

УДК 532.526:536.24

© 1993 г. А. Б. ВАТАЖИН, М. А. ПОТОКИН, Е. К. ХОЛЩЕВНИКОВА
**ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ДЕФОРМАЦИИ
ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ**

Рассмотрена проблема интенсификации теплообмена в каналах и пограничных слоях путем целенаправленной деформации профиля скорости жидкости. Определены возникающие при этом дополнительные гидравлические потери, являющиеся «ценой» интенсификации теплообмена. На примере течений с малыми числами Прандтля продемонстрированы возможности управления теплообменом путем перераспределения скорости жидкости в каналах.

Проведено численное моделирование ламинарных и турбулентных течений жидкости и газа с теплообменом в каналах и пограничных слоях на основе современных моделей турбулентности (развитие течения в каналах с различными начальными профилями скорости, течения с шероховатостью стенок и течения в пограничных слоях при силовом воздействии на поток, вызывающем деформацию профиля скорости). Во всех случаях обнаружено, что интенсификация теплообмена может быть достигнута только за счет значительного возрастания гидравлических потерь.

Сформулирован класс автомодельных тепловых задач для течений жидкости в плоских диффузорах. Определены собственные функции — температурные моды — для различных профилей скорости с учетом неединственности решения классической динамической задачи для плоского диффузора и найдены соответствующие коэффициенты теплообмена.

1. Общие замечания. Проблеме интенсификации теплообмена посвящена обширная литература (см., например, [1—4]). Одним из основных вопросов в этой проблеме является величина сопутствующих дополнительных гидравлических потерь. Утверждения, что эти потери могут быть незначительными, по всей видимости, в большинстве случаев несостоятельны. В связи с этим общая постановка проблемы «интенсификация теплообмена — гидравлические потери» представляется весьма актуальной. При этом целесообразно рассматривать различные классы течений с интенсифицированным теплообменом и получать для этих классов по возможности общие выводы. Ниже будут рассмотрены вопросы интенсификации теплообмена при течении газа (жидкости) в каналах путем организации более высокой скорости потока u_w вблизи стенок (при сохранении расхода). Естественно, что такая целенаправленная деформация профиля скорости во входных (расположенных перед изучаемым участком течения) устройствах сопровождается дополнительными гидродинамическими потерями. Однако и на изучаемом участке течения увеличение теплового потока вследствие более интенсивной (связанной с увеличением скорости жидкости вблизи стенки) конвекции, как правило, также вызывает рост гидравлических потерь. Дадим качественную оценку последнему эффекту.

Для простоты рассмотрим двумерные течения несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами переноса в пограничных слоях или в каналах. Основные уравнения пограничного слоя имеют традиционную форму [5]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad (1.3)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\rho, \mu, \lambda, c = \text{const}) \quad (1.4)$$

$$y = 0: u = 0, v = 0, T = T_w; \quad y = \infty: u = u_\infty, T = T_\infty \quad (1.5)$$

Формулы (1.4) для напряжения трения τ и теплового потока q приведены для ламинарных течений. Соответствующие выражения для турбулентных течений будут даны ниже. В уравнениях (1.1)—(1.5) использованы общепринятые обозначения. Индексы ∞ и w относятся к набегающему потоку и поверхности стенки.

Учитывая, что конвективные и диффузионные члены в уравнениях (1.2) и (1.3) имеют одинаковый порядок величины, после интегрирования этих соотношений поперек динамического и теплового пограничного слоев, имеющих толщины δ и δ_T , получаем оценки

$$\tau_w \sim \rho u_\infty^2 (\delta/x), \quad q_w \sim \rho c u_\infty (T_w - T_\infty) (\delta_T/x) \quad (1.6)$$

Здесь τ_w и q_w — напряжение трения и тепловой поток на стенке. В этих и приводимых ниже оценках предполагается регулярное развитие пограничных слоев — без точек отрыва и присоединения потока.

Для ламинарного течения из сопоставления порядков конвективных и диффузионных членов в (1.2), (1.3) с учетом (1.4) находим известные формулы [5]

$$\frac{\delta}{x} \sim \text{Re}_x^{-r}, \quad \frac{\delta_T}{x} \sim (\text{Re}_x \text{Pr})^{-r}, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Re}_x = \frac{\rho u_\infty x}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda} \quad (1.7)$$

В случае турбулентного пограничного слоя степень $r \sim 0,2$.

Подставляя (1.7) в (1.6), находим, что при прочих одинаковых условиях справедливы следующие зависимости:

$$q_w \sim u_\infty^{1-r}, \quad \tau_w \sim u_\infty^{2-r} \quad (1.8)$$

Таким образом, деформация внешнего по отношению к пограничному слою профиля скорости, состоящая в увеличении скорости u_∞ вблизи стенки, сопровождается возрастанием теплового потока q_w (интенсификация теплообмена) и гораздо большим возрастанием трения на стенках (гидравлические потери). Количественно этот вывод представляется формулами

$$\frac{\delta q_w}{q_w} = (1-r) \frac{\delta u_\infty}{u_\infty}, \quad \frac{\delta \tau_w}{\tau_w} = (2-r) \frac{\delta u_\infty}{u_\infty}$$

$$\frac{\delta \tau_w}{\tau_w} = \kappa \frac{\delta q_w}{q_w}, \quad \kappa = \frac{2-r}{1-r} \quad (1.9)$$

где δu_∞ — независимая малая вариация скорости u_∞ , а δq_w и $\delta \tau_w$ — зависимые вариации теплового потока и трения на стенке. Для ламинарного и турбулентного течений имеем $\kappa \approx 3$ и $2,25$ соответственно. Следовательно, интенсификация теплообмена для ламинарного течения сопровождается трехкратным, а для турбулентного течения двухкратным возрастанием гидравлических потерь.

