МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1993

УДК 532.546 : 517.53

© 1993 г. В. М. ЕНТОВ, Д. Я. КЛЕЙНБОК, П. И. ЭТИНГОФ

ТЕЧЕНИЯ ХЕЛЕ — ШОУ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, СОЗДАВАЕМЫЕ МУЛЬТИПОЛЯМИ

Рассматривается обобщение метода моментов, предложенного С. Ричардсоном, на течения со свободной границей в лотке Хеле — Шоу, генерируемые мультиполями. Исследуется эволюция кругового контура при работе единственного мультиполя порядка n в нуле или в бесконечно удаленной точке. Показывается, что решение существует только до некоторого момента t^*, когда на границе области образуется n симметричных точек возврата, направленных в сторону мультиполя. Для произвольной начальной области удается получить оценку времени существования решения.

1. Задачи Хеле — Шоу и метод Ричардсона. Рассмотрим течение вязкой жидкости в лотке Хеле — Шоу. Лоток представляет собой две параллельные пластины, разделенные узким зазором толщины b. Движение жидкости в такой системе можно считать плоскопараллельным [1], а усредненная по толщине зазора скорость $\mathbf{w}(x, y)$ движения жидкости в точке (x, y) плоскости лотка удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = -\frac{b^2}{12\mu}\nabla p = \nabla\Phi; \quad \Phi = -\frac{b^2 p}{12\mu} \tag{1.1}$$

где $p(x, y)$ — давление жидкости, μ — вязкость жидкости, Φ — потенциал скорости.

Данная система математически аналогична задаче фильтрации в плоском однородном пласте при линейном законе фильтрации, что усиливает интерес к течениям Хеле — Шоу. Уравнения, аналогичные (1.1), возникают также при рассмотрении многих других физических процессов (рост кристаллов в пересыщенном растворе, плавление льда в воде — задача Стефана, и т. п.).

Рассмотрим задачу с подвижной границей для лотка Хеле — Шоу: пусть жидкость занимает область D плоскости лотка, меняющуюся во времени за счет течения жидкости при постоянном противодавлении на границе. Кинематическое условие и условие постоянства давления на границе имеют вид

$$\Phi = 0, \quad v_b = \frac{\partial\Phi}{\partial n}, \quad (x, y) \in \partial D \tag{1.2}$$

где v_b — скорость движения границы в направлении собственной нормали.

Из уравнений (1.1) следует, что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области D, за исключением множества L особых точек потока; при этом задается асимптотика при приближении к L

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1.3}$$

$$\Phi(x, y) = \sigma(x, y) + O(1), \quad (x, y) \in D \tag{1.4}$$

где σ — функция особенностей. Задача состоит в нахождении семейства областей $D(t)$ и семейства потенциалов Φ_t, удовлетворяющих (1.2)—(1.4), по заданной начальной области $D(0)$.

В задачах, рассматривавшихся Ричардсоном [2, 3], а до него, начиная с 40-х годов, многими советскими авторами [4—7], множество L состоит из конечного числа точек: $L = \{x_j, y_j, i = 1, ..., N\}$ — источников или стоков с мощностями q_j

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} q_j \ln [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2]^{1/2}$$

Основой развитого Ричардсоном метода решения этой задачи служит следующая

Теорема 1 [2]. Пусть $D(t)$ — ограниченная область, занимаемая жидкостью в момент t, $u(x, y)$ — гармоническая функция в $D(t)$, продолжающаяся на окрестность $D(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt} M_u [D(t)] = \sum_{j=1}^{N} q_j u(x_j, y_j); \quad M_u [D(t)] \equiv \int_{D(t)} u \, dx \, dy \tag{1.5}$$

Из этой теоремы следует, что, хотя область $D(t)$ неизвестна при $t > 0$, можно легко определить значение величин $M_u[D(t)]$, где $\Delta u = 0$ в $D(t)$, путем интегрирования (1.5). Таким образом, решение задачи сводится к отысканию односвязной ограниченной области D по заданным моментам Ричардсона — значениям интегралов $M_u[D(t)]$, где $\Delta u = 0$ в D. Восстановление областей по моментам будет описано в разд. 3 на конкретном примере.

