

УДК 532.517.4:532.525.2

© 1993 г. А. Н. ГУЛЯЕВ, В. Е. КОЗЛОВ, А. Н. СЕКУНДОВ

К СОЗДАНИЮ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

В 80-х годах благодаря успехам вычислительной математики и появлению суперкомпьютеров сложилось впечатление близкого решения проблем турбулентности либо на пути прямого численного решения полных уравнений Навье — Стокса, либо на пути крупномасштабного моделирования (решение отфильтрованных уравнений Навье — Стокса). По целому ряду причин (невозможность задания начальных данных, неуниверсальность мелкомасштабной части спектра турбулентности и т. п.) эти надежды не реализовались. В настоящее время, как и прежде, основным инструментом решения задач о сложных турбулентных течениях являются дифференциальные модели турбулентности. Особенно это относится к инженерным задачам, где важную роль играет возможность проведения большого объема вычислений в короткое время.

Современные модели турбулентности должны обладать универсальностью, инвариантностью по отношению к преобразованиям системы координат, приспособленностью к численным методам, простотой. Модели, удовлетворяющей всем этим требованиям, в настоящее время не существует.

В данной статье продолжается разработка универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости ν . Первый вариант этой модели предложен Коважным [1], а затем модель модифицировалась и совершенствовалась в работах [2—6]. Одна из модификаций модели « ν -90» участвовала в очередном туре «Коллективного тестирования моделей турбулентности-1990/91», организованном Стэнфордским университетом [7]. Почти половина из сотни участников этого тестирования использовали модификации известной « $k - \epsilon$ -модели» [8]. Многие участники применяли модели, содержащие уравнения для всех компонент тензора напряжений Рейнольдса. Неутешительным итогом этой международной деятельности является вывод о том, что ни одна из моделей, включая сложные многопараметрические, не описывает всего спектра течений, выбранных организаторами (P. Bradshaw, B. Launder, J. Lumley) для тестирования моделей.

В этой связи представляется полезным применение наиболее простых и экономных с точки зрения затрат времени ЭВМ моделей. К этому же выводу пришли авторы работы [9], в которой предложен новый интересный вариант модели турбулентной вязкости. Обсуждение моделей с одним из авторов этой работы — профессором Ф. Спэлартом (P. Spalart) — стимулировало интенсификацию работы над новым, более совершенным вариантом модели « ν -92», которая описана в настоящей работе. Кроме того, в работе приведена методика, отражающая взгляды авторов на то, как можно количественно оценить точность и универсальность, с которой та или иная модель описывает реальные течения.

Предварительные замечания. В «Коллективном тестировании моделей турбулентности-1990/91» [7] участвовала одна из версий однопараметрической модели [4] для турбулентной вязкости (« ν -90»), близкая к модифицированной модели L. Kovasznyai [1].

Эта модель отличается попыткой учета эффектов, связанных с осесимметричностью течения. С этой целью в нее введена поправочная функция, зависящая от параметра $r^2 \Gamma_i / \nu_i$, где r определяется по следующим правилам. Введем в окрестности рассматриваемой точки x_0 поверхность A : $\nu_i(x) = \text{const} = \nu_i(x_0)$. Построим плоскость B , содержащую векторы $\text{grad}(\nu_i)$ и $\text{rot}U$. Определим r как радиус кривизны линии пересечения поверхности A и плоскости B .

Один из первых вариантов определения r подвергся справедливой критике Ф. Спэларта из-за неинвариантной записи соотношений. Не лишено указанного недостатка и это определение. В некоторых случаях ($U = \text{const}$, $v_i = \text{const}$) рассмотренное определение r не единственно. Но главный недостаток модели « v_i -90» заключается в недостаточной универсальности. Так, эта модель существенно завышает значение v_i в плоской затопленной струе $d\delta_{i2}/dx = 0,168$ вместо экспериментального значения 0,105—0,110. Несмотря на удовлетворительное описание основного участка круглой струи, эта модель завышает длину начального участка как в круглой, так и в плоской струе ($L/R = 14$ —16 вместо 11—12). Неудовлетворительно предсказывается темп роста трения и вязкости в течении с однородным сдвигом $(d\tau/dt)/(\tau\Gamma_i) = 0,2$, что в 2—3 раза больше экспериментального значения.

Большинство известных моделей хорошо описывает течение в пограничном слое, однако течение в струях неплохо предсказывают лишь несколько весьма сложных моделей. К их числу относятся модели, которые разработали Уилкоккс (Wilcox) и Ханялик (Hanjalic).

Это связано с тем, что в струйных течениях в отличие от пограничного слоя более существенно роль крупномасштабных структур. В экспериментальной работе [10] с помощью техники ортогональных разложений (J. Lumley) исследованы основные типы струйных течений и показано, что в них первые 2—3 моды упорядоченных вихревых структур вносят около 60—70% вклада в напряжения турбулентного трения. Однако эти вихревые структуры неуниверсальны и сильно различаются в различных течениях, например в плоской и круглой струях. Более того, в плоском и осесимметричном следах даже в дальней области эти структуры существенно зависят от формы обтекаемого тела [11—13]. В то же время течение в струях почти всегда близко к автомодельному, профили всех параметров сравнительно простые, гладкие и схожие во всех струйных течениях. Это дает некоторую надежду на то, что удастся (пусть даже несколько формально) найти способ приближенно предсказывать весь набор простых течений в струях и следах, а также течение с однородным сдвигом.