2. Теплообмен в каналах при малых числах Прандтля. Продемонстрируем возможности интенсификации теплообмена в каналах путем деформации профиля скорости на примере ламинарных течений при $\text{Pr} \ll 1$, когда можно использовать известный и простой математический аппарат. Интенсификация теплообмена, конечно, сопровождается более сильным ростом гидравлических потерь, однако

сам уровень этих потерь (вследствие малой толщины динамического пограничного слоя) невелик и в ряде случаев можно интересоваться только теплообменом, игнорируя потери на вязкое трение.

В указанной постановке динамические поля описываются уравнениями для течений невязкой среды, которые в случае движения несжимаемой жидкости в плоском канале постоянного сечения допускают решение

$$u = u(y), \quad v = 0, \quad p = \text{const} \quad (2.1)$$

где $u(y)$ — произвольная (неотрицательная) функция поперечной координаты.

Определим развитое тепловое поле в канале при заданном профиле скорости (2.1). Задача описывается уравнениями

$$u(y) \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad T = -\kappa x + t(y) \quad (2.2)$$

$$y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = h: -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = q_w = \text{const}$$

Здесь $y = 0$ — ось канала постоянной ширины $2h$. Течение предполагается симметричным. На стенках канала задан постоянный тепловой поток.

Решение уравнений (2.2) имеет вид

$$\text{Nu} = \frac{q_w h}{\lambda (T - T_w)}; \quad \text{Nu} = m^{-1} \quad (2.3)$$

$$m = \int_0^1 \varphi^2 dy^*; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

$$\varphi = \varphi(y^*) = \int_0^{y^*} u^* dy^*; \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad u^* = \frac{uh}{g} \quad (2.4)$$

$$g = \int_0^h u dy, \quad \langle T - T_w \rangle = \frac{1}{g} \int_0^h (T - T_w) u dy$$

Первое выражение в (2.3) — определение числа Нуссельта, а второе — его значение для профиля $u^*(y^*)$. Величина $2g$ — заданный расход жидкости в канале, угловыми скобками обозначена среднemasовая разность температур.

Задача интенсификации теплообмена в заданной постановке состоит в определении функции φ , которая минимизирует величину m (см. (2.4)). В классе непрерывных функций такая задача не имеет решения: любую непрерывную функцию $\varphi(y^*)$ с закрепленными начальной и конечной точками можно деформировать так, чтобы уменьшалась величина m . В классе разрывных функций имеем очевидное решение

$$0 \leq y^* < 1: \quad \varphi \equiv 0; \quad \varphi(1) = 1 \quad (2.5)$$

Скорость u^* при этом стремится к дельта-функции и имеет бесконечно большое значение на стенке.

Если рассмотреть класс профилей

$$0 \leq y^* < 1 - \Delta: \quad u^* = 0; \quad 1 - \Delta < y^* \leq 1: \quad u^* = \Delta^{-1} \quad (2.6)$$

то $m = 1/3 \Delta$ и при $\Delta \rightarrow 0$ скорость вблизи стенки и число Нуссельта стремятся к бесконечности как Δ^{-1} .

Сделаем несколько замечаний о задаче развития теплообмена в плоском канале с постоянной температурой стенок T_w и заданным профилем скорости (2.1). Она описывается первым уравнением (2.2) с граничными условиями

$$x = 0: \quad T = T_0(y); \quad y = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = h: \quad T = T_w \quad (2.7)$$

Решение сформулированной задачи выписывается в виде ряда

$$T - T_w = \sum_k \alpha_k \psi_k(y^*) e^{-\lambda_k x^* / Pe}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad Pe = \frac{g}{\alpha} \quad (2.8)$$

$$\psi_k'' + \lambda_k \mu^*(y^*) \psi_k = 0; \quad y^* = 0: \psi_k' = 0; \quad y^* = 1: \psi_k = 0 \quad (2.9)$$

Здесь используются безразмерные переменные (2.4). Величины λ_k и $\psi_k(y^*)$ — собственные числа и собственные функции краевой задачи (2.9), коэффициенты α_k находятся с помощью разложения $T_0(y)$ в ряд по собственным функциям задачи (2.9).

Оптимальное управление теплообменом состоит в нахождении такой функции $\mu^*(y^*)$, которая минимизирует длину начального теплового участка.

Если начальный профиль $T_0(y)$ пропорционален какой-либо собственной функции, то задача значительно упрощается (см., например, [6]). Для класса кусочно-постоянных профилей (2.6) в этом случае получаем, что число Нуссельта, которое определяется по первой формуле в (2.3), имеет асимптотику: $Nu \sim \Delta^{-1}$ при $\Delta \rightarrow 0$, которая совпадает с асимптотикой для развитого теплового режима.