Вообще говоря, эта задача имеет не единственное решение: существуют различные односвязные области с одинаковыми моментами [8]. Однако если области D_1 и D_2 достаточно близки, то существует гармоническая в $D_1 \cup D_2$ функция u такая, что $M_u[D_1] \neq M_u[D_2]$ (теорема о локальной единственности), что обеспечивает не более чем единственность решения задачи о нахождении гладкого семейства областей $D(t)$.

Результат, аналогичный теореме 1, справедлив и для неограниченной области $D(t)$, дополнение к которой $\overline{D(t)}$ («пузырь») ограничено и односвязно.

Теорема 2 [9]. Если u — гармоническая в окрестности $D(t)$ и в бесконечности функция, то

$$\frac{d}{dt} \int_{D_R(t)} u(x, y) \, dx \, dy = \sum_{j=1}^{N} q_j u(x_j, y_j) \tag{1.6}$$

где $D_R(t)$ — пересечение $D(t)$ с кругом достаточно большого фиксированного радиуса R.

Для такой постановки теорема о локальной единственности также имеет место, что позволяет говорить о восстановлении области D по моментам $M_u[D_{2R}]$.

2. Течения, создаваемые мультиполями. Введем в плоскости лотка комплексную координату $z = x + iy$. Выберем точку a на комплексной плоскости и натуральное число n и рассмотрим систему из $2n$ источников (стоков) в точках $z_k = a + \varepsilon e^{ik\pi/n}$ с мощностями $q_k = \frac{1}{2}(-1)^k M \varepsilon^{-n}$ (M и ε — комплексные числа, выбираемые так, чтобы отношение M/ε^n было вещественным). Зафиксируем теперь M и устремим ε к нулю. Тогда потенциал этой системы источников и стоков будет стремиться к функции

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} M \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(z - a)^n} \right) + \text{const} \tag{2.1}$$

которая и называется потенциалом мультиполя порядка n с моментом M в точке a. Иными словами, мультиполю порядка n в точке a соответствует полюс порядка n в точке a комплексного потенциала течения.

Аналогичным образом потенциал мультиполя порядка n с моментом M в бесконечно удаленной точке равен

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} M \operatorname{Re} (z^n) + \text{const} \tag{2.2}$$

Он получается как предел потенциала комбинации источников и стоков с мощностями $q_k = {}^1/_2 (-1)^k M l^n$ в точках $z_k = l e^{i k\pi/n}$, $k = 0,\dots, 2n-1$, если устремить l к бесконечности.

Рассмотрим течения Хеле — Шоу со свободной границей, генерируемые мультиполями, т. е. такие, для которых в формулировке (1.2)—(1.4) функция особенностей $\sigma(x, y)$ имеет вид суммы мультиполей (2.1) и (2.2). Ограничимся двумя простейшими постановками.

1. Область $D(0)$ ограничена и содержит начало координат, где расположен мультиполь порядка n с моментом M

$$L = \{0\}, \quad \sigma(z) = -\frac{1}{2\pi} M \operatorname{Re} z^{-n}$$

2. Дополнение к области $D(0)$ ограничено, а единственный мультиполь порядка n с моментом M находится в бесконечно удаленной точке

$$L = \{\infty\}, \quad \sigma(z) = -\frac{M}{2\pi} \operatorname{Re} z^n$$

Для получения аналога теоремы 1 для задачи *1* воспользуемся описанной выше аппроксимацией потенциала мультиполя с помощью суммы потенциалов источников и стоков. Пусть $D^\varepsilon(t)$ — решение задачи об эволюции области $D(0)$ под действием системы источников и стоков, описанной в начале параграфа. Тогда по теореме 1

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D^\varepsilon(t)} u(z)\, dx\, dy = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2} (-1)^k \frac{M}{\varepsilon^n} u(\varepsilon e^{i k\pi/n}) \tag{2.3}$$

где u — гармоническая функция комплексного аргумента $z = x + iy$.

Будем считать, что $u(z)$ — комплекснозначная аналитическая (а значит, гармоническая) функция — для дальнейшего этого будет достаточно. Перепишем (2.3) в виде

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D^\varepsilon(t)} u\, dx\, dy = \frac{M}{(n-1)!} \left(\frac{(n-1)!}{2\varepsilon^n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k u(\varepsilon e^{i k\pi/n}) \right) \tag{2.4}$$

Легко проверить, что выражение, заключенное в скобки в правой части (2.4), представляет собой разностный аналог для n-й производной функции u в нуле, т. е. стремится к $u^{(n)}(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому если $D(t)$ — решение задачи *1* с тем же начальным условием, то

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D(t)} u\, dx\, dy = \frac{M}{(n-1)!} u^{(n)}(0) = nMC_n \tag{2.5}$$

где C_n — коэффициент при z^n в разложении $u(z)$ в ряд Тейлора в точке $z = 0$.