Представляется, что количественное увеличение уравнений и определяющих параметров не способствует повышению универсальности модели. Поэтому в работе предпринимается попытка найти новые варианты записи дополнительных слагаемых в уравнении для турбулентной вязкости, которые могут обеспечить универсальность однопараметрической модели турбулентности.

Будем исходить из того, что в правую часть уравнения для v_i могут входить слагаемые, содержащие v_i , а также первые и вторые производные от v_i и U_k . Запишем возможные комбинации такого рода, имеющие размерность

$$dv_i/dt \sim u^2$$

$$P_1 = N_1^2, \quad P_2 = v_i \Gamma_i, \quad P_3 = \frac{v_i^2 \Gamma_i^2}{\Gamma_i^2}, \quad P_4 = v_i \Delta v_i, \quad P_5 = v_i N_2 \quad (1.1)$$

$$\Gamma_i^2 = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \Gamma_i^2 = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$$

$$N_1^2 = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad N_2^2 = \frac{\partial N_1}{\partial x_j} \frac{\partial N_1}{\partial x_j}$$

Кроме того, имеются два безразмерных комплекса, функции от которых могут входить в качестве сомножителей при выписанных выше выражениях для P_i

$$\Phi_1 = \frac{v_i \Gamma_i}{N_1^2}, \quad \Phi_2 = \frac{v_i \Gamma_i^2}{\Gamma_i^2} \quad (1.2)$$

Все параметры, входящие в определения P_i и Φ , могут принимать малые или нулевые значения, поэтому желательно, чтобы указанные параметры не входили в знаменатели слагаемых. Так, Γ_2 должно войти в такой комбинации

$$\frac{v_i^3 \Gamma_2}{\Gamma_1^{1/2}} \Phi_2^{-1/6} \equiv v_i^4 \Gamma_2^{2/3}$$

Остальные слагаемые с формальной точки зрения приемлемы. Запишем уравнение для v_i в виде

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho (Cv_i + v) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \rho \sum_{i=1}^5 A_i P_i \quad (1.3)$$

Распишем «диффузионный» член в виде двух слагаемых

$$\rho (Cv_i + v) \Delta v_i + \frac{\partial \rho (Cv_i + v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \approx P_4 + P_1 \quad (1.4)$$

Видно, что диффузионные слагаемые также содержат члены P_1 и P_4 , так что слагаемые в правой части (1.3), содержащие P_1 и P_4 , не вполне самостоятельны и независимы. Известно, что коэффициенты при этих слагаемых определяют вид «особенности» на границе турбулентной жидкости [4] вблизи поверхности, на которой v_i обращается в ноль. Если систему координат расположить так, чтобы ось y была перпендикулярна поверхности $v_i = 0$ и направлена в сторону области, где турбулентная вязкость отлична от нуля, то будут иметь место разложения

$$v_i \sim y, \quad u \sim y^a, \quad a \equiv C + A_1 \quad (1.5)$$

Поскольку в опытах профиль скорости «плавно» приближается к нулевому градиенту на границе струи, следа и т. п., то необходимо выполнение условия $C + A_1 > 1$ и желательно, чтобы $C + A_1 \approx 2$. Поэтому удобно в (1.3) переписать диффузионный член и слагаемое P_1 в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho (Cv_i + v) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \rho ((C_1 - C)v_i - v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (1.6)$$

Тогда условие на границе турбулентной жидкости (1.5) запишется в виде $C_1 > 1$, а для определения значения разности $C_1 - C$ необходимо выяснить физический смысл второго слагаемого в (1.6).

Известно некоторое специальное течение с однородным полем средней скорости и неоднородным полем турбулентной вязкости, когда роль указанного слагаемого особенно велика. Это течение исследовано А. Таунседом [14]. Анализ этого течения показывает, что в неоднородном поле турбулентной вязкости происходит как бы дополнительная генерация турбулентности, которая, вероятно, связана с крупномасштабной неустойчивостью «мгновенного» поля скорости в этом потоке. Этот анализ подкрепляет правомерность использования слагаемого $P_1 = N_1^2$ и накладывает условие $C_1 > C$. Отметим, что член с N_1^2 присутствует и в модели [8].

Соберем все слагаемые, связанные с производными от поля скорости (т. е. P_2, P_3), в единое выражение

$$C_2 (v_i \Gamma_1 + A_1 v_i^4 \Gamma_2^{2/3} + A_2 ((v_i + v) \Gamma_1)^{1/2} N_1) \quad (1.7)$$

Среди свободных течений со сдвигом одно выделяется особо — это слой смешения. В нем область течения с градиентом продольной скорости окружена нетурбулентной жидкостью, велика роль перемежаемости и значение параметра $N_1^2 / (v_i \Gamma_1)$ в этом течении велико по сравнению с течением в струях и следах.

Формально это связано с тем, что на один экстремум v , в струях и следах приходится два экстремума $\partial U / \partial y$, а в зоне смешения — один.

В то же время расчеты с использованием разных моделей турбулентности показывают, что именно в слое смешения необходимо увеличить слагаемое с порождением v , чтобы получить значение v , близкое к эксперименту. В качестве такого дополнительного слагаемого выбрана комбинация $\Gamma_1^2 N_1$, которая присутствует в третьем слагаемом соотношения (1.7).