В случае каналов переменного сечения распределение динамических полей должно находиться из решения более сложных задач о течении невязких жидкости или газа. В качестве приближенного подхода можно использовать метод слоистой гидравлики [7, 8], позволяющий анализировать течения невязкой среды в каналах переменного сечения при наличии начальной (во входном сечении) завихренности потока. Завихренность $\omega = -du/dy$ в плоском варианте или величина $\Omega = \omega/y$ в осесимметричном случае сохраняются вдоль линий тока. При этом в каналах могут возникать циркуляционные зоны, на линиях тока которых значения указанных величин должны задаваться дополнительно.

Приближенный расчет тепловых полей в каналах переменного сечения может производиться методом интегральных соотношений. В качестве профиля температуры при этом используется решение первого уравнения (2.2) для развитого температурного поля в предположении, что входящая в это уравнение величина $\partial T/\partial x$ является не зависящим от y параметром. При сделанных предположениях относительно динамических и тепловых полей исследование во многих случаях аналитически доводится до конца.

3. Численное моделирование течений с теплообменом в круглых трубах. Для численного интегрирования системы уравнений, описывающей ламинарные и турбулентные течения в круглой трубе с различными начальными условиями при наличии шероховатости стенок, использовался метод [9]. Его особенности: параболическое приближение, определение градиента давления в процессе расчета в каждом сечении x из условия симметрии на оси трубы ($v = 0$ при $r = 0$), однопараметрическая модель для турбулентной вязкости ϵ , моделирование развитой шероховатости путем задания условия $\partial \epsilon/\partial r = 0$ на стенке и введения функции, зависящей от безразмерного коэффициента эквивалентной песочной шероховатости k_s , в уравнение для ϵ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$M = 0, \quad Re = \frac{u_0 R}{\nu} = 10^3 - 10^6, \quad Pr = 0,7, \quad \frac{\epsilon_0}{u_0 R} = 0; 0, 1$$

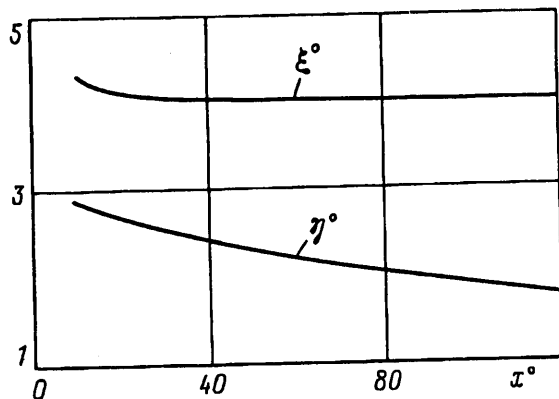
$$k_s = 0; 0,067$$

где R — радиус трубы, а индексом 0 отмечены параметры на оси трубы в начальном сечении. Температура во входном сечении считалась однородной ($T = T_0$), температура стенки была постоянной. На стенке выполнялись условия прилипания жидкости. Свойства жидкости (ν и ρ) считались постоянными. Введем следующие безразмерные характеристики течения:

$$\xi = \xi(x) = \frac{I(0) - I(x)}{I(0)}, \quad I = I(x) = 2\pi \int_0^R (\rho + \rho u^2) r dr \quad (3.1)$$

$$\Delta I = I(0) - I(x)$$

$$\eta = \eta(x) = \frac{Q(x)}{cGt(0)} = \frac{t(0) - t(x)}{t(0)}, \quad t(x) = \langle T \rangle \quad (3.2)$$



Фиг. 1

Коэффициенты ξ и η представляют собой безразмерные потери импульса ΔI в канале и безразмерный тепловой поток в его стенку на длине x ; $t(x)$ — среднemasсовая температура потока в сечении x ; G и c — расход среды и ее теплоемкость. Без учета напряжений трения τ_{xx} и осевого теплового потока (параболическое приближение) величины ΔI и Q равны суммарной силе трения, действующей на стенку канала длины x , и суммарному отводимому через эту стенку тепловому потоку. Величины ΔI и Q — монотонно возрастающие функции x .

Были проведены две серии расчетов. В первой рассматривались течения при отсутствии шероховатости поверхности, но с различными начальными профилями скорости (индекс 0) и ступенчатом, характеризующемся четырехкратным увеличением скорости в пристеночной области толщины $h = 0,1 R$. На малых длинах ($x \leq 2 R$) трение и теплообмен при начальном ступенчатом профиле скорости оказываются больше, чем при однородном профиле, но увеличение потерь на трение превосходит возрастание теплообмена: $\tau_w/\tau_{w0} \sim 4-5$, $q_w/q_{w0} \sim 1,7$ при $Re = 10^3$, $\epsilon = 0$. На больших длинах влияние начальных условий становится менее заметным.