Применяя аналогичные рассуждения к задаче *2*, придем к равенству

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D_R(t)} u\, dx\, dy = \frac{M}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} u(z) z^n\, dz = nMC_{-n} \tag{2.6}$$

для аналитической в окрестности $D(t)$ и бесконечно удаленной точке функции $u(z)$; здесь Γ_R — окружность достаточно большого радиуса R, C_{-n} — коэффициент при z^{-n} в разложении $u(z)$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке.

Приведенные здесь интуитивные рассуждения можно, следуя доказательству Ричардсона для случая точечных источников, подкрепить строгим выводом формул (2.5) и (2.6), основанным на анализе постановки (1.2)—(1.4). Кроме того, можно выписать аналоги равенств (2.5) и (2.6) для задач об эволюции области, занимаемой жидкостью под влиянием произвольного количества произвольным образом расположенных источников, стоков и мультиполей разных моментов и порядков.

3. **Простейшие точные решения.** Возьмем в качестве начальной области $D(0)$ круг радиуса R с центром в начале координат и рассмотрим его эволюцию $D(t)$ под влиянием мультиполя порядка n с моментом M в нуле.

Для решения этой задачи введем, следуя [2], последовательность моментов области $D(t)$

$$M_k(D(t)) = \int_{D(t)} z^k\, dx\, dy \tag{3.1}$$

Легко видеть, что $M_0(D(0)) = \pi R^2$, $M_k(D(0)) = 0$ при $k \geq 1$. Подставляя $u(z) = z^n$ в формулу (2.5), получим, что все моменты $D(t)$, кроме M_n, не меняются со временем; более точно

$$M_0(D(t)) = \pi R^2, \quad M_n(D(t)) = Mnt \tag{3.2}$$

$$M_k(D(t)) = 0, \quad k \neq 0, n \tag{3.3}$$

Для односвязной ограниченной области D, содержащей начало координат, равенства [2] $M_k(D) = 0$, $k > n$, верны тогда и только тогда, когда каноническое конформное отображение единичного круга K на D, задаваемое условиями $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, является полиномом степени не выше $n+1$. Таким образом, из (3.3) следует, что отображение f_t: $K \to D(t)$ можно искать в виде

$$f_t(\zeta) = a_1(t)\,\zeta + \ldots + a_{n+1}(t)\,\zeta^{n+1}, \quad a_1(t) > 0$$

Далее, область $D(t)$ должна переходить в себя при повороте на угол $2\pi/n$, поэтому $a_k(t) = 0$ при $2 \leq k \leq n$ и можно записать

$$f_t(\zeta) = A(t)\,\zeta + B(t)\,\zeta^{n+1}, \quad A(t) > 0 \tag{3.4}$$

Чтобы определить $A(t)$ и $B(t)$, вычислим $M_0(D(t))$ и $M_n(D(t))$ с помощью подстановки $z = f_t(\zeta)$ в (3.1), после чего из (3.2) будем иметь

$$|A|^2 + (n+1)\,|B^2| = R^2, \quad \pi A^{n+1}\overline{B} = Mnt \tag{3.5}$$

Предположим, что $M > 0$. Тогда $A, B > 0$ и равенства (3.5) записываются в виде системы

$$A^2 + (n+1)\,B^2 = R^2, \quad B = Mnt/\pi A^{n+1} \tag{3.6}$$

Решение этой системы в плоскости (A, B) определяется точкой пересечения эллипса Γ_1 и гиперболы Γ_2, задаваемых первым и вторым уравнениями (3.6). При малых t эти кривые пересекаются в двух точках (одной из них соответствует функция (3.4), неоднолистная в K). При некотором $t = t^*$ кривая $\Gamma_2(t)$ касается $\Gamma_1(t)$, и при $t > t^*$ система (3.6) решений не имеет. С помощью несложных вычислений можно найти значение t^* — «время жизни» круга радиуса R

$$t^* = \frac{\pi R^{n+2}}{Mn}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2(n+1)}$$

Далее, легко получить, что $A(t^*) = (n+1)B(t^*)$. Это означает, что кривая $\partial D(t^*)$ представляет собой эпициклоиду, описываемую точкой окружности, катящейся без проскальзывания по окружности в n раз большего радиуса. Таким образом, при $t = t^*$ граница области образует n симметричных заострений, после чего решение не продолжается.

