

УДК 532.542

© 1993 г. С. В. ШУЛЬГИН

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ГАЗА В ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ОДНИМ ЗАКРЫТЫМ КОНЦОМ

Исследованию стационарных возмущенных течений во вращающихся каналах посвящено много работ. В работе [1] исследовано стационарное возмущенное течение между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. В [2, 3] рассмотрены обусловленные вращением трубы возмущения течения Хагена — Пуазейля. В настоящей статье изучаются другие эффекты: распространение возмущений в длинной вращающейся трубе и их взаимодействие с торцевой поверхностью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное возмущенное течение вязкого несжимаемого газа в длинной цилиндрической трубе радиуса a с одним закрытым концом. Будем полагать, что труба равномерно вращается вокруг своей оси симметрии с частотой Ω . Ограничимся случаем, когда торцевая стенка ортогональна оси вращения. Введем цилиндрическую систему координат (R, φ, Z) с началом на торце трубы (фиг. 1). Компоненты вектора скорости по выбранным координатам обозначим соответственно U, V, W .

В рассматриваемой задаче можно выделить три характерные области течения (фиг. 1). Предположим, что труба достаточно длинная (бесконечная), чтобы можно было пренебречь влиянием входных условий (течение в области III) на течение внутри трубы. Тогда невозмущенное течение газа в трубе (в областях I и II) будет вращением газа с частотой Ω как твердого тела. В безразмерных переменных невозмущенное решение имеет вид

$$u_0 \equiv 0, \quad w_0 \equiv 0, \quad v_0 = r, \quad \frac{dp_0}{dr} = r$$

$$r = \frac{R}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad u = \frac{U}{\Omega a}, \quad v = \frac{V}{\Omega a}, \quad w = \frac{W}{\Omega a}$$

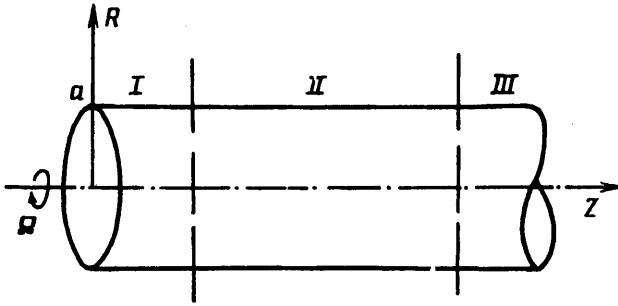
Предполагая малой интенсивность возмущенного течения, представим динамическое поле в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad w = w_0 + w_1, \quad p = p_0 + p_1$$

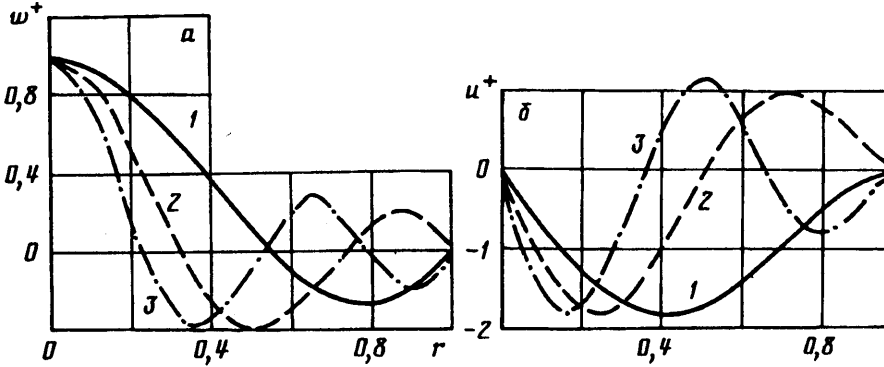
где величины с индексом 1 малы по сравнению с параметрами невозмущенного течения.