Во второй серии расчетов анализировалось влияние шероховатости на интенсификацию теплообмена. Расчеты проводились при $\epsilon/u_0 R = 0,1$, $Re = 5 \cdot 10^4$ и однородных начальных профилях скорости и температуры. На фиг. 1 представлены величины $\eta^* = \eta(x^*)/\eta^{(0)}(x^*)$ и $\xi^* = \xi(x^*)/\xi^{(0)}(x^*)$, где $x^* = x/R$, а верхний индекс (0) соответствует расчету при отсутствии шероховатости. Представленные данные показывают, что относительное увеличение суммарных гидравлических потерь при наличии шероховатости стенки ($\xi^* \approx 4$) значительно превосходит увеличение теплообмена. Аналогичный вывод можно сделать относительно локальных характеристик — коэффициента сопротивления и числа Стантона.

4. Трение и теплообмен при деформации профиля скорости внешними силами. Воздействуя на поток внешними силами, можно увеличить скорость жидкости вблизи стенок и, следовательно, увеличить теплообмен. Возможности реализации различных профилей скорости в силовых полях (магнитных, электрических и т. д.) весьма широки. Проиллюстрируем это на примере развитых плоских гидродинамических полей.

Развитое течение в канале $|y| < h$ при наличии внешней силы $f = f(y) e_x$ описывается уравнением

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + f(y); \quad y = 0: \frac{du}{dy} = 0; \quad y = h: u = 0 \quad (4.1)$$

Произвольно заданный профиль $u_0(y)$, удовлетворяющий граничным условиям (4.1), — решение задачи, если сила $f(y)$ распределена по закону

$$f(y) = -\mu \frac{d^2 u_0}{dy^2} \quad (4.2)$$

При этом градиент давления равен нулю. Более того, если потребовать, чтобы $du_0/dy = 0$ при $y = h$, сила трения также обращается в нуль. Естественно, что работа силы

$$\int_0^h f(y) u_0(y) dy = \mu \int_0^h \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 dy \quad (4.3)$$

при этом всегда положительна, равна величине вязкой диссипации и определяет энергетические затраты на создание силового воздействия.

В проведенном рассуждении обойдены вопросы практической реализации и устойчивости рассмотренных течений.

Наглядным примером воздействия объемных сил на течение является задача Гартмана — течение проводящей жидкости в плоском канале в поперечном магнитном поле [10]. Профиль скорости в таком течении зависит от параметра — числа Гартмана Ha , пропорционального величине магнитного поля, и с увеличением этого параметра непрерывно изменяется от пуазейлевского профиля (при $Ha = 0$) до однородного (при $Ha = \infty$). При этом трение на стенке с увеличением параметра Ha непрерывно возрастает и при больших Ha стремится к бесконечности пропорционально Ha . Перепад давления в канале при $Ha = \infty$ в зависимости от устройства внешней электрической цепи оказывается пропорциональным либо Ha , либо Ha^2 . Однако характеристика теплообмена — число Нуссельта — при увеличении Ha стремится к конечной величине [6].

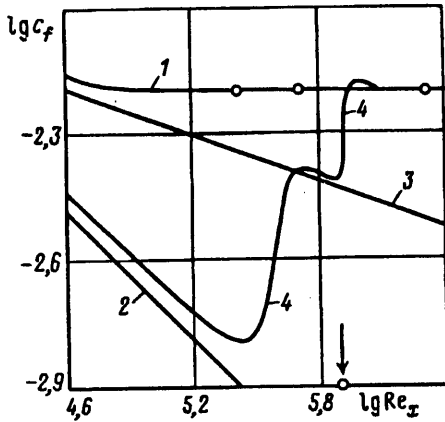
Для более детального анализа обсуждаемого вопроса рассмотрим течение в пограничном слое при наличии продольной объемной силы, зависящей от скорости: по закону $f = b(u_\infty - u)$, $b = \text{const}$, где u_∞ — скорость на границе пограничного слоя. Такое распределение f введено по аналогии с магнито-гидродинамическими приложениями. Ламинарный динамический пограничный слой с такой силой изучался в [11]. Соответствующие уравнения для ламинарного и турбулентного пограничных слоев на плоской пластине в случае несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами молекулярного переноса представляют собой выражения (1.1)—(1.5), в которых $\partial p/\partial x = 0$, правая часть уравнения (1.2) содержит дополнительный член f , величины τ и q определяются формулами

$$\tau = (\rho\varepsilon + \mu) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q = \left(\frac{c\mu}{Pr} + \frac{c\rho\varepsilon}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.4)$$

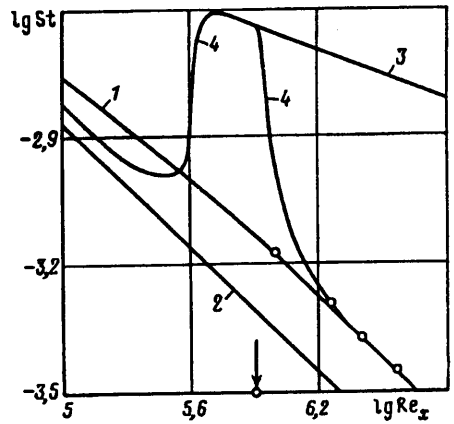
$$Pr = \frac{c\mu}{\lambda}, \quad Pr_t = \frac{c\rho\varepsilon}{\lambda_t}$$

Для коэффициента турбулентной кинематической вязкости ε используется уравнение, приведенное в работе [9], в которое включен дополнительный член $-\xi b\varepsilon$, обусловленный диссипацией энергии турбулентности из-за наличия силы указанной структуры. В расчетах принималось: $Pr = 0,7$, $Pr_t = 0,87$, $\xi = 1$. Наличие силы f вызывает появление в безразмерных уравнениях параметра $N = bL/\rho u_\infty$, где L — характерный продольный размер.

