

УДК 532.613.4

© 1993 г. В. А. КОРОБИЦЫН, В. И. ПЕГОВ

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

На основе модели идеальной несжимаемой тяжелой жидкости численно исследована эволюция границы раздела жидкости и газа в процессе заполнения жидкостью осесимметричной цилиндрической полости, содержащей газ, изменение объема которого происходит адиабатически.

Эволюция газовых пузырей в жидкости связана с процессами изменения формы и объема пузыря, дробления и слияния пузырей, изменениявязности. Наиболее полно как аналитическими методами, так и численными исследованы процессы изменения формы и объема пузырей. Вопросы же дробления и слияния пузырей, изменения их связности почти не исследованы. Это объясняется нелинейностью математической модели этих процессов, отсутствием адекватной математической и численной моделей процессов дробления, слияния и изменения связности пузырей, геометрических трудностей при численном моделировании эволюции границ раздела.

В работе численно исследованы явления дробления и слияния пузырей, изменения их связности на примере процесса заполнения осесимметричной полости конечной глубины тяжелой жидкостью. Моделируется выход пузыря из цилиндрической полости, формирование кольцевой струи, приводящей к дроблению пузыря на два, образование двух кумулятивных струй, переход односвязного пузыря в двусвязный торообразный и растекание нижней струи по дну и стенкам цилиндрической полости. Помимо отмеченных одним из характерных факторов влияющих на процесс заполнения полости жидкостью является взаимодействие кумулятивных струй с границами полости и жидкостью.

Теоретические результаты исследований течений с пузырями и кумулятивными струями в идеальной несжимаемой жидкости хорошо известны (см. [1] и приведенную там литературу).

1. Безвихревое осесимметричное течение тяжелой жидкости происходит в области, ограниченной твердыми и свободными границами и границами раздела. В силу осевой симметрии задачи рассматриваем решение в области меридионального сечения течения жидкости  $Q(x, r, t)$ ,  $t > 0$ , на полуплоскости  $(x, r)$ ,  $r > 0$ ,  $x$  и  $r$  — цилиндрические координаты,  $\Sigma$  — поверхность раздела газ — жидкость,  $g$  — ускорение силы тяжести, параллельной оси симметрии  $x$ .

Пусть  $L$  — характерный линейный размер области течения. При этом все искомые характеристики течения являются функциями отношений  $At/L$ ,  $x/L$ ,  $r/L$ , где  $A = (p_1/\rho)^{1/2}$  — постоянная с размерностью скорости,  $p_1$  — характерное давление,  $\rho$  — плотность жидкости. В дальнейшем под  $x$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $p$ ,  $\varphi$  подразумеваем безразмерные переменные. Потенциал скорости  $\varphi(x, r, t)$  в  $Q$  удовлетворяет уравнению Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.1)$$

На оси симметрии  $r = 0$  и твердых границах нормальная производная  $\partial \varphi / \partial n$  обращается в нуль. При  $(x, r) \rightarrow \infty$   $w = \nabla \varphi \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ . На границе  $\Sigma$

выполняются два граничных условия, кинематическое и динамическое условие непрерывности давления  $p$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (x, r) \in \Sigma \quad (1.2)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + p_s - 1 + g x L A^{-2} = 0 \quad (1.3)$$

При написании (1.3) был использован интеграл Коши — Лагранжа. Считаем, что давление газа  $p_s$  меняется по адиабатическому закону

$$p_s(t) = p_s(0) [V(t)/V(0)]^{-\gamma} \quad (1.4)$$

где  $V(t)$  — объем газовой полости,  $p_s(0)$ ,  $V(0)$  — давление и объем газа в начальный момент времени,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

2. Пусть твердые границы области течения являются координатными линиями цилиндрической системы координат. В области введем связную прямоугольную неравномерную сетку узлов, согласованную с твердыми границами. Потенциал и давление задаются в узлах этой сетки. Физические компоненты скорости  $w$  определены на разнесенных сетках: компонента  $w_x$  определена в точке, отстоящей от узла на шага сетки в направлении убывания переменной  $x$ . Производные аппроксимируются центральными разностными соотношениями. Разностная схема, аппроксимирующая уравнения (1.1) — (1.4), имеет второй порядок аппроксимации на сетке с постоянными пространственными шагами. Для этой схемы выполнены законы сохранения массы, импульса, энергии и вихря, принцип максимума.

Границу раздела газ — жидкость будем определять точками пересечения линии (поверхности) раздела с линиями сетки. Условие (1.2) будет выполнено, если точки границы раздела на каждом временном шаге отождествлены с частицами жидкости; скорости последних определены через потенциал ближайших к ним точек сетки (шаблона).