Тогда возмущенное стационарное течение газа в трубе описывается следующей линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса (1.1) с граничными условиями (1.2), в которой вследствие симметрии задачи искомые величины полагаются независимыми от координаты φ

$$2u_1 = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$2v_1 = \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ru_1)}{\partial r} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \text{Re} = \frac{a^2 \Omega}{\nu}$$

$$u_1 = v_1 = \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \quad u_1 = v_1 = w_1 \quad (r = 1),$$

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad (z = 0) \quad (1.2)$$

Здесь a — радиус трубы, ν — кинематическая вязкость газа.

2. Анализ решения уравнений при больших числах Рейнольдса. Рассмотрим случай $\text{Re} \rightarrow \infty$ (например, большие скорости вращения Ω). В областях I и II в направлении оси r заметное изменение искомых величин происходит на расстояниях $r \sim 1$ (за исключением малой окрестности угловой точки между стенкой и торцом трубы). Характерный же масштаб изменения искомых величин в направлении оси z в этих областях различен. Предположим, что вдали от торца (область II) заметное изменение величин скорости и давления происходит на расстояниях порядка длины трубы, а в области I — на расстояниях порядка толщины пограничного слоя, формирующегося на торцевой поверхности вследствие проскальзывания газа.

Полагая, что вязкие члены уравнения (1.1) порядка инерционных, в области II имеем

$$u_1 \sim \frac{v_1}{Re}, \quad v_1 \sim \max \left\{ p_1, \frac{u_1}{Re} \right\}, \quad w_1 \sim v_1 \frac{L_z}{Re}, \quad p_1 \sim \frac{w_1 L_z}{Re} \quad (2.1)$$

Здесь L_z — характерный масштаб течения в направлении z .

Из оценок (2.1) находим, что $L_z^2 \sim Re^2$. Это соотношение показывает, что вдали от торца характерный масштаб изменения искомых величин порядка величины числа Рейнольдса. Тогда из (2.1) имеем следующие оценки:

$$u_1 \sim v_1/Re, \quad v_1 \sim w_1, \quad p_1 \sim v_1 \quad (2.2)$$

Отсюда ясно, что вдали от торца возмущенное течение газа направлено параллельно оси трубы (при $Re \rightarrow \infty$).

Рассмотрим область I (за исключением малой окрестности угловой точки). Полагая, что вязкие члены уравнения порядка инерционных, при $Re \rightarrow \infty$ имеем

$$u_1 \sim \frac{v_1}{Re L_z^2}, \quad v_1 \sim \frac{u_1}{Re L_z^2}, \quad w_1 \sim \frac{v_1}{Re L_z} \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует $L_z \sim 1/\sqrt{Re}$. Отсюда: $u_1 \sim v_1$, $w_1 \sim u_1/\sqrt{Re}$, т. е. отношение осевой скорости к радиальной обратно пропорционально \sqrt{Re} . На основании этих оценок из (1.1) следует, что в области I

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} \sim \frac{u_1}{Re}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} \sim v_1 \quad (2.4)$$

3. Возмущенное стационарное течение в длинных трубах. Рассмотрим область II. На основании соотношений (2.2) перейдем в (1.1), (1.2) к новым переменным

$$u_1^+ = u_1 Re, \quad v_1^+ = v_1, \quad w_1^+ = w_1, \quad p_1^+ = p_1, \quad z^+ = z/Re, \\ z^+, u_1^+, v_1^+, w_1^+, p_1^+ \sim 1$$

Пренебрегая в (1.1), (1.2) членами порядка $1/Re^2$ и выше, имеем

$$2u_1^+ = \frac{\partial^2 v_1^+}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_1^+}{r} \right), \quad 2v_1^+ = \frac{\partial p_1^+}{\partial r} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p_1^+}{\partial z^+} = \frac{\partial^2 w_1^+}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_1^+}{\partial r} \right), \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r u_1^+)}{\partial r} \right) + \frac{\partial w_1^+}{\partial z} = 0$$

$$u_1^+ = v_1^+ = \frac{\partial w_1^+}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \quad u_1^+ = v_1^+ = w_1^+ = 0 \quad (r = 1) \quad (3.2)$$