Сила f увеличивает скорость жидкости вблизи стенки, что приводит к возрастанию трения и теплообмена на поверхности. С другой стороны, наполнение профиля скорости (и уменьшение толщины пограничного слоя) ламинаризирует течение и тем самым способствует уменьшению трения и теплообмена. Дополнительный демпфирующий член в уравнении для ε также вызывает ламинаризацию течения. Таким образом, результат решения задачи зависит от относительной величины указанных противоположно действующих факторов.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим вначале ламинарное течение ($\varepsilon = 0$). Расчетные зависимости коэффициента трения c_f и числа Стантона St

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2}, \quad St = \frac{q_w}{\rho c u_\infty (T_\infty - T_w)} \quad (4.5)$$

от числа Рейнольдса $Re_x = \rho u_\infty x / \mu$ при $N = 10$ и $Re_L = 10^6$ (кривые 1) представлены на фиг. 2 и 3. На этих фигурах показаны также расчетные, совпадающие с традиционными, зависимости $c_f(Re_x)$ и $St(Re_x)$ при $N = 0$ для ламинарного (кривые 2) и турбулентного (кривые 3) течений. Особенность кривой 1 на фиг. 2 состоит в том, что величина c_f перестает зависеть от Re_x при больших Re_x . Величины c_f и St при $N \neq 0$ превосходят соответствующие значения при $N = 0$, при этом относительное возрастание коэффициента трения намного больше, чем увеличение числа Стантона, которое не выходит на асимптотическое значение и с ростом Re_x уменьшается. Таким образом, интенсификация теплообмена сопровождается гораздо большими гидравлическими потерями.

Для объяснения полученной зависимости $c_f = c_f(Re_x, N)$ привлечем результаты [11]. При больших N в уравнении импульсов в первом приближении становятся несущественными инерционные члены и это уравнение приобретает простой вид

$$b(u_\infty - u) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$y = 0: u = 0; \quad y = \infty: u = u_\infty \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует

$$u_\infty - u = u_\infty \exp(-y \sqrt{b/\mu}) \quad (4.7)$$

(Соотношения (4.6) и (4.7) известны в магнитной гидродинамике (см. [11]).) Таким образом, толщина пограничного слоя δ и коэффициент трения c_f определяются формулами

$$\frac{\delta}{L} \sim (N \cdot Re_L)^{-1/2}, \quad c_f = 2 \left(\frac{N}{Re_L} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

Толщина пограничного слоя при больших N не изменяется по длине пластины и становится малой величиной по сравнению с толщиной δ^0 динамического пограничного слоя при отсутствии силы f . Действительно

$$\delta^0 \sim \left(\frac{xL}{Re_L} \right)^{1/2}, \quad \frac{\delta}{\delta^0} \sim \left(\frac{L}{Nx} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

Распределение температуры при $f \neq 0$ находится из уравнений (1.3)—(1.5). При этом в соответствии со сказанным выше толщина динамического пограничного слоя δ , начиная с некоторого расстояния x , становится намного меньше толщины теплового пограничного слоя δ_T , так как δ выходит на константу, а δ_T непрерывно увеличивается по длине. Обратим внимание на то, что в данном случае соотношение $\delta \ll \delta_T$ выполняется не вследствие малости числа Прандтля, а в результате действия продольной объемной силы.

Распределение температуры в тепловом пограничном слое при этом описывается уравнением

$$\rho c_{и\infty} \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad y = 0: T = T_w, \quad y = \infty: T = T_\infty$$

решение которого известно [5]. Число Стантона рассчитывается по формуле

$$St = (\pi Pr Re_x)^{-1/2} \quad (4.10)$$

Таким образом, асимптотическое значение числа Стантона не зависит от N и изменяется как $(Re_x)^{-1/2}$.

Проведенный асимптотический анализ находится в хорошем количественном соответствии с результатами численного расчета. Значения c_f и St , вычисленные по формулам (4.8) и (4.10) для $N = 10$, показаны точками на фиг. 2 и 3.

Расчеты турбулентного пограничного слоя при $Re_L = 10^6$, $\rho \epsilon_\infty / \mu = 1$ представлены на фиг. 2 и 3 кривыми 4. (Здесь ϵ_∞ — коэффициент турбулентной вязкости на границе пограничного слоя.) Пограничный слой вначале был ламинарным, затем при $Re_x \geq 3 \cdot 10^5$ происходил переход к турбулентному режиму и затем при $Re_x = 8 \cdot 10^5$ (стрелка на фиг. 2 и 3) включалось силовое воздействие с параметром $N = 10$. Как следует из представленных данных, эффект реламинаризации потока при действии силы f оказывается преобладающим и соответствующие кривые при достаточно больших Re_x близки к кривым 1, полученным для ламинарного режима течения.