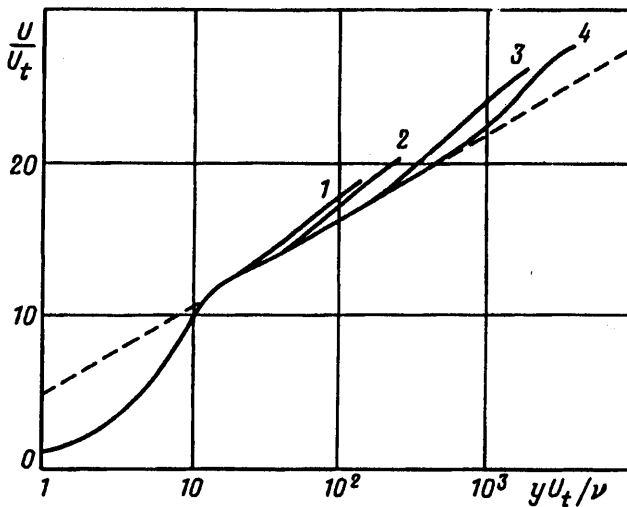
Сложнее обстоит дело с влиянием второй производной от профиля скорости Γ_2 , прямых данных о влиянии этого параметра на порождение вязкости нет. Можно основываться лишь на косвенной информации. Так, в ряде работ отмечалась взаимосвязь устойчивости течения (интегрального коэффициента усиления малых возмущений) с турбулентностью в сдвиговых течениях [10]. Профиль скорости в пограничном слое при отрицательном продольном градиенте давления более наполненный. Известно, что такой профиль и более устойчив, т. е. в нем меньше интегральный коэффициент усиления. Отсюда следует, что это слагаемое (второй член в (1.7)) может войти в модельное уравнение с небольшим отрицательным коэффициентом.

Мотивация для включения в модельное уравнение слагаемых, содержащих $\Delta v_i + N_2$, связана с рассмотрением осесимметричных течений. Известно [15], что осесимметричные течения отличаются от плоских структур крупномасштабных вихрей. Так, если в плоской струе доминирует антисимметричная мода колебаний, то в осесимметричной — первая азимутальная мода. Поэтому важно найти безразмерные критерии, описывающие отличительные особенности осесимметричных течений. Одна из попыток введения критерия такого рода предпринята в работе [16], где с целью модификации известной двухпараметрической « $k - \varepsilon$ -модели» турбулентности предложено использовать один из инвариантов (детерминант) тензора скоростей деформаций. Попытки использовать этот прием для улучшения однопараметрической модели для турбулентной вязкости оказались неудачными.

В модели « v_i -92» применен иной критерий, использующий для описания отличительных особенностей осесимметричных течений неоднородность распределения турбулентной вязкости: $v_i (\Delta v_i + N_2) / N_1^2 = Q$. Как правило, в плоском потоке с поперечным сдвигом скорости профиль v_i выпуклый, следовательно, $\Delta v_i < 0$ и тогда $Q \approx 0$. В осесимметричных струйных потоках с аналогичным распределением параметров $Q \sim -v_i / r / N_1 < 0$. Слагаемое, пропорциональное $\Delta v_i + N_2$ в уравнении для v_i , благоприятно в том смысле, что оно делает устойчивым линейное распределение v_i на краю турбулентной жидкости, что согласуется с (1.5).

2. Формулировка модели « v_i -92». Используя изложенные выше соображения о новых параметрах, запишем уравнение для v_i в виде

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i}{Dt} = & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho (Cv_i + v) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho ((C_1 - C)v_i - v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + C_2 [v_i \Gamma_1 + A_1 v_i^{4/3} \Gamma_2^{2/3} + \\ & + A_2 ((v_i + v) \Gamma_1)^{1/2} N_1] + C_3 v_i \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + N_2 \right] - \\ & - C_4 v_i \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \left| \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right| \right) - C_5 v_i^2 \frac{\Gamma_1^2}{a^2} - [C_6 v_i (N_1 S + v_w) + C_7 F_1 v_i v] S^{-2} \\ A_1 = & -0,5, \quad A_2 = 4, \quad S^2 = S_0^2 + 0,4 k_s S_0 + 0,004 k_s^2 \end{aligned}$$



Фиг. 1

$$C_2 = C_2^* F_2, \quad F_2 = \frac{X^2 + 1,3X + 0,2}{X^2 - 1,3X + 1}, \quad X = \frac{v_t}{7\nu}, \quad F_1 = \frac{N_1 S + 0,4 C_8 \nu}{v_t + C_8 \nu}$$

$$C = 0,8, \quad C_1 = 1,6, \quad C_2^* = 0,1, \quad C_3 = 4, \quad C_4 = 0,35, \quad C_5 = 3,5, \quad C_6 = 2,9, \quad C_7 = 31,5, \quad C_8 = 0,1$$

Кроме новых слагаемых, содержащих N_1 и N_2 , в этом уравнении по сравнению с [4] изменены значения некоторых постоянных, функция $F_2(v_t/\nu)$ и диссипативное слагаемое, содержащее расстояние до стенки. В последнем введена еще одна функция $F_1(N_1 S_0/\nu, v_t/\nu)$ с целью улучшения описания течения в ламинарном подслое пограничного слоя и более точного предсказания значения коэффициента трения. В этом же слагаемом учтено влияние шероховатости стенки, что требует [3] изменения граничного условия на турбулентную вязкость с тривиального $v_t = 0$ на условие $\partial v_t / \partial n|_w = 0$, n — нормаль к стенке. Это граничное условие более универсально. При шероховатости равной нулю значение турбулентной вязкости на стенке $v_w = 0$. Кроме того, несколько изменена форма записи одного из слагаемых, ответственных за учет эффектов сжимаемости, о чем подробнее в следующем разделе.

