МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1993

УДК 532.51.031

© 1993 г. Ю. Б. СЕДОВ

МЕТОД КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В последнее время для численного моделирования двумерных вихревых течений широко применяется метод контурной динамики, в основе которого лежит возможность сведения двумерной задачи к одномерной — определению эволюции системы контуров, служащих границами равнозавихренных областей. В данной работе метод контурной динамики развивается для плоских течений общего вида, когда в жидкости кроме вихрей присутствуют распределенные источники (стоки) массы. Для этого случая получены временные законы изменения завихренности и дивергенции жидких частиц. Указан класс трехмерных вихревых течений, динамика которых сводится к динамике двумерных вихрестоков.

1. Рассмотрим течения идеальной жидкости постоянной плотности на неограниченной плоскости (x, y). Движение жидкости будем предполагать свободным, т. е. отсутствуют внешние силы и внутренние твердые границы. Поле скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ таких течений полностью определяется распределением в жидкости вихрей $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ и распределением стоков $\sigma = \operatorname{div} \mathbf{v}$ [1]

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{1.1}$$

Функция тока ψ и потенциал течения φ удовлетворяют уравнению Пуассона: $\Delta\psi = -\omega$, $\Delta\varphi = \sigma$, Δ — оператор Лапласа, и могут быть представлены в виде свертки с фундаментальным решением уравнения Лапласа

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\iint \omega \ln r\, dx'\, dy', \quad \varphi = \frac{1}{2\pi}\iint \sigma \ln r\, dx'\, dy'$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \tag{1.2}$$

Применив операцию rot к уравнению Эйлера с учетом представления поля скорости (1.1), получим эволюционное уравнение для завихренности

$$\frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\omega = -\sigma\omega \tag{1.3}$$

Таким образом, если в жидкости отсутствуют источники и стоки массы, т. е. $\sigma \equiv 0$, завихренность жидких частиц сохраняется во времени.

Предположим, что в начальный момент времени однородный вихрь локализован в некоторой области D, т. е. $\omega = \omega_0\chi(D)$, $\chi(D)$ — характеристическая функция множества D. В этом случае поле скорости течения, определяемое функцией тока ψ

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y},\ -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\omega_0}{2\pi}\left(\oint_{\partial D} \ln r\, dx',\ \oint_{\partial D} \ln r\, dy'\right) \tag{1.4}$$

Динамика завихренности, как следует из (1.4), полностью определяется эволюцией граничного контура ∂D, описываемой уравнением [2]

$$\dot{z}_0 = -\frac{\omega_0}{2\pi} \oint_{\partial D} \ln | z - z_0 | \, dz \tag{1.5}$$

Здесь $z = x + iy$ — комплексные переменные в плоскости течения, точки z, z_0 принадлежат граничному контуру ∂D.

Уравнение (1.5) с соответствующими начальными данными составляет основу метода контурной динамики, широко применяемого для численного моделирования вихревых течений, в том числе и в задачах с геофизическими приложениями [3].

2. Рассмотрим общий случай плоского течения, когда плотность распределенных стоков $\sigma \not\equiv 0$. Из уравнения (1.3) следует, что завихренность жидких частиц не сохраняется там, где $\sigma \neq 0$. Происходит изменение также плотности распределенных стоков в соответствии с эволюционным уравнением [4]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} (\sigma \mathbf{v}) = 0 \tag{2.1}$$

полученным в предположении, что стоки не могут появляться или исчезать, а перераспределение σ происходит только за счет конвективного переноса стоков со скоростью жидкости. Для наших целей удобнее переписать (2.1) в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\, \sigma = -\sigma^2 \tag{2.2}$$

Эволюционные уравнении (2.2), (1.3) составляют замкнутую систему, решая которую в лагранжевых переменных

$$\sigma (x (t), y (t), t) = \sigma_0 \alpha (t), \qquad \sigma_0 = \sigma (x (0), y (0), 0)$$

$$\omega (x (t), y (t), t) = \omega_0 \beta (t), \qquad \omega_0 = \omega (x (0), y (0), 0)$$

получим временные законы изменения завихренности и дивергенции вдоль траекторий жидких частиц

$$\sigma (t) = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 t + 1}, \qquad \omega (t) = \frac{\omega_0}{\sigma_0 t + 1} \tag{2.3}$$

Предположим, что стоки и вихри равномерно распределены в ограниченной области D, т. е. $\sigma = \sigma_0 \chi(D)$, $\omega = \omega_0 \chi(D)$. На основании (2.3) можно утверждать, что распределения σ, ω останутся однородными и в дальнейшем, поэтому можно воспользоваться процедурой вывода уравнения (1.5). Окончательно получим уравнение, описывающее динамику граничного контура

$$\dot{z}_0 = -\frac{\omega (t) + i\sigma (t)}{2\pi} \oint_{\partial D} \ln | z - z_0 | \, dz \tag{2.4}$$

где временные зависимости $\sigma(t)$, $\omega(t)$ даны в (2.3). Уравнение (2.4) имеет такой же вид, как и уравнения вихревой контурной динамики (1.5), в которые дополнительно введены распределенные стоки с плотностью $\sigma(t)$. При этом учитывается тот факт, что стоки являются вихрями с чисто мнимыми интенсивностями. Напомним, что контурные интегралы в (1.4) появляются в результате применения формулы Грина к двойным интегралам в выражении для скорости (1.1).