Будем рассматривать возмущения вида $f_1^+(r, z^+) = f^+(r) \exp(-\lambda z^+)$. Тогда уравнения (3.1) и граничные условия (3.2) принимают вид

$$2\lambda v^+ = -w^{+''} - \frac{w^{+'''} }{r} + \frac{w^{+'}}{r^2} \quad (3.3)$$

$$2u^+ = v^{+''} + \frac{v^{+'}}{r} - \frac{v^+}{r^2}, \quad \lambda w^+ = u^{+'} + \frac{u^+}{r}$$

$$u^+ = v^+ = w^{+'} = 0 \quad (r = 0), \quad u^+ = v^+ = w^+ = 0 \quad (r = 1) \quad (3.4)$$

Здесь штрих означает d/dr .

Путем элементарных преобразований задача (3.3), (3.4) сводится к следующей:

$$w^+ = -\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} w^+ \quad (x = r\lambda^{1/3}) \quad (3.5)$$

$$\frac{dw^+}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} w^+ = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} w^+ = 0 \quad (x = 0)$$

$$w^+ = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} w^+ = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} w^+ = 0 \quad (x = \lambda^{1/3}) \quad (3.6)$$

Можно показать, что оператор, стоящий в правой части уравнения (3.5), является самосопряженным в смысле скалярного произведения и его собственные значения имеют бесконечный дискретный спектр [4]. Точка $x = 0$ — регулярная особая точка уравнения (3.5). Представим решение в окрестности $x = 0$ в виде степенного ряда

$$w^+(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \quad (3.7)$$

где α определяется из условия отсутствия в разложении членов с отрицательными степенями. Подставляя (3.7) в (3.5) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем рекуррентную систему для определения коэффициента c_j

$$f(\alpha + l) c_{\alpha+l} = 0 \quad (0 \leq l \leq 6)$$

$$c_{\alpha+m} - f(\alpha + m + 6) = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, j, \dots) \quad (3.8)$$

$$f(\alpha) = -1/4\alpha^2 (\alpha - 2)^2 (\alpha - 4)^2$$

Для определения степени α имеем уравнение

$$-1/4\alpha^2 (\alpha - 2)^2 (\alpha - 4)^2 = 0 \quad (3.9)$$

Так как (3.9) имеет три корня кратности два, то существует три следующих линейно-независимых решения [5] уравнения (3.5), удовлетворяющих условиям (3.6) при $x = 0$: $w_1^+ = c + \dots$, $w_2^+ = cx^2 + \dots$, $w_3^+ = cx^4 + \dots$

Из соотношений (3.8) получаем рекуррентную формулу для определения следующих коэффициентов разложения:

$$c_k = -1/4l^2 (l - 2)^2 (l - 4)^2 c_b, \quad l = k + 6$$

Таким образом, полагая $c_0 = 1$, имеем

$$w_1^+(x) = 1 - \frac{1}{576} x^6 + \dots, \quad w_2^+(x) = x^2 - \frac{1}{3136} x^8 + \dots,$$

$$w_3^+(x) = x^4 - \frac{1}{57600} x^{10} + \dots \quad (3.10)$$

Ряд (3.10) сходится, причем радиус сходимости равен бесконечности (при $k \rightarrow \infty$, $c_k \sim 1/k!$). Поэтому продлим решение (3.10) на всю область определения задачи (от $x = 0$ до $x = \lambda^{1/3}$). Функции $u^+(x)$ и $v^+(x)$ однозначно выражаются через найденное решение (3.10). На границе $x = \lambda^{1/3}$ на решение наложено условие $u^+ = v^+ = w^+ = 0$. Отсюда при $x = \lambda^{1/3}$ имеем

$$k_1 w_1^+ + k_2 w_2^+ + k_3 w_3^+ = 0, \quad k_1 v_1^+ + k_2 v_2^+ + k_3 v_3^+ = 0 \quad (3.11)$$

$$k_1 u_1^+ + k_2 u_2^+ + k_3 u_3^+ = 0$$

i	λ	k_1	k_2	k_3
1	3,4605	1	-0,4107	0,0429
2	5,9846	1	-0,3949	0,0393
3	8,4906	1	-0,3968	0,0394