5. Теплообмен в диффузоре — автомодельная задача. Рассмотрим классическое автомодельное течение жидкости в плоском диффузоре $0 < r < \infty$, $|\theta| \leq \alpha/2$ (r, θ — полярные координаты) с заданным объемным расходом Q , когда имеется только одна компонента скорости $v_r = (Q/r) u(\theta)$. Функция $u(\theta)$ определяется из уравнения [12]

$$u'' + 4u + Reu^2 - D = 0; \quad Re = Q/\nu; \quad u(\pm \alpha/2) = 0$$

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} u(\theta) d\theta = 1 \quad (5.1)$$

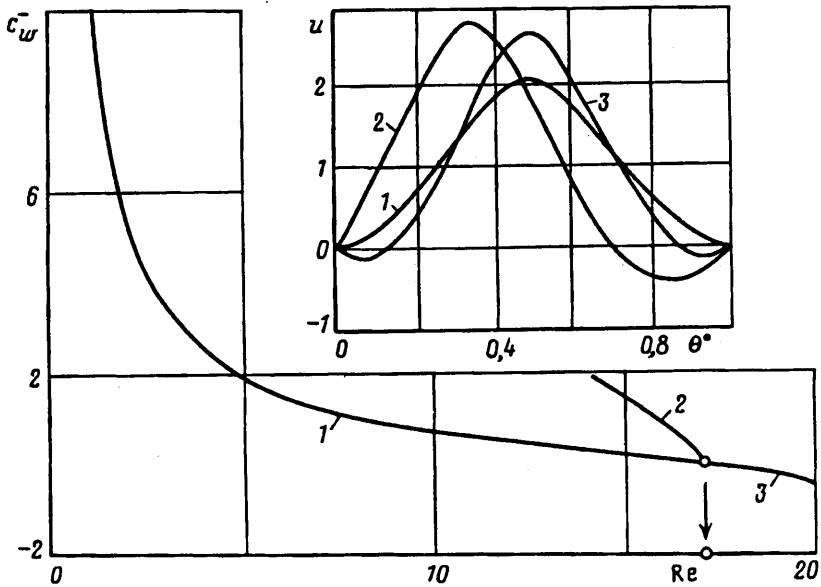
Три условия в (5.1) (прилипание жидкости к стенкам диффузора и задание расхода) позволяют решить уравнение второго порядка и найти постоянную D .

Давление p , определяемое с точностью до постоянной на бесконечности, вычисляется по формуле

$$p = p_\infty + \frac{2\nu\rho Q}{r^2} \left(u - \frac{D}{4} \right) \quad (5.2)$$

Особенностью динамической задачи является неединственность ее решения при произвольном фиксированном числе Рейнольдса Re [10, 13].

В данной работе уравнение (5.1) численно интегрировалось при $\alpha = 1$ (угол диффузора равен $57,3^\circ$) и $0 < Re < 22$. Симметричное относительно оси диффузора течение O со всюду положительной скоростью существует только в диапазоне $0 < Re < Re_* = 17,2$. При $Re = Re_*$ производная скорости на стенках обращается в нуль и происходит бифуркация указанного решения на симметричное решение



Фиг. 4

IOI с «вытеканием» жидкости вблизи оси и ее «втеканием» вблизи стенок (это решение существует при $Re > Re_*$) и на два несимметричных решения *IO* и *OI* с вытеканием жидкости у одной из стенок и втеканием у другой (эти решения реализуются в соответствии с [13] при $Re < Re_*$, т. е. бифуркация происходит в сторону уменьшения числа Рейнольдса). Символы *O* и *I*, соответствующие участкам вытекания и втекания жидкости и совокупность которых является характеристикой течения, введены согласно [13].

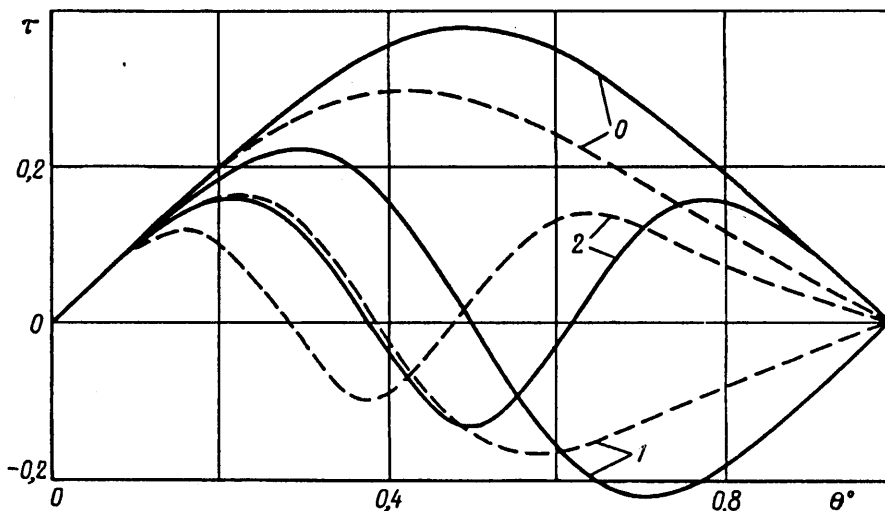
Введем коэффициенты трения c_w^- и c_w^+ , которые характеризуют силы, действующие вдоль стенок $\theta = -\alpha/2$ и $\theta = \alpha/2$ соответственно, по формулам