Найдем теперь решение задачи *2* в предположении, что начальная область — внешность круга радиуса R с центром в нуле. В качестве последовательности моментов $D(t)$ здесь следует взять величины

$$M_k(D(t)) = \int_{D_R(t)} z^{-k}\, dx\, dy, \quad k > 0; \quad M_0(D(t)) = \int_{D_R(t)} dx\, dy - \pi R^2$$

где M_0 есть взятая с обратным знаком площадь пузыря.

Пользуясь начальным условием, а также формулой (2.6), получим

$$M_0(D(t)) = -\pi R^2, \quad M_n(D(t)) = Mnt \tag{3.7}$$

$$M_k(D(t)) = 0, \quad k \neq 0, \ n \tag{3.8}$$

Из равенства нулю всех моментов с номером, большим n, следует, что если f_t: $K \to D(t)$ — каноническое конформное отображение (со свойствами $f_t(0) = \infty$, $\operatorname{Res} f_t > 0$), то функция $\zeta f_t(\zeta)$ есть полином степени не выше n. Пользуясь симметрией области, можно искать отображение $f_t(\zeta)$ в виде

$$f_t(\zeta) = \frac{A(t)}{\zeta} + B(t)\,\zeta^{n-1}, \quad A(t) > 0 \tag{3.9}$$

Если положить $M > 0$, то будем иметь $B(t) < 0$ и параметры A и B будут определяться из системы, аналогичной (3.6)

$$A^2 - (n-1)B^2 = R^2, \quad b = -\pi^{-1} MntA^{n-1} \tag{3.10}$$

Случай $n = 1$ тривиален (круглый пузырь смещается вдоль оси x без изменения формы); далее можно выделить две принципиально различные ситуации.

При $n = 2$ первое уравнение (3.10) задает гиперболу Γ_1, а второе — прямую $\Gamma_2(t)$ с наклоном, линейно зависящим от времени. При малых $t\Gamma_1$ и $\Gamma_2(t)$ пересекаются в одной точке (A, B) и пузырь $\overline{D(t)}$ представляет собой эллипс

$$A(t) = \frac{R}{\sqrt{1-(2Mt/\pi)^2}}, \quad B(t) = \frac{-2MRt}{\pi\sqrt{1-(2Mt/\pi)^2}}, \quad \frac{x^2}{(A+B)^2} + \frac{y^2}{(A-B)^2} = 1 \tag{3.11}$$

При $t = t^* = \pi/2M$ прямая $\Gamma_2(t)$ совпадает с асимптотой Γ_1 и решение перестает существовать; легко убедиться, что при $t \to t^*$ эллипс (3.11) стремится к мнимой оси. Таким образом, здесь за конечное время t^* граница области $D(t)$ уходит на бесконечность.

При $n > 2$ задача совершенно аналогична рассмотренной ранее задаче для круга. При малых t гипербола Γ_1 и степенная кривая $\Gamma_2(t)$ пересекаются в двух точках, одна из которых соответствует решению задачи: при $t = t^*$, где

$$t^* = \frac{\pi R^{n-2}}{Mn}\,\frac{(n-2)^{1/2(n-2)}}{(n-1)^{1/2(n-1)}} \tag{3.12}$$

эти кривые касаются и при $t > t^*$ точек пересечения нет. Положив $t = t^*$, получим из (3.10), что $A = -(n-1)B$, т. е. кривая $\partial D(t^*)$ — гипоциклоида, описываемая точкой окружности, катящейся внутри окружности в n раз большего радиуса. Таким образом, здесь также при $t = t^*$ образуется n симметричных направленных к мультиполю точек возврата, после чего решение не продолжается.

Выражение (3.12) для «времени жизни» круглого пузыря радиуса R будет справедливо и в случае $n = 2$, если положить $0^0 = 1$.