Для верификации этой новой модели проведены расчеты различных течений в струях и пограничном слое, оптимизированы значения постоянных и показано, что эта модель более универсальна, чем модель « v_t -90». Количественная оценка качества и универсальности этой модели представлена в последующих разделах, а здесь рассмотрим только некоторые результаты применительно к пограничному слою и струям.

На фиг. 1 приведены в полулогарифмических координатах расчетные профили скорости в турбулентном пограничном слое несжимаемой жидкости без градиента давления при вариации числа Рейнольдса (кривые 1—4 соответствуют $Re_{th} = 300, 540, 4700$ и 10^4). Штриховой кривой показан профиль, который считается наилучшей аппроксимацией опытных данных (Стэнфорд-1990/91)

$$\frac{u}{u_t} = \frac{1}{K} \ln y^+ + C, \quad y^+ = y \frac{u_t}{\nu}, \quad K = 0,41, \quad C = 5$$

Видно, что согласование очень хорошее. Для более точного сопоставления удобно ввести значение относительной скорости в характерной точке профиля $I_{100} \equiv u(y^+ = 100)/u_t$ и значение коэффициента трения на стенке при числе Рейнольдса (определенного по толщине потери импульса), равном 10^4 .

Таблица 1

Параметры	Рекомендуемое значение	Модель «v _r -90»	Модель «v _r -92»
100	16,23	15,99	16,17
C_f	0,0026	0,0024	0,00266
K	0,41	0,37	0,41
C	5,0	3,5	5,0

Таблица 2

Течение	Рекомендуемое значение	Модель «v _r -90»	Модель «v _r -92»
Зона смешения, db^*/dx	0,115	0,125	0,108
Плоская струя, $db_{1/2}/dx$	0,107	0,168	0,126
Круглая струя, $db_{1/2}/dx$	0,093	0,099	0,103

В табл. 1 сведены данные о характерных параметрах рассматриваемого течения. Из анализа этих данных видно, что новая модель значительно ближе к рекомендациям Стэнфорда, чем предыдущая версия модели для турбулентной вязкости. Необходимо отметить, что пограничный слой хорошо описывается многими моделями, в том числе и наиболее популярной « $k-\epsilon$ -моделью».

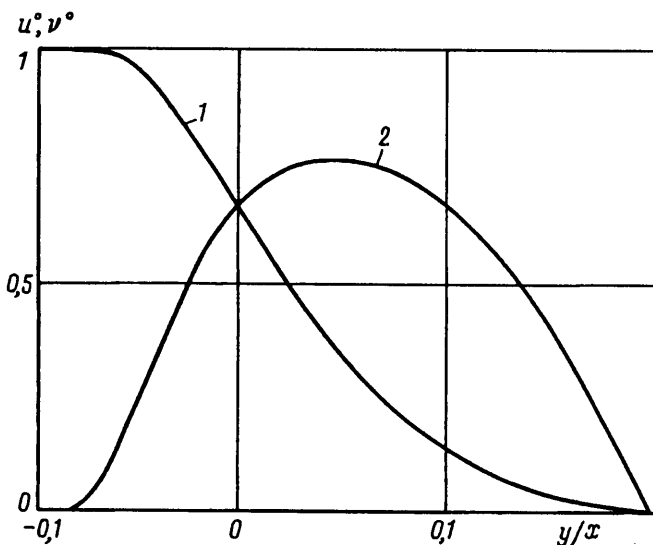
Иная ситуация в случае моделирования свободных струйных течений. Лишь небольшое число современных моделей удовлетворительно описывают, например, течение в зонах смешения плоской и круглой затопленной струи. В табл. 2 сведены данные о характерных геометрических параметрах этих течений. Здесь b^* — толщина зоны смешения, определенная по точкам, в которых квадрат скорости составляет 0,1 и 0,9 от максимального, $b_{1/2}$ — полутолщина струи, определенная из условия $u(x, b_{1/2}) = u(x, 0)/2$.

Для модели «v_r-90» наибольшая погрешность модельных расчетов имеет место в случае плоской струи, что и стало одной из побудительных причин для модернизации этой модели. Модель «v_r-92» дает заметно лучшее согласование с экспериментом, хотя погрешность описания достигает 10—15%. Тем не менее эта погрешность значительно больше, чем в случае пограничного слоя, где рассогласование не превышает нескольких процентов. Расчетные распределения осредненной скорости $u^0 = U/U_c$ и турбулентной вязкости $v^0 = 500\nu_t/(U_c x)$ поперек слоя смешения в автомодельных координатах показаны на фиг. 2 кривыми 1 и 2 соответственно.

