МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1993

УДК 532.5.013.4:537.3

 В. А. СЕМЕНОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследована параметрическая неустойчивость неравномерно нагретого горизонтального слоя жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле.

Для реализации электротермической конвекции в идеальном жидком диэлектрике необходимо применение переменного электрического поля [1]. Поскольку в этом случае напряженность поля является периодически изменяющимся параметром, то это может привести к существенному изменению условий возбуждения электротермической конвекции, полученных в [2, 3].

Рассмотрим устойчивость равновесия плоского горизонтального слоя жидкого диэлектрика со свободными изотермичными границами в поперечном переменном электрическом поле. Исходные уравнения электротермической конвекции имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} - \frac{1}{8\pi} E^2 \cos^2 \omega_0 t \nabla\varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} = \chi\Delta T, \quad \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

$$\rho = \rho(T), \quad \varepsilon = \varepsilon(T)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, T — температура, $\mathbf{E}$, φ — напряженность и потенциал поля, ω_0 — частота поля, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, η, ρ, χ, ε — соответственно вязкость, плотность, температуропроводность и диэлектрическая проницаемость жидкости.

После обезразмеривания ($r \to h$, $T \to Ah$, $t \to h^2/\nu$, $v \to \chi/h$, $p \to \eta\chi/h^2$, $\varphi \to E_0 h^2 \beta_\varepsilon A$) в линейном приближении уравнения возмущений нестационарного равновесия имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + RTk - R_\varepsilon T\mathbf{k} \cos^2 \omega t - R_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \cos \omega t$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} + v_z = \Delta T, \quad \Delta\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \omega t = 0 \tag{2}$$

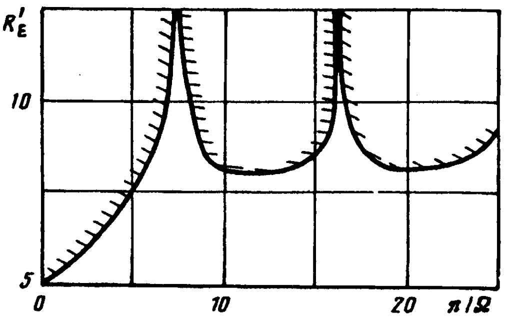
$$z = 0,\ 1 : v_z = v_z'' = T = \varphi = 0, \quad \beta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dT}$$

$$R = \frac{g\beta A h^4}{\nu\chi}, \quad R_\varepsilon = \frac{\varepsilon\beta_\varepsilon^2 E_0^2 A^2 h^4}{4\pi\eta\chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

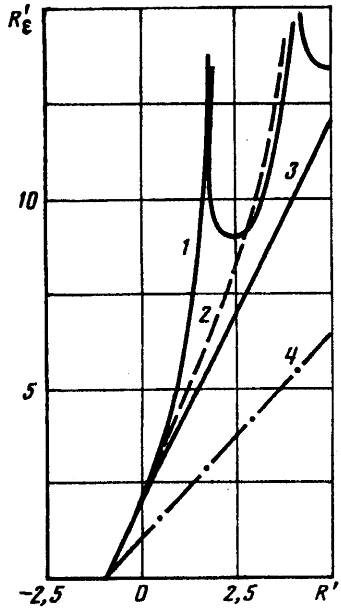
Здесь h — толщина слоя, A — равновесный градиент температуры, $\mathbf{k}$ — орт оси z, направленной поперек слоя, E_0 — амплитуда напряженности внешнего поля.

Следуя [4], исключим из (2) горизонтальные компоненты скорости, давление и потенциал, в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\Delta v_z = \Delta\Delta\Delta v_z + R\Delta_1\Delta T - R_\varepsilon\Delta_1\Delta_1 T \cos^2 \omega t$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$P\frac{\partial T}{\partial t} + v_z = \Delta T \tag{3}$$

где Δ_1 — плоский лапласиан.

Вводя нормальные возмущения типа $a(z,\ t)\exp i(k_1x + k_2y)$, будем искать решение, соответствующее основному уровню неустойчивости, в виде

$$v(z,\ t) = a\,(t)\sin \pi z, \quad T\,(z,\ t) = b\,(t)\sin \pi z$$

Амплитуда $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\dot a + l^4 a = Rk^2 b - R_\varepsilon k^4 b l^{-2}\cos^2\omega t$$

$$P\dot b + a = -l^2 a, \quad l^2 = \pi^2 + k^2 \tag{4}$$

которые сводятся к следующему уравнению второго порядка:

$$\ddot f + 2\alpha\dot f + (1 + R' - R_\varepsilon'\cos^2\Omega t)\,f = 0$$

$$f = Pl^2 b, \quad 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{P}} + \sqrt{P}$$

$$\Omega = l^{-2}\omega\sqrt{P}\,, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad R_\varepsilon' = \frac{R_\varepsilon}{R_{\varepsilon 0}} \tag{5}$$

$$R' = \frac{R}{R_0}\,, \quad R_0 = l^6 k^{-2}, \quad R_{\varepsilon 0} = l^8 k^{-4}$$

Здесь R_0 — статическое критическое число Рэлея [4], $R_{\Sigma 0}$ — электрическое критическое число Рэлея в постоянном поле [2].

Для получения аналитического решения задачи допустим, что модуляция в (5) происходит не по гармоническому, а по ступенчатому закону. В этом случае после соответствующих преобразований [5] находим следующее уравнение границ устойчивости:

$$\cos\frac{\pi\omega_1}{2\Omega}\cos\frac{\pi\omega_2}{2\Omega} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\frac{\pi\omega_1}{2\Omega}\sin\frac{\pi\omega_2}{2\Omega} = \pm\mathrm{ch}\,\frac{\pi\alpha}{\Omega} \tag{6}$$

$$\omega_1 = \sqrt{1 + R' - R_\varepsilon' - \alpha^2}\ ,\quad \omega_2 = \sqrt{1 + R' - \alpha^2}$$

На фиг. 1 изображены области параметрической неустойчивости (заштрихованы) при $R' = 1{,}5$ и $\alpha = \sqrt{2}$. Свободная карта устойчивости при $\alpha = \sqrt{2}$ приведена на фиг. 2. Кривая *1* соответствует частоте модуляции $\Omega = 0{,}52$, штриховая кривая *2* — $\Omega = 1{,}57$; прямая *3* — высокочастотная ($\Omega \to \infty$) асимптота, а прямая *4* — нейтральная линия, определяющая границу устойчивости в постоянном поле [1—3]. Из фиг. 2 видно, что для возбуждения электротермической конвекции в переменном поле необходима напряженность, превышающая более чем в $\sqrt{2}$ раза критическую напряженность постоянного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 319 с.
2. *Roberts P. H.* Electrohydrodynamic convection//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1969. V. 22. № 2. P. 211—220.
3. *Turnbull R. J.* Electroconvective instability with a stabilizing temperature gradient//Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 12. P. 2588—2596.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.

Пермь

Поступила в редакцию
17.III.1992