Аппроксимация условий на бесконечности не нарушает баланса энергии и импульса. Из сохранения кинетической энергии следует, что норма скорости в сеточном пространстве ограничена. Это означает устойчивость схемы на линейных течениях, а в силу аппроксимации — и ее сходимость. Чтобы избежать складок на границах раздела, шаг по времени должен быть ограничен условием

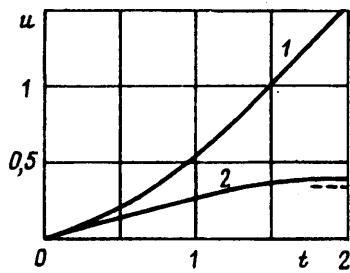
$$\tau < \frac{(R_a - R_b)^2}{(U_b - U_a)(R_a - R_b)}$$

где  $a, b$  — соседние частицы жидкости границы раздела со скоростями  $U_a, U_b$  и радиус-векторами  $R_a, R_b$ .

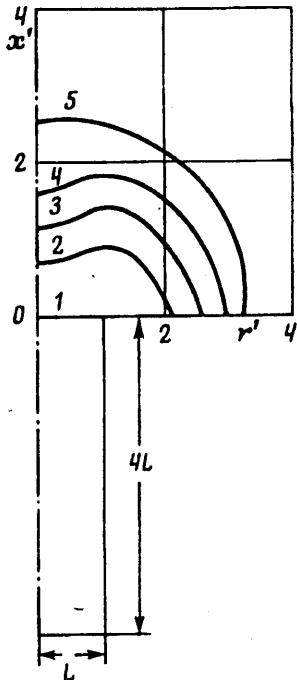
Способ аппроксимации свободной поверхности и ее перестройки при движении является причиной появления эффективного поверхностного натяжения разностной природы:  $\sigma_h = \rho g h^2 / 3$ , где  $h$  — шаг разностной сетки [2]. Аппроксимационное поверхностное натяжение ограничивает рост коротковолновых возмущений. С уменьшением шага сетки растет не только точность расчета, но и влияние коротковолновых гармоник разностного решения, а так как последние развиваются значительно быстрее искомого решения, то они существенно его исказят. Учет этого вычислительного эффекта при моделировании процессов, связанных с неустойчивостью Рэлея — Тейлора, требует выбора между желаемой точностью расчета и величиной аппроксимационного поверхностного натяжения, достаточного для компенсации коротковолновых возмущений свободной поверхности. В расчетах этот эффект влияния коротковолновых возмущений просто обнаружить на неравномерной сгущающейся сетке. Негативное влияние на решение высокочастотных возмущений проявляется в той части свободной границы, где плотность линий сетки наибольшая.

Алгоритм тестировался на задаче Рэлея о схлопывании сферического пузырька в несжимаемой жидкости и показал хорошее совпадение с аналитическим решением.

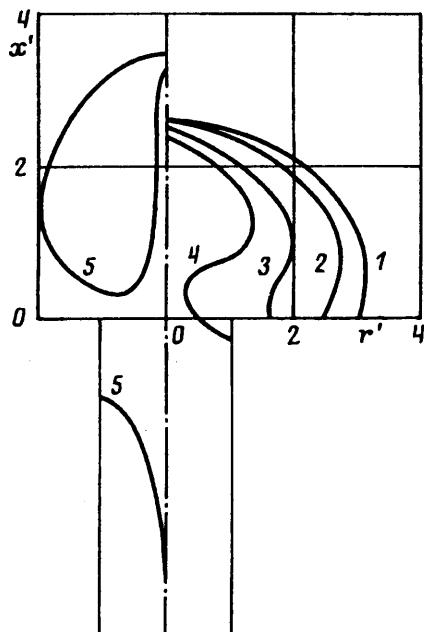
3. Рассмотрим плоскую задачу об эволюции границы раздела тяжелой несжимаемой жидкости, находящейся над более легкой, т. е. плоскую задачу о неустойчивости Рэлея — Тейлора. Переменная  $x$  направлена вдоль границы раз-