Описанные здесь простые и нетривиальные решения задач Хеле — Шоу со свободной границей наглядно иллюстрируют идеи С. Ричардсона, относящиеся к восстановлению области по набору ее моментов. Тот же подход применим и к задачам с более сложным начальным условием и с большим количеством особых точек потока жидкости. В этих случаях краевая задача (1.3)—(1.6) также сводится к системе алгебраических уравнений на параметры, входящие в выражение для функции f_t: $K \to D(t)$.

4. Оценка времени существования решения. Утверждения разд. 2 можно использовать не только для построения точных решений. В качестве еще одного применения докажем на основе (2.5), что любое решение задачи *1* перестает существовать за конечный промежуток времени, и получим оценку этого промежутка.

Пусть семейство областей $D(t)$ есть решение задачи *1* с начальным условием $D(0) = D$. Рассмотрим преобразование Коши области $D(t)$ — функцию комплексного аргумента

$$h_{D(t)}(w) = \frac{1}{\pi} \int_{D(t)} \frac{dx\,dy}{w - z} \tag{4.1}$$

Эта функция непрерывна при всех w и аналитична в $\overline{D(t)}$; кроме того [11], при всех комплексных w верно неравенство $|h_{D(t)}(w)| \le r$, где $S = \pi r^2$ — площадь области $D(t)$ (она не зависит от времени).

Пусть для некоторого τ решение $D(t)$ существует при $0 \le t \le \tau$. Функция $\rho(t) = \sup|z|$, $z \in D(t)$, достигает своего максимума на $[0, \tau]$, поэтому при достаточно большом по модулю w все области $D(t)$, $0 \le t \le \tau$, не содержат w, значит, функция

$$u(z) = \frac{1}{\pi(w - z)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}} \tag{4.2}$$

будет аналитической в $D(t)$ при всех t, $0 \le t \le \tau$, и можно применить результаты разд. 2. Равенство (2.5) в сочетании с (4.1) и (4.2) после интегрирования от 0 до τ дает

$$h_{D(\tau)}(w) - h_{D(0)}(w) = \frac{Mn\tau}{\pi w^{n+1}} \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) в силу принципа аналитического продолжения верно для всех w, не лежащих в $D(0) \cup D(\tau)$. Поскольку площадь областей $D(0)$ и $D(\tau)$ равна πr^2, их объединение не может покрыть целиком замкнутый круг радиуса $r\sqrt{2}$. Взяв $|w| \le r\sqrt{2}$, $w \in D(0) \cup D(t)$, получим из (4.3)

$$|h_{D(\tau)}(w) - h_{D(0)}(w)| \ge \frac{Mn\tau}{\pi r^{n+1} 2^{1/2(n+1)}} \tag{4.4}$$

Так как $|h_{D(t)}(w)| < r$, то левая часть (4.4) не превосходит $2r$. Отсюда и следует оценка для τ

$$\tau \le \frac{\pi r^{n+2} 2^{1/2(n+3)}}{nM} \tag{4.5}$$

В задаче *2* пример круглого пузыря, движущегося с постоянной скоростью в однородном потоке (диполь в бесконечно удаленной точке), говорит о существовании решений, неограниченно продолжающихся во времени. Вопрос о наличии таких решений при $n > 2$, а также о существовании более строгих, чем (4.5), оценок для задачи *1* остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. 1958. A. V. 245. № 1242. P. 312—329.
2. *Richardson S.* Hele — Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. № 4. P. 609—618.
3. *Richardson S.* Some Hele — Shaw flows with time-dependent free boundaries // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 263—278.
4. *Галин Л. А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 250—253.

5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254—257.
6. *Виноградов Ю. П., Куфарев П. П.* О некоторых частных решениях задачи фильтрации // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57. № 4. С. 335—338.
7. *Куфарев П. П.* Решение задачи о контуре нефтеносности для круга // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 8. С. 1333—1334.
8. *Sakai M.* Quadrature domains // Lecture Notes in Mathematics. V. 394. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 133 p.
9. *Этингоф П. И.* Об интегрируемости задач фильтрации с подвижной границей // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 42—47.
10. *Garnett J.* Analytic capacity and measure // Lecture Notes in Mathematics. V. 297. Berlin: Springer-Verlag, 1972. 138 p.
11. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. Т. 83. № 1—2. P. 101—129.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.1992