Из условия нетривиальности решения системы (3.11) находим три первых собственных числа λ . Результаты расчета представлены в таблице.

Распределение возмущений осевой и радиальной компонент скорости по радиусу показано на фиг. 2, *a* и *б* соответственно. Кривая 1 соответствует первой моде возмущений, кривые 2 и 3 — второй и третьей. Осевая составляющая, начиная с некоторого значения r , становится отрицательной. Это говорит о том, что структура вторичного течения содержит зону обратных токов, причем суммарный расход в единицу времени через произвольное сечение трубы равен нулю для каждой из собственных функций. На фиг. 3 показано распределение по радиусу возмущения давления (система обозначений такая же, как на фиг. 2, *a*, *б*).

На основе проведенного анализа оценим глубину проникновения малых возмущений во вращающуюся трубу. Длина L , на которой возмущение затухает в e раз, равна $Re a/\lambda$. Этот результат сравнивался с данными эксперимента, проведенного на газодинамической установке, представляющей собой вращающуюся прозрачную трубу радиуса $a = 3,9$ см и длины $l = 70$ см с одним закрытым концом. Причем, согласно экспериментальным данным, $\nu = 0,145$ см²/с, $\Omega = 12$ с⁻¹, $Re = 1318$. Выберем наиболее слабо затухающее возмущение, т. е. $\lambda = 3,4605$. Тогда имеем $L \approx 1320$ см.

Таким образом, проведенная оценка объясняет экспериментальный факт проникновения возмущений в глубь трубы от открытого конца до торцевой поверхности. На фиг. 4, *a*, *б* показано распространение фронта дыма в разные моменты времени t_1 и t_2 соответственно ($t_1 < t_2$).

4. Торцевые эффекты. Рассмотрим задачу о стационарном возмущенном течении вязкого несжимаемого газа вблизи поверхности торца ($L_z \sim Re^{-1/2}$, $Re \rightarrow \infty$). На основании оценок (2.4), (2.5) перейдем в (1.1), (1.2) к новым переменным

$$\begin{aligned} w^- &= w_1 Re^{1/2}, \quad v^- = v_1, \quad u^- = u_1, \quad p_1 = p_1^-(r) + p_2^-(r, z^-)/Re, \\ z &= z^- Re^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Оставляя в (1.1), (1.2) члены главного порядка по числу Рейнольдса, получим

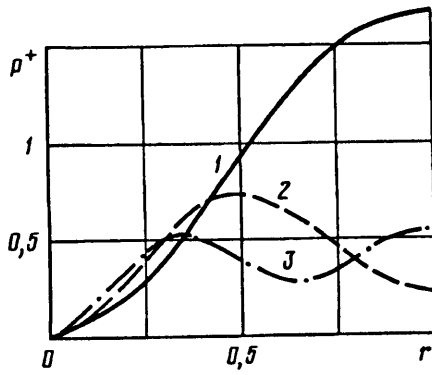
$$2v^- = \varphi(r) - \frac{\partial^2 u^-}{\partial z^{-2}}, \quad \varphi(r) = \frac{dp_1^-}{dr}, \quad 2u^- = \frac{\partial^2 v^-}{\partial z^{-2}} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p_2^-}{\partial z^-} = \frac{\partial^2 w^-}{\partial z^{-2}}, \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ru^-)}{\partial r} \right) + \frac{\partial w^-}{\partial z^-} = 0$$