Уравнения (2.4) могут быть использованы для численных расчетов динамики распределенных вихрестоков. Не прибегая к вычислениям, на основании временных зависимостей (2.3) можно определить грубые характеристики движения. Так, вихреисточники ($\sigma > 0$) всегда расплываются, так как $\sigma, \omega \to 0$ при $t \to \infty$, а распределенные вихрестоки ($\sigma < 0$) схлопываются за конечное время $t_* = -1/\sigma_0$ в точечный вихресток. Последнее обстоятельство следует учитывать при проведении численных расчетов, а также при использовании дискретной

модели свободных точечных стоков [4] или вихрестоков [5], поскольку из-за расплывания точечных вихреисточников дискретная модель справедлива только на малых временах.

3. Временные зависимости (2.3) можно получить и другим, более наглядным способом. Действительно, скорость изменения площади S области D, занимаемой однородным вихрестоком, по формуле Остроградского — Гаусса равна

$$\frac{dS}{dt} = \oint_{\partial D} (\mathbf{vn})\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx\, dy = \sigma S \equiv \mathrm{M} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к контуру ∂D, M — поток скорости через ∂D. По формуле Грина циркуляция скорости по контуру ∂D равна

$$\Gamma \equiv \oint_{\partial D} \mathbf{v}\, ds = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{v}\, dx\, dy = \omega S \tag{3.2}$$

и в силу теоремы Томсона сохраняется при движении контура.

Поведение величины M зависит от того, какие условия наложены на течение в бесконечности. Если считать, что в бесконечно удаленной точке помещен источник (сток) массы постоянной мощности $\mu = -\mathrm{M}$, то поток жидкости от него будет поддерживать распределенный в области D сток (источник) интегральной мощности M. В этом случае поток скорости M — лагранжев инвариант, так же как и циркуляция Γ, поэтому из (3.1) и (3.2) получим временные зависимости

$$S(t) = \mathrm{M}t + S_0, \quad \sigma(t) = \frac{\mathrm{M}}{S} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 t + 1}, \quad \omega(t) = \frac{\Gamma}{S} = \frac{\omega_0}{\sigma_0 t + 1}$$

совпадающие с (2.3).

Возможны и другие задания условий на бесконечности. Действительно, можно считать, что в бесконечно удаленной точке находится источник (сток), мощность которого зависит от времени $\mu = \mu(t)$. Тогда из (3.1) и (3.2), учитывая, что $\mathrm{M} = -\mu(t)$, получим временные зависимости

$$S(t) = S_0 - \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau, \quad \sigma(t) = -\frac{\mu(t)}{S(t)}, \quad \omega(t) = \frac{\Gamma}{S(t)}$$

4. Рассмотрим представляющий интерес случай, когда двумерное вихрестоковое течение можно доопределить до трехмерного вихревого, положив вертикальную компоненту скорости $v_3 = -\sigma h$, т. е. вся втекающая в сток жидкость уходит по третьему измерению h, и трехмерная дивергенция равна нулю. Тогда из уравнения Эйлера для v_3 с учетом того, что $\partial p/\partial h = 0$ для локализованных распределений вихрестоков, получим эволюционное уравнение для σ

$$\frac{d\sigma}{dt} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\sigma = \sigma^2 \tag{4.1}$$

отличающиеся от (2.2). Временные зависимости в этом случае принимают вид (сравни с (2.3))

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0 t}, \quad S(t) = \frac{S_0}{1 - \sigma_0 t}, \quad \omega(t) = \omega_0 (1 - \sigma_0 t)$$

Откуда следует, что мощность источника в бесконечно удаленной точке

$$\mu(t) = -\mathrm{M}(t) = -\sigma(t) S(t) = -\frac{\mathrm{M}_0}{(1 - \sigma_0 t)^2}$$

Этот случай существенно отличается от рассмотренного выше случая $\mathrm{M} = \mathrm{const}$. Коллапс распределенного вихрестока, т. е. трехмерного вихря с восходящим вдоль оси вихря потоком, происходит за бесконечное время, так как

$S \to 0$ при $t \to \infty$. Расплывание вихреисточника, т. е. трехмерного вихря с нисходящим осевым потоком, носит взрывной характер, так как $S \to \infty$ при $t \to t_*$. Вполне возможно, что этот режим моделирует реально наблюдаемый «взрыв» концентрированных вихрей, при котором нисходящий поток прорывается вдоль оси вихря и работает как двумерный источник в горизонтальной плоскости конечное время $t < t_*$.

В заключение отметим, что использование распределенных вихрестоков может быть полезным при моделировании реальных конвективных вихрей, у которых вертикальные потоки порождают мощные радиальные движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for Euler equations in two dimensions//J. Comput. Phys. 1979. V. 30. № 1. P. 96—106.
3. Метод контурной динамики в океанологических исследованиях: Сб. науч. тр. Владивосток: ДВО АН СССР, 1990. 133 с.
4. *Богомолов В. А.* Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков//Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 21—27.
5. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Концентрация завихренности и спиральные вихри//Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 15—21.

Москва

Поступила в редакцию
22.IX.1989