$$c_w^- = \frac{p_{\theta r}^-}{1/2 \rho U^2} = \frac{2\alpha^2}{Re} u' \left(-\frac{\alpha}{2} \right), \quad c_w^+ = -\frac{p_{\theta r}^+}{1/2 \rho U^2} = -\frac{2\alpha^2}{Re} u' \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$U = \frac{Q}{r\alpha}, \quad p_{\theta r}^\pm = \frac{\rho \nu Q}{r^2} u' \left(\pm \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.3)$$

Здесь $p_{\theta r}$ — компонента тензора гидродинамических напряжений, U — средняя скорость на дуге радиуса r . Аналогичным образом можно ввести коэффициенты c_x и c_y для сил, действующих на обе стенки диффузора в направлении его оси и перпендикулярно к ней. В соответствующие формулы будет входить давление, вычисляемое по формуле (5.2). При этом величина $p - p_\infty$ на стенках диффузора в зависимости от числа Рейнольдса может иметь различные знаки. Поэтому зависимость $c_x(Re)$ имеет области положительных и отрицательных значений. Коэффициент c_y отличен от нуля только для асимметричных профилей скорости.

В качестве примера на фиг. 4 посредством кривых 1—3 показаны зависимости $c_w^-(Re)$ для профилей *O*, *OI* и *IOI* соответственно. Стрелкой показана точка бифуркации решения $Re = Re_* = 17,2$. На этой же фигуре представлены профили скорости *O* и *OI*, построенные для $Re = 16,3$ (кривые 1 и 2), и профиль *IOI*, рассчитанный для $Re = 20,1$. (По оси абсцисс на графике для профилей скорости отложена величина $\theta^\circ = 1/2 + (\theta/\alpha)$.) Так как поиск и реализация решению *OI* является сложной процедурой и требуют значительного вычислительного времени,



Фиг. 5

то соответствующие расчетные данные представлены для ограниченного диапазона чисел Рейнольдса.

Перейдем к тепловой задаче. Распределение температуры в диффузоре, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T_w , при заданном поле скорости v , описывается уравнением

$$\frac{u}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\Phi = T - T_w, \quad \Phi(\pm \alpha/2) = 0, \quad Re = \frac{Q}{v}, \quad Pr = \frac{c_p v}{\lambda} \quad (5.4)$$

Рассмотрим класс автомодельных решений уравнений (5.4), когда $\Phi = r^k \tau(\theta)$, где k — отрицательное число (при этом $\Phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Из (5.4) для $\tau(\theta)$ получаем уравнение

$$\tau'' + [k^2 - k Pr Re u(\theta)] \tau = 0$$

$$\tau(\pm \alpha/2) = 0 \quad (5.5)$$

Для рассматриваемых температурных полей поток полного теплосодержания при $r \rightarrow 0$ и интегральный тепловой поток в стенки диффузора в окрестности точки $r=0$ стремятся к бесконечности как r^k .

Одновременно с задачей (5.5) на собственные значения k рассмотрим следующую задачу на собственные значения λ :

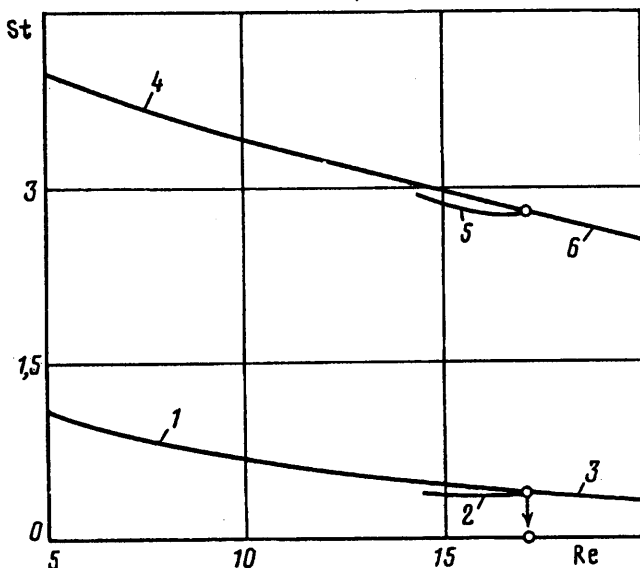
$$\tau'' + k [\lambda - Pr Re u(\theta)] \tau = 0, \quad \tau(\pm \alpha/2) = 0$$

где k — фиксированный параметр. Эта задача является классической и имеет бесконечный дискретный спектр значений λ : $\lambda_i = \lambda_i(k)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Собственные значения k задачи (5.5) находятся из решения уравнений $\lambda_i(k) = k$ и не запрещены ситуации, когда спектр k также является бесконечным и дискретным.

Нахождение собственных функций для уравнения (5.5) целесообразно с точки зрения изучения возможностей интенсификации теплообмена в рассматриваемом течении.