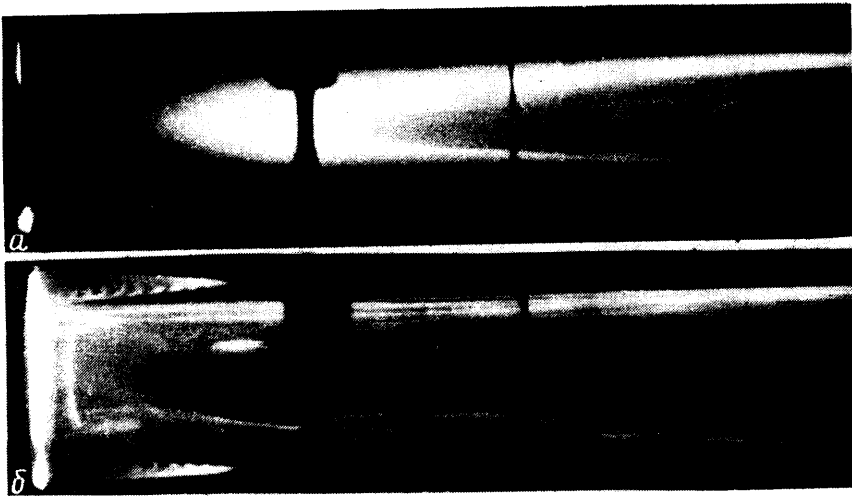
$$u^- = v^- = \frac{\partial w^-}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \quad u^- = v^- = w^- = 0 \quad (r = 1),$$

$$u^- = v^- = w^- = 0 \quad (z^- = 0) \quad (4.3)$$

Условия на границе $z^- \rightarrow \infty$ находятся из сращивания решения с внешним асимптотическим разложением (решением вдали от торца). Поэтому при $z^- \rightarrow \infty$ решение уравнений (4.2) должно быть ограничено.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из уравнений (4.2) и условий (4.3) имеем

$$v^- = \frac{1}{2} \varphi(r) - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 v^-}{\partial z^{-4}} \quad (4.4)$$

$$v^- = \frac{\partial^2 v^-}{\partial z^{-2}} = 0 \quad (z^- = 0) \quad (4.5)$$

Общим решением (4.4) является функция

$$v^-(r, z^-) = \frac{1}{2} \varphi(r) + \sum_{j=1}^4 \exp(\mu_j z^-) c_j(r)$$

$$\mu_j = \{1 + i, -1 - i, -1 + i, 1 - i\}$$

Из условия ограниченности решения и условий (4.5) находим, что

$$v^- = -1/2 \varphi(r) (\exp(-z^-) \cos z^- - 1) \quad (4.6)$$

Из (4.1), (4.2), (4.5) следует, что с точностью до неизвестной функции

$\varphi(r)$ решение во внутренней области $L_z \sim 1/\sqrt{\text{Re}}$ (внутреннее асимптотическое разложение) имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^-(r) + p_2^-(r, z^-)/\text{Re} \\ v_1 &= -1/2\varphi(r) (\exp(-z^-) \cos z^- - 1), \quad u_1 = -1/2\varphi(r) \exp(-z^-) \sin z^- \\ w_1 &= \text{Re}^{-1/2} (r\varphi(r))' ((\cos z^- + \sin z^-) \exp(-z^-) - 1)/2r \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\varphi(r)$ определяется из срачивания с внешним разложением.

