. Поэтому при исследовании начальной стадии динамики пузырьков за фронтом ударной волны можно пользоваться корневой асимптотикой (10) и выражение для теплового потока на межфазной границе записать в виде

$$q_R = \frac{a}{R} \int_0^t \left(\sqrt{\frac{\pi t_T}{t - \tau}} - 1 \right) \frac{dp}{d\tau} d\tau \tag{11}$$

Уравнение (8) с учетом (11) запишется соответственно в виде

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3(\gamma - 1)a}{R^2} \int_0^t \left(\sqrt{\frac{\pi t_T}{t - \tau}} - 1 \right) \frac{dp}{d\tau} d\tau - \frac{3\gamma p}{R} \frac{dR}{dt} \tag{12}$$

Профиль давления на переднем фронте ударной волны можно аппроксимировать линейной функцией

$$p_l = p_0(1 + bt), \; b > 0 \tag{13}$$

Зависимость (13) соответствует также начальной стадии поведения пузырьков под действием треугольного импульса. Рассмотрим безынерционный режим схлопывания пузырьков в слабой волне, когда давления в фазах практически совпадают [5]

$$p \approx p_l(t). \tag{14}$$

При этом, если пузырьки достаточно крупные ($R \gtrsim 1$ мм), можно пренебречь и капиллярным скачком давления. Подставив (13) в (12), с учетом (14) получим

$$p_0 b = -\frac{3(\gamma - 1)abp_0}{R^2} \int_0^t \left(\sqrt{\frac{\pi t_T}{t - \tau}} - 1 \right) d\tau - \frac{3\gamma p}{R} \frac{dR}{dt} \tag{15}$$

Вычислив интеграл в уравнении (15), получим

$$b + \frac{3(\gamma - 1)ab}{R^2} (2\sqrt{\pi t_T t} - t) = -\frac{3\gamma}{R} \frac{dR}{dt} \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$R = R_0 - \frac{bR_0}{3\gamma} t - \frac{(\gamma - 1)ab}{\gamma R_0} \left(\frac{4}{3} \sqrt{\pi t_T} t^{3/2} - \frac{1}{2} t^2 \right) \tag{17}$$

Из (17) видно, что наличие теплообмена ускоряет процесс схлопывания пузырька. Это связано с тем, что при этом противодавление в пузырьке растет медленнее, чем при адиабатическом сжатии.

Определенный интерес представляет поведение показателя политропы k.

При политропическом сжатии пузырька постоянной массы

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k} \tag{18}$$

Подставив в (18) соотношения (13), (14), (17), получим зависимость изменения показателя политропы во времени

$$k = \gamma\left(1 + \frac{4(\gamma - 1)}{\pi}\sqrt{\frac{t}{\pi t_T}}\right)^{-1}, \quad t \ll t_T \tag{19}$$

где γ — показатель адиабаты газа.

Из (19) видно, что на начальной стадии схлопывания поведение газа в пузырьке близко к адиабатическому.

Такой же характер поведения коэффициента политропы наблюдался при численном исследовании термодинамического поведения газовых пузырьков в ударных волнах [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Plesset M. S., Prosperetti A.* Bubble dynamics and cavitation//Ann. Rev. Fluid Mech. Palo Alto Calif. 1977. V. 9. P. 145—185.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
3. *Carslow H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. Oxford: Clarendon Press. 1959. 510 p.
4. *Градштейн И. М., Рыжик И. С.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
5. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 1987. 464 с.; Ч. 2. 1987. 359 с.

Египет
Александрия

Поступила в редакцию
4.VI.1992