Еще хуже обстоит дело при описании течений в следах. Известно, что и в осесимметричном [11] и в плоском [13] следе за плохо обтекаемыми телами в дальней (квазиавтомодельной) области течения параметры следа сохраняют зависимость от начальных условий обтекания тела. Так, в автомодельных переменных профиль скорости в осесимметричном следе можно представить в виде

$$u = U - u^* \varphi\left(\frac{r}{b}\right), \quad u^* = U \left(\frac{C_x R_0^2}{x^2}\right)^{1/3}, \quad b = (C_x R_0^2 x)^{1/3}$$

Здесь R_0 — радиус сферы, C_x — коэффициент сопротивления, значение которого «учитывает» форму тела. Результаты экспериментов показывают, что, например, значение $\varphi(0)$ в следе за сферой в 2—3 раза меньше, чем в следе за сигарообразным, хорошо обтекаемым телом того же сопротивления. А ширина следа, напротив, в 1,4—1,7 раз больше за сферой, чем за таким телом. В плоском следе чувствительность к форме обтекаемого тела меньше и составляет



Фиг. 2

30—40%. Важно отметить, что указанная чувствительность сохраняется на протяжении сотен калибров обтекаемого тела.

В настоящее время нет какой-либо единой версии, объясняющей это явление. Представляются вероятными два возможных варианта объяснения. Прежде всего можно предположить существование неединственности автомодельного течения в дальнем следе (возможно существование дискретного или сплошного спектра автомодельных течений, различающихся количественно). Во-вторых, можно связать эти эффекты с «долгой памятью», т. е. с большим временем релаксации, когда на большом протяжении следа сохраняется память о начальном уровне турбулентности в ближнем следе. С практической точки зрения выбор между этими версиями может оказаться не столь важным, поскольку реальные расчеты проводятся для конечных расстояний от тела.

Авторы данной работы имели возможность сопоставить с опытом только автомодельные решения (которые были единственными) в плоском и осесимметричном следе, полученные с использованием модели «v_r-92». Количественные данные такого сравнения даны в последующих разделах. Отметим, что модель дала неплохое согласование с опытными данными для осесимметричного следа за хорошо обтекаемым телом, а в плоском следе — несколько лучшее согласование со следом за цилиндром.

3. Эффекты сжимаемости. В уравнении баланса кинетической энергии турбулентности [17] содержатся следующие члены, непосредственно связанные с эффектами сжимаемости:

$$T_1' = -\langle \rho u_i' u_j' \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} \cong \rho v_t \Gamma_1^2 + T_1, \quad \Gamma_1^2 \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

$$T_1 \equiv -\frac{2}{3} \rho E_t \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j}, \quad E_t \equiv \frac{\langle \rho u_i' u_i' \rangle}{\langle \rho \rangle}$$

$$T_2 = -\langle \rho' u_i' \rangle \left\{ \frac{d \langle u_i \rangle}{dt} \right\}, \quad T_3 = \langle \rho' \left\{ \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right\} \rangle$$

Первое слагаемое, T_1 , связано с порождением турбулентности из-за градиентов осредненной скорости и наличием дивергенции от осредненной скорости потока. Второе слагаемое, T_2 , связано с работой сил плавучести в поле ускорения, третье, T_3 , характеризует работу сил сжатия. Анализ работы [5] показывает, что все эти слагаемые даже при гиперзвуковых скоростях течения невелики по сравнению,

например, с диссипативным слагаемым этого же уравнения. Исключение составляют течения при больших числах Маха и значительных градиентах давления, которые возникают в скачках уплотнения и волнах разрежения типа волн Прандтля — Майера.

Для оценки второго слагаемого T_2 в этом случае удобно использовать модельное соотношение для $\langle \rho' u_i' \rangle$ и переписать его в виде

$$T_2 \approx \tau^* \langle u_i u_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \left\{ \frac{d \langle u_i \rangle}{dt} \right\} \approx \tau^* E_i \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} \left\{ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} \right\}$$

Здесь τ^* — интегральный временной масштаб турбулентности. Видно, что слагаемые T_1 и T_2 имеют некоторые общие черты (оба существенны только в потоках с градиентом давления), но есть и различия. Так, в волнах сжатия (скачках уплотнения) знаки этих слагаемых различаются: $T_1 > 0$, $T_2 < 0$. Напротив, в волнах разрежения их знаки совпадают.

Экспериментальные исследования [18, 19] показали, что в скачке уплотнения пульсации скорости несколько возрастают, масштаб турбулентности убывает, а турбулентная вязкость ν_t почти не изменяется. В волне разрежения картина обратная, причем в этом случае и турбулентная вязкость убывает. Эти результаты косвенно подтверждаются и при теоретическом анализе на основе различных вариантов линейной теории [20—23], которая описывает взаимодействие турбулентности со скачком уплотнения и волной Прандтля — Майера.

В модельном уравнении « ν_t -90» для турбулентной вязкости [4] эти эффекты учтены недостаточно полно, поэтому здесь используется более точная аппроксимация этих членов

$$T_{12} \cong - C_4 \rho \nu_t \{ \text{div} \langle u \rangle + | \text{div} \langle u \rangle | \}, \quad C_4 = 0,35 \quad (3.2)$$

Во всех уравнениях движения и модельном уравнении для вязкости в конвективных слагаемых удобно использовать так называемое осреднение по Фавру

$$U_i \equiv \langle u_i \rangle + \frac{\langle \rho' u_i' \rangle}{\langle \rho \rangle} \approx \langle u_i \rangle - \frac{\nu_t}{\langle \rho \rangle \text{Pr}_t} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i}$$

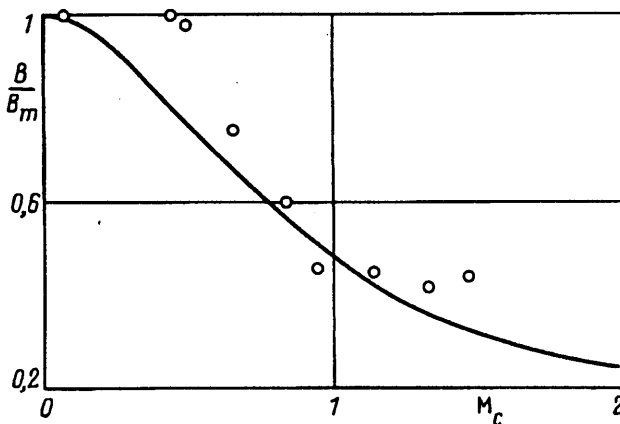
Поскольку в слагаемое (3.2) входит осредненная по времени скорость среды, то для ее вычисления необходимо использовать уравнение неразрывности и приближенное выражение для корреляции $\langle \rho' u_i' \rangle$

$$\text{div} \langle u \rangle \approx \text{div} U + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\langle \rho \rangle \text{Pr}_t} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial x_i} \right)$$

Число Прандтля, входящее в это соотношение, а также в осредненное уравнение энергии, не универсально и различается в пристеночных и струйных течениях, где оно равно соответственно 0,87 и 0,7. Чтобы «автоматизировать» процедуру вычисления числа Прандтля, можно использовать аппроксимацию

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t + 0,03 S^2 \Gamma_1}{\nu_t + 0,06 S^2 \Gamma_1}$$

Сложнее обстоит дело с членом T_3 . С одной стороны, как уже отмечалось, он невелик даже при больших числах Маха и слабо влияет на энергию турбулентности, с другой — известно, что толщина слоя смешения начинает убывать с ростом числа Маха уже при $M \geq 1$. Поэтому в уравнении для турбулентной вязкости обязателен учет какого-либо аналога этого слагаемого. В работе [5] обосновывается механизм такого сильного влияния числа Маха, связанный с линейной теорией устойчивости и приводящий к подавлению крупномасштабных пульсаций. Определяющим параметром в этом случае вы-



Фиг. 3

ступает число Маха, связанное с неоднородностью поля скорости, а в модельном уравнении появляется слагаемое

$$T_3^* = -C_3 \rho \frac{v_f^2 \Gamma_1^2}{a^2}, \quad C_3 = 3,5$$

Это слагаемое играет заметную роль только в сверхзвуковых потоках, а слагаемое T_{12}^* может играть некоторую небольшую роль и в дозвуковых потоках, но при наличии горения и объемного тепловыделения. Конкретные расчеты факелов горения показали, что это влияние не превышает 10—20%.

Ниже представлены результаты расчетов по модели «v-92» сжимаемого слоя смешения при вариации числа M :

M	0,01	0,5	1	1,5	3	4	5	10	20
M_c	0,005	0,246	0,477	0,68	1,12	1,31	1,45	1,79	2,0
db_w/dx	0,153	0,141	0,119	0,097	0,064	0,055	0,049	0,039	0,033
db_p/dx	0,135	0,124	0,101	0,08	0,049	0,04	0,034	0,024	0,017

Здесь $M_c = (U_1 + U_2)/(a_1 + a_2)$ — так называемое конвективное число Маха. В качестве характерных толщин выбраны следующие:

$$b_w \equiv \frac{U_{\max} - U_{\min}}{(\partial U / \partial y)_{\max}}, \quad b_p \equiv Y(p_0' = 0,05) - Y(p_0' = 0,95)$$

$$p_0' = [p_0' - (p_0')_{\min}] / [(p_0')_{\max} - (p_0')_{\min}]$$

Здесь p_0' — давление, регистрируемое насадком полного давления. На фиг. 3 представлено сравнение результатов расчета с известными опытными данными [24, 25]. Здесь $B = (db_w/dx)$, $B_m = B|_{M=0,01}$. Видно, что согласование хорошее, особенно если учесть большой разброс экспериментальных данных. Это согласование несколько ухудшается в области, где $M \approx 1$, и при очень больших числах Маха.

4. Оценка «качества» и универсальности моделей. Результаты многочисленных расчетов с использованием модели «v-92» показали для многих течений очень неплохие результаты, так что даже возник вопрос о способах количественной оценки «качества» и универсальности моделей вообще и данной модели в частности.

Рассмотрим методику количественного определения качества моделей. Поскольку речь идет о сравнении моделей, применяемых для описания большого количества течений, необходимо попытаться

Таблица 3

Течение	Параметр	Эксперимент	Модель	Качество E_{ij} , %	Среднее качество, %
Пограничный слой на плоской пластине, $Re_{th} = 10^4$	C_f	0,0026	0,00266	+2,3	+3,9
	$y_+ = 10^2, \frac{u}{u_\tau}$	16,23	16,17	—0,4	
	$\frac{(v_\tau)_{max}}{u_\tau \delta}$	0,065	0,071	+9	
	$\frac{db^*}{dx}$	0,115	0,108	—6	
Зона смешения	$\frac{y_1}{x}$	—0,08	—0,08	0	—7,3
	$\frac{(v_\tau)_{max}}{U_c x}$	0,002	0,00172	—16	
	$\frac{db_{v2}}{dx}$	0,095	0,103	+8	
	$\frac{xU_m}{RU_c}$	12,4	11,8	—5	
Круглая струя $x = 200R$	$\frac{(v_\tau)_{max}}{RU_c}$	0,03	0,0375	+25	+12,7
	$\frac{db_{v2}}{dx}$	0,11	0,126	+14	
	$\frac{U_m \sqrt{x}}{U_c \sqrt{R}}$	3,6	3,47	—4	
	$\frac{(v_\tau)_{max}}{u^* b^*}$	0,012	0,0149	+12	
Плоская струя $x = 200R$	$\frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dt}$	0,08	0,10	+25	+25
	$\frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dt}$	0,08	0,10	+25	
Однородный сдвиг	$\frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dt}$	0,08	0,10	+25	+25
	$\frac{1}{\tau_1} \frac{d\tau}{dt}$	0,08	0,10	+25	

как-то «свернуть» большую информацию, которая при этом появляется. В результате такой свертки должно появиться одно число, характеризующее качество модели.

В качестве тестовых выбраны следующие течения: 1) пограничный слой в несжимаемой жидкости на плоской пластине при числе Рейнольдса по толщине потери импульса 10^4 ; 2) плоская зона смешения однородного потока с неподвижной средой при числе Маха, равном нулю, автомодельное течение; 3) круглая затопленная струя в неподвижной среде при $x/D = 100$; 4) плоская затопленная струя в неподвижной среде при $x/D = 100$; 5) однородный сдвиг; 6) автомодельное течение в следе за хорошо обтекаемым сигарообразным осесимметричным телом и сферой; 7) автомодельное течение в следе за хорошо обтекаемым крыловидным плоским телом и цилиндром.

Течения в следе менее важны с точки зрения требований к точности и универсальности моделей. Как уже отмечалось выше, в этих течениях очень сильна зависимость от начальных данных. Результаты расчетов показывают, что длина «релаксации», т. е. длина участка перехода от начальных значений турбулентной вязкости к ее значению на автомодельном участке течения, очень велика и составляет десятки калибров течения.

Поэтому в тех случаях, когда расчетный участок невелик, роль модели невелика и важно лишь правильно задать начальные данные. Если же рассматривается течение в дальней автомодельной части следа, то в этом случае сравнение результатов расчетов с экспериментом сопряжено с большими трудностями, так как в опытах наблюдается неединственность значений параметров в следе. Значения параметров в следах за хорошо обтекаемыми и плохо обтекаемыми телами различаются в несколько раз, а модель турбулентности дает одно автомодельное решение. Таким образом, модели турбулентности,

Таблица 4

Течение	Параметр	Эксперимент	Модель	Качество E_{ij} , %	Среднее качество, %
Круглый след	$u^* = U \left(\frac{R_0^2 C_x}{x^2} \right)^{1/3}$	$\frac{\Delta U_m}{u^*}$	2,2 (0,6)	2,40	+9 (300)
	$b^* = U (R_0^2 C_x x)^{1/3}$	$\frac{R_{1/2}}{b^*}$	0,45 (0,8)	0,43	-4 (-46)
	$\frac{C_x \rho U^2 \pi R_0^2}{2} = 2\pi \int \rho u (U - u) r dr$	$\frac{(v_r)_{\max}}{u^* b^*}$	0,057 (0,2)	0,048	-16 (-76)
Плоский след	$u^* = U \left(\frac{B_0^2 C_x}{x} \right)^{1/2}$	$\frac{\Delta U_m}{u^*}$	2 (1,4)	1,34	-33 (-4)
	$b^* = U (B_0 C_x x)^{1/2}$	$\frac{R_{1/2}}{b^*}$	0,25 (0,3)	0,374	+49 (25)
	$C_x \rho U^2 B_0 = 2 \int \rho u (U - u) dy$	$\frac{(v_r)_{\max}}{u^* b^*}$	0,02 (0,04)	0,053	165 (32)

подобные модели «V-92», всегда будут давать для этих течений очень большую погрешность, не сравнимую с остальными течениями. Чтобы эта погрешность не мешала правильной суммарной оценке модели, предлагается учитывать все погрешности, включая и след, но с весом 1/5.

В каждом из тестовых течений выбрано не более трех параметров, по которым проводится сопоставление. Пусть P_{ij} — значение характерного параметра (скорость на оси, ширина профиля скорости, уровень турбулентной вязкости), $i = 1, 2, 3$ — номер параметров в каждом j -м течении, $j = 1, 2, \dots, 7$ — номер течения, $P_{i,j,m}$ — расчетное значение по модели, $P_{i,j,e}$ — экспериментальное значение параметра, $P_{i,j,e}^*$ — экспериментальное значение для течений 6 и 7 в следе за сферой и цилиндром. Определим качество модели как среднюю погрешность в процентах для j -го течения

$$E_j = \text{sign}(E_{3j}) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 |E_{ij}|, \quad E_{ij} = 100 \frac{[P_{i,j,m} - P_{i,j,e}]}{P_{i,j,e}}$$

$$E_j^* = \text{sign}(E_{3j}) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 |E_{ij}^*|, \quad E_{ij}^* = 100 \frac{[P_{i,j,m}^* - P_{i,j,e}^*]}{P_{i,j,e}^*}$$

Здесь через $\text{sign}(E_{3j})$ обозначен знак погрешности предсказания максимальной величины турбулентной вязкости. В случае отсутствия данных о погрешности E_{ij} при каких-то значениях i и j полагается, что соответствующее значение $E_{ij} = 12$.

Результаты расчетов, выполненных с помощью модели «V-92» для всех тестовых течений, а также экспериментальные данные и результаты сравнения представлены в табл. 3 и 4. Здесь же представлены числовые оценки качества модели для j -го течения. В табл. 4 числа, заключенные в круглые скобки, относятся к течениям за плохо обтекаемыми телами.

Для того чтобы получить окончательную суммарную оценку качества модели, введем усредненную по всем тестовым течениям величину погрешности

$$H = \frac{1}{7} \left(\sum_{j=1}^5 |E_j| + \frac{1}{10} \sum_{j=6}^7 (|E_j| + |E_j^*|) \right)$$

Для модели «V-92», используя данные табл. 3 и 4, получим $H = 12\%$. Полученное значение характеризует среднюю погрешность этой модели на указанном выше наборе тестовых течений.

Универсальность модели подразумевает, что эта модель одинаково хорошо описывает все тестовые течения. Примем, что при хорошем согласовании с опытом погрешность E_j , определенная по

описанной выше методике, не должна превышать 12%. Для определения разброса погрешностей модели в разных течениях, т. е. для определения степени ее универсальности Z , предлагается оценка

$$Z = \frac{1}{12 \cdot 7} \left(\sum_{j=1}^5 D_j + \frac{1}{10} \sum_{j=6}^7 (D_j + D_j^0) \right)$$

$$D_j = \begin{cases} 0, & E_j \leq 12 \\ |E_j - 12|, & E_j > 12 \end{cases}$$

Здесь средняя величина разброса погрешностей отнесена к типичной погрешности 12%. Для модели «v_r-92» значение универсальности $Z = 0.4$, что даже с учетом большого разброса в следах меньше средней погрешности, которая принята равной 12%.

В полном объеме расчеты всех течений по другим моделям не проводились, однако имеющейся информации достаточно для сравнительной оценки. Приближенные значения H и Z , например, у модели «v_r-90» больше, чем у модели «v_r-92», в 1,5—2 раза и, следовательно, во столько же раз модель «v_r-92» лучше в смысле точности и универсальности, чем модель «v_r-90». Расчеты нескольких течений, которые авторы провели с использованием «стандартной», не модифицированной « $k-\epsilon$ -модели» [8], показали, что она также в несколько раз хуже, чем модель «v_r-92». Следует отметить, что при этом, возможно, использовался не лучший вариант этой модели. Так, в материалах, представленных Стэнфордским университетом [7], имеются результаты расчетов, которые свидетельствуют о существовании более универсальных версий « $k-\epsilon$ -модели».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kovasznyai L. S. G. Structure of the turbulent boundary layer//Phys. Fluids. 1967. V. 10. N. 9. Part 2. P. 25—30.
2. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений//Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114—127.
3. Лебедев А. Б., Секундов А. Н. Применение уравнения для турбулентной вязкости при описании течения вблизи шероховатой поверхности//Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 40—44.
4. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М.: Машиностроение, 1975. 94 с.
5. Козлов В. Е., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа//Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38—44.
6. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил//Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 30—40.
7. Bradshaw P., Launder B., Lumley J. Collaborative testing of turbulence models//AIAA 91—0215. 1991.
8. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of Low-Reynolds-number phenomena with two-equation model of turbulence//Int. J. Heat and Mass Transfer. 1973. V. 16. № 6. P. 1119—1130.
9. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows//30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. AIAA—92—0439, January 6—9, 1992/Reno, NV.
10. Борисов А. Г., Кузнецов В. Р., Секундов А. Н. Крупномасштабные движения в сдвиговых турбулентных потоках//Турбулент. струйн. течения. Тез. докл. V Всес. науч. совещ. по теор. и прикл. аспектам турбулент. течений. Ч. I. Таллинн, 1985. С. 63—68.
11. Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М. О влиянии формы тела на характеристики автомоделного осесимметричного следа//Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. № 4. С. 804—807.
12. Ubroi M. S., Freymuth P. Turbulent energy balance and spectra of the axisymmetric wake//Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 9. P. 2205—2210.
13. Wygnanski I., Champagne F., Marasli B. On the large-scale structures in two-dimensional, small difific, turbulent wakes//J. Fluid Mech. 1986. V. 168. P. 31—34; 67—71.
14. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.
15. Batchelor G. K., Gill A. E. Analysis of the stability of axisymmetric jets//J. Fluid Mech. 1962. V. 14. № 4. P. 529—551.
16. Pope S. B. An explanation of the turbulent round — jet/planejet anomaly//AIAA Journal. 1978. V. 16. N. 3. P. 279—281.

17. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
18. Секундов А. Н. Феноменологическая модель и экспериментальное исследование турбулентности при наличии пульсации плотности//Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 140—145.
19. Секундов А. Н. Турбулентность в сверхзвуковом потоке и ее