Введем для внешнего решения следующие стандартные функции:

$$F_v(r) = -\frac{1}{2|\lambda|} \left(w^{*'''} + \frac{w^{*''}}{r} - \frac{w^{*'}}{r^2} \right), \quad F_w(r) = \frac{1}{|\lambda|} \left(u^{*'} + \frac{u^*}{r} \right) \quad (4.8)$$

$$F_u(r) = \frac{1}{2} \left(v^{*''} + \frac{v^{*'}}{r} - \frac{v^*}{r^2} \right), \quad F_p(r) = -\frac{1}{|\lambda|} \left(w^{*'''} + \frac{w^{*''}}{r} \right)$$

Представим внешнее разложение осевой компоненты скорости w_1 в виде

$$w_1 = C_+ F_w \exp(\lambda z^+) + C_- F_w \exp(-\lambda z^+) \quad (4.9)$$

Тогда из (1.1), (4.8) имеем

$$\begin{aligned} v_1 &= F_v (C_+ e^{\lambda z^+} - C_- e^{-\lambda z^+}), \quad u_1 = \frac{F_u}{\text{Re}} (C_+ e^{\lambda z^+} - C_- e^{-\lambda z^+}) \\ p_1 &= F_p (C_+ e^{\lambda z^+} - C_- e^{-\lambda z^+}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Процедура срачивания внутреннего разложения (4.7) с внешним разложением (4.9), (4.10) дает следующие условия:

$$C_+ = -C_- \quad (4.11)$$

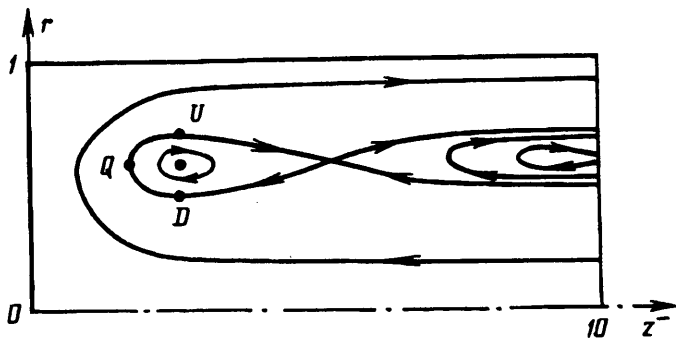
$$2C_+ F_v = 1/2\varphi(r), \quad p_1(r) = 2C_+ F_p(r) \quad (4.12)$$

Условие (4.11) означает, что внешняя компонента скорости w на внутренней границе внешней области обращается в ноль (условие непротекания). Условия (4.12) показывают, что на внешней границе пограничного слоя ($z^- \rightarrow \infty$) внутреннее асимптотическое разложение азимутальной скорости должно приближаться к ее внешнему асимптотическому разложению при $z^+ = 0$ и распределение радиального градиента давления $\varphi(r) = dp_1/dr$, входящее во внутреннее разложение, определяется из внешнего асимптотического разложения давления при $z^+ = 0$.

Таким образом, решение первого порядка, описывающее возмущенное стационарное течение в длинной вращающейся цилиндрической трубе с одним закрытым концом, имеет вид (за исключением малой окрестности вблизи угла между торцом и стенкой трубы)

$$\begin{aligned} \frac{w_1(r, z, \text{Re})}{C_+ F_w(r)} &= \exp\left(\frac{\lambda z}{\text{Re}}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda z}{\text{Re}}\right), \quad \text{Re} \rightarrow \infty, \quad z = \text{const} \\ \frac{v_1(r, z, \text{Re})}{F_v(r)} &= \frac{u_1(r, z, \text{Re})}{F_u(r)} \text{Re} = \frac{p_1(r, z, \text{Re})}{F_p(r)} = \\ &= C_+ \exp\left(\frac{\lambda z}{\text{Re}}\right) + \exp\left(-\frac{\lambda z}{\text{Re}}\right), \quad \text{Re} \rightarrow \infty, \quad z = \text{const} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$w_1(r, z, \text{Re}) = -\frac{C_+}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{1}{r} (rF_p'(r))' (1 - (\cos z^- + \sin z^-) e^{-z^-}), \quad \text{Re} \rightarrow \infty,$$