Фиг. 1



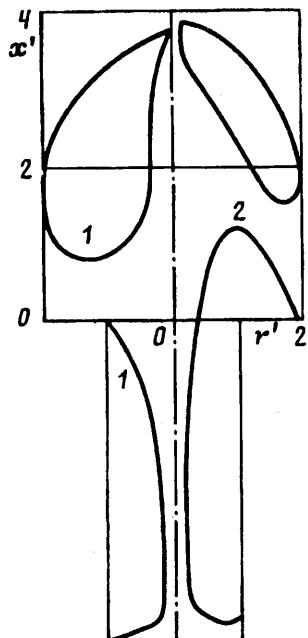
Фиг. 2



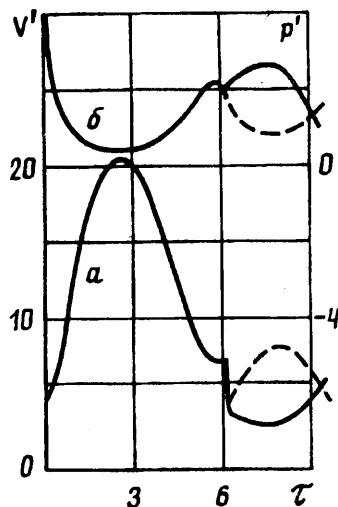
Фиг. 3

дела, а у перпендикулярна ей. Тяжелая несжимаемая жидкость находится в области  $u > 0$ . Давление в более легкой жидкости считается постоянным и оно является единственным динамическим воздействием легкой жидкости на тяжелую несжимаемую жидкость. Вводим начальное возмущение границы раздела жидкостей  $u = 0,1 \cos \pi x$ . Ширина расчетной области  $0 \leq x \leq 1$ , ускорение силы тяжести  $g = -1$ . Шаг сетки в расчете полагался равным 0,05, шаг по времени  $\tau \leq 0,001$ . В расчете начальное возмущение границы раздела развивается в струи тяжелой жидкости и пузыри легкой жидкости. На фиг. 1 приведен график скоростей  $u$  и нижней точки струи (кривая 1) и верхней точки пузыря (кривая 2).

Сравнение численного решения с асимптотическим решением [3] показало, что скорость  $u$  струи быстрее выходит на асимптотический режим, при котором ее рост линейно зависит от времени. Менее удовлетворительно совпадает скорость верхней точки пузыря  $u = 0,4$ , которая превышает асимптотическое значение [3] 0,339, показанное горизонтальной штриховой линией. В численных расчетах, проведенных разными методами [2, 4, 5], также получено несколько завышенное значение асимптотической скорости пузыря.



Фиг. 4



Фиг. 5

4. В процессе эволюции пузыря возможно наступление момента, когда часть границы пузыря с одним распределением потенциала войдет в соприкосновение (сольется) с другой частью границы с иным распределением потенциала. В этот момент происходит переход области решения из односвязной в многосвязную, при этом циркуляция по контуру, который не может быть стянут в точку, не равна нулю. Обычно на этом заканчивается численный расчет на ЭВМ. Для возможности продолжения модели расчета была модифицирована. Через крайние точки соприкоснувшихся границ проводился разрез с разными значениями потенциала на противоположных берегах разреза и на разрезе ставилось условие непрерывности скорости.

В разностном алгоритме прямой разрез проходил через одну из крайних точек слившейся границы параллельно линиям сетки  $x = \text{const}$ . В точках пересечения разреза и линий сетки  $r = \text{const}$  вводились дополнительные узлы двух берегов и в этих узлах выполнялось уравнение Лапласа с условием равенства касательных и нормальных компонент скоростей по разным берегам разреза. И при этом появляется циркуляция по замкнутому контуру, охватывающему пузырь и пересекающему разрез.

5. Пусть под тяжелой несжимаемой жидкостью находится полость с газом в форме прямого кругового цилиндра конечной высоты. Цилиндрическую систему координат совместим с осью симметрии цилиндра, начало поместим в верхней части полости (фиг. 2). Радиус полости  $L$  примем за характерный линейный размер, а ее высоту положим равной  $4L$ . Газовый объем отделен от жидкости плоской диафрагмой ( $x = 0, r < L$ ). Область, заполненная жидкостью, ограничена жестким экраном ( $x = 0, L < r < \infty$ ), т. е. имеем безграничную жидкость с граничными условиями непротекания на экране и условиями на бесконечности. Давление газов в полости больше характерного гидростатического давления  $p_1$  в жидкости на уровне экрана ( $x = 0$ ).

В начальный момент времени  $t = 0$  диафрагма мгновенно исчезает. Задача определения возникающего при этом течения жидкости решается конечно-раз-

ностным методом. Использовалась неравномерная расчетная сетка, сгущающаяся в зонах кумулятивных струй.