Определим число Стантона по формуле

$$St = \frac{q_w^+ + q_w^-}{\rho c U \langle T - T_w \rangle}, \quad \langle T - T_w \rangle = \frac{1}{Q} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} v_r \Phi r d\theta \quad (5.6)$$



Фиг. 6

Здесь q_w^+ и q_w^- — плотности тепловых потоков на верхней и нижней стенках канала в точках $(r, \theta = \alpha/2)$ и $(r, \theta = -\alpha/2)$

Из (5.5)—(5.6) находим

$$St = \frac{\alpha}{Pr Re} \left[\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} u \tau d\theta \right]^{-1} \left[\tau' \left(-\frac{\alpha}{2} \right) - \tau' \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (5.7)$$

Приведем результаты расчетов тепловой задачи. С помощью специального итерационного процесса находились первые три собственных значения k и собственные функции (температурные моды) для уравнения (5.5).

На фиг. 5 представлены профили температуры (кривые 0, 1, 2) для течения с симметричным профилем O ($Re = 16,3$, $Pr = 1$), соответствующие первым трем найденным значениям k : $k_0 = -0,39$, $k_1 = -2,07$, $k_2 = -4,46$. Соответствующий профиль скорости показан на фиг. 4 (кривая 1). Температурные моды 0 и 2 на фиг. 5 — четные, а мода 1 — нечетная функция угла θ . Температурные моды 1 и 2 имеют участки с отрицательными значениями τ . Профили температуры для асимметричного профиля скорости OI при $Re = 16,3$, $Pr = 1$ представлены на фиг. 5 штриховыми линиями. Кривым 0, 1, 2 соответствуют значения $k_0 = -0,36$, $k_1 = -2,18$, $k_2 = -4,88$. Соответствующий профиль скорости показан на фиг. 4 (кривая 2).

Температурные моды для профиля скорости IOI качественно похожи на моды, представленные на фиг. 5 сплошными линиями. Профили температуры, соответствующие собственным значениям k_0 и k_2 , — четные функции θ , а профиль для значения k_1 — нечетная функция θ . При $Pr = 1$, $Re = 20,1$ собственные значения равны: $k_0 = -0,28$, $k_1 = -1,79$, $k_2 = -4,17$.

Во всех случаях профили температуры для значений k_0 , k_1 , k_2 имеют один, два и три экстремума соответственно.

Рассчитанные зависимости числа Стантона от числа Рейнольдса показаны на фиг. 6. Кривые 1, 2, и 3 определялись по первой температурной моде k_0 и соответствуют профилям скорости O , OI и IOI . Кривые 4, 5 и 6 рассчитывались по температурной моде k_2 для тех же профилей скорости.

Существенно, что вторая температурная мода характеризуется гораздо большим числом Стантона, что в основном связано с уменьшением для нее среднемассовой

температуры потока. Проиллюстрируем это на примере температурных мод для симметричного профиля скорости O (см. фиг. 5). Моды 0 и 2 на фиг. 5 характеризуются одинаковыми тепловыми потоками в стенке канала и поэтому числитель в формулах (5.6), (5.7) для них одинаков. Однако знаменатель (разность средней массовой температуры потока и температуры стенки) для моды 2 значительно меньше, чем для моды 0 вследствие наличия областей с отрицательными значениями τ . Это и приводит к увеличению числа Стантона для моды k_2 .

Более полный анализ сформулированной тепловой задачи (5.5) в дальнейшем может дать новые интерпретации связей между гидродинамическими и тепловыми характеристиками течений.

Авторы благодарят А. Ю. Клименко за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калинин Э. К., Дрейцер Г. А., Ярхо С. А. Интенсификация теплообмена в каналах. М.: Машиностроение, 1990. 206 с.
2. Мигай В. И. Повышение эффективности современных теплообменников. Л.: Энергия. 1980. 144 с.
3. Афанасьев В. Н., Роганов П. С., Чудновский Я. П. Процессы теплоотдачи при обтекании регулярных рельефов сферических вогнутостей турбулентным потоком // Инж.-физ. журн. 1992. Т. 63. № 1. С. 23—27.
4. Ватажин А. Б., Потокин М. А. Гидродинамические течения и теплообмен в каналах при произвольном малом отклонении их формы от цилиндрической // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 21—30.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
6. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озол Р. Я. Тепло-и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980. 355 с.
7. Коновалов А. Е. Вихревое невязкое течение с циркуляционными зонами в канале переменного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 31—37.
8. Munson B. R. Rotational inviscid flow in a variable area annulus, pipe or channel // Annual Winter. Conf. ASME. P. 16—21. November, Chicago, 1980. 6 p. (Рус. перев.: Мунсон. Вихревое невязкое течение в кольцевом канале, трубе или двумерном канале переменного сечения // Тр. Америк.-о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов. 1980. Т. 102. № 4. С. 151—156.)
9. Холщевникова Е. К. Численное исследование развития течения на начальном участке круглой трубы при смешанном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 95—101.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
11. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 379 с.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
13. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Потеря симметрии в течении от линейного источника вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 35—44.

Москва

Поступила в редакцию
18.I.1993