Фиг. 5

$$z^- = z \sqrt{\text{Re}} = \text{const}$$

$$v_1(r, z, \text{Re}) = -C_+ F_p'(r) (\exp(-z^-) \cos z^- - 1), \quad \text{Re} \rightarrow \infty,$$

$$z^- = z \sqrt{\text{Re}} = \text{const}$$

$$u_1(r, z, \text{Re}) = -C_+ F_p'(r) \exp(-z^-) \sin(z^-), \quad \text{Re} \rightarrow \infty,$$

$$z^- = z \sqrt{\text{Re}} = \text{const}$$

$$p_1(r, z, \text{Re}) = 2C_+ F_p(r)$$

В решение (4.13) входит произвольный коэффициент C_+ , определяющий величину амплитуды возмущений. В настоящей постановке задачи найти его не представляется возможным, так как он, вообще говоря, должен определяться из сращения асимптотического разложения (4.9), (4.10) с решением вблизи входной части трубы.

Введем в меридиональной плоскости функцию тока $\psi(r, z)$ и запишем для нее внешнее и внутреннее разложение

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = u_1 r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -w_1 r$$

$$\psi = -\frac{C_+ F_p r}{\lambda} \left(\exp \frac{\lambda z}{\text{Re}} + \exp \left(-\frac{\lambda z}{\text{Re}} \right) \right) + C_1$$

$$\psi = 2C_+ \text{Re}^{-1/2} F_p r ((\cos z^- + \sin z^-) \exp(-z^-) - 1) + C_2, \quad z^- = z \sqrt{\text{Re}}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 полагаются равными нулю. Это значит, что на оси трубы, на торце и на стенке значение функции тока равно нулю. Легко проверить, что внешнее и внутреннее разложение функции тока сращиваются.

Рассмотрим структуру линий тока вблизи торца. Дифференциальное уравнение линий тока в этой области имеет вид

$$\frac{dr}{dz^-} = 2 \frac{F_p r \exp(-z^-) \sin z^-}{(F_p r)' (1 - \exp(-z^-) (\cos z^- + \sin z^-))} \quad (4.14)$$

Ограничимся рассмотрением только первой моды возмущений. Легко видеть, что точки с координатами $r = 0,595$ (функция $(F_p r)'$ обращается в ноль), $z^- = \pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) являются изолированными особыми точками уравнения (4.14). Проведенный анализ показал, что точки с координатами $r = 0,595$, $z^- = 2\pi k$, где $k = 1, 2, \dots$, седловые, а точки $r = 0,595$, $z^- = (2k + 1)\pi$, где

$k = 0, 1, 2, \dots$, — центры (фиг. 5). Тогда уравнение линии тока, огибающей первую вихревую область, имеет вид

$$\psi(r, z^-) = -1,4116/\sqrt{\text{Re}} \quad (4.15)$$

Точки U и D , характеризующие максимальный диаметр вихревой области, лежат на линии $z^- = \pi$. Из (4.15) имеем $r_U = 0,6806$, $r_D = 0,5096$, т. е. диаметр вихревой области в физических переменных порядка $0,17a$, где a — радиус трубы. Точка Q , определяющая начало вихря, расположена на линии $r = 0,595$ на расстоянии $z^- = 2,342$ от торца.

Таким образом, структура линий тока в приторцевой области имеет интересную особенность — содержит экспоненциально затухающую по размеру систему замкнутых вихревых областей (фиг. 5). Напомним, что $z^- = z\sqrt{\text{Re}}$. Следовательно, при увеличении числа Рейнольдса вихревая область будет прижиматься к торцу трубы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич Ю. Г. Развитие локального возмущения в пограничном слое на искривленной поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 23—31.
2. Varua S. N. Secondary flow in a rotating straight pipe//Proc. Roy. Soc. London. 1964. V. A227. № 1168. P. 133—139.
3. Bennetts D. A., Hocking L. M. Pressure-induced flows at low Rossby numbers//Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 9. P. 1671—1676.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
5. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. С. 10—21.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1992