Величина  $A (gL)^{-1/2}$ , определяющая взаимное влияние поверхностных и массовых сил, в расчетах принималась неизменной и равной 5 ( $A (gL)^{-1/2} = 5,09$ ). Отношение начального давления газа  $p_s^*$  к  $p_i$  полагалось большими единицами и равным 2,5; 3; 4; 4,5; 5; 5,5. Показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

Расчеты течений при  $t > 0$  и  $p_s^*/p_i = 4$  представлены на фиг. 2—4 в плоскости переменных  $x' = x/L$ ,  $r' = r/L$  в виде конфигураций границы раздела сред для фиксированных отношений  $At/L \equiv \tau$ , а на фиг. 5 — в виде зависимостей безразмерных объема газового пузыря  $V' \equiv V/L^3$  (фиг. 5, а) и давления  $p' \equiv p/p_i$  (фиг. 5, б) от параметра  $\tau$ . (При других соотношениях  $p_s^*/p_i$  в исследованном диапазоне  $2,5 \leq p_s^*/p_i \leq 5,5$  получаются примерно такие же закономерности, что и для представленного случая.)

Значение параметра  $\tau$  ограничено моментом времени формирования вторичного газового пузыря. Очевидно, что заполнение полости является колебательным процессом, в каждом периоде которого происходит отделение газового пузыря.

Остановимся более подробно на протекающих физических процессах. Вначале под действием избыточного давления газов граница раздела газ — жидкость приобретает выпуклую форму (фиг. 2, кривые 1—5:  $t = 0; 0,63; 1,03; 1,48; 3,02$ ), объем газа возрастает (фиг. 5, а, сплошная кривая), а давление в соответствии с соотношением (1.4), наоборот, падает (фиг. 5, б, сплошная кривая). Вследствие инерционности жидкости расширение газа ( $dV/dt > 0$ ) продолжается и при достижении разряжения в газе в сравнении с гидростатическим давлением  $p_i$  ( $p(t)/p_i < 1$ ). Наибольший объем и наибольшее разрежение газа достигается при нулевой скорости изменения объема газа ( $dV/dt = 0$ ;  $t = 3,02$ ; фиг. 2, кривая 5). Граница раздела с течением времени сильно деформируется и из-за влияния весомости жидкости к моменту времени, когда вторично  $dV/dt = 0$ , имеет ярко выраженную горловину, расположенную близко к отверстию осесимметричной полости.

Дальнейшее сжатие (фиг. 3, кривые 1—4:  $t = 3,44; 4,18; 5,08; 5,96$ ), а затем и расширение газа приводит к появлению пика давления газа, величина которого из-за затрат энергии на деформацию границ намного меньше начального давления.

Сужение горловины приводит сначала к смыканию ее границ и разделении газовой полости на две части; верхнюю часть — расположенный над отверстием газовый пузырь и нижнюю часть — состоящую в основном из объема осесимметричной полости. Отрывом части массы газа объясняется разрыв функции, описывающей поведение объема (фиг. 5, а). Дальнейшее схождение жидкости в месте дробления пузыря приводит к формированию двух направленных в противоположные стороны кумулятивных струй (фиг. 3; кривая 5;  $t = 7,48$ ). Поведение объема и давления во вновь образовавшемся верхнем пузыре описаны пунктирными кривыми фиг. 5.

Верхняя струя через некоторый промежуток времени достигает верхней границы газового пузыря, в результате газовый пузырь приобретает торообразную форму, а область течения становится двусвязной. Нижняя струя развивается более длительное время, пока не достигает днища полости. Взаимодействуя с днищем и стенками полости, струя разворачивается и в полости наряду с центральной струей жидкости формируется пристенная кольцевая струя, которая направлена вверх (фиг. 4, кривые 1, 2;  $t = 8,67; 9,66$ ).

Эта кольцевая струя имеет расход, равный приходу центральной струи, поэтому в расчете в окрестности днища полости реализуется квазистационарное решение: форма свободной поверхности в этом районе с точностью до графического

представления не меняется. При достижении кольцевой струей верхней части нижнего пузыря расчет прекращался.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
2. Гасилов В. А., Головизнин В. М., Таран М. Д. и др. О численном моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости: Препринт № 70. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1979. 59 с.
3. Garabedian P. R. On steady-state bubbles generated by Taylor instability//Proc. Roy. Soc. London; Ser. A. 1957. V. 241. № 1266. P. 423—431.
4. Hirt C. W., Cook J. L., Butler T. D. A lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface//J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 1. P. 103—124.
5. Prosperetti A., Jacobs J. W. A numerical method for potential flows with a free surface//J. Comput. Phys. 1983. V. 51. № 3. P. 365—386.

Томск, Миасс

Поступила в редакцию  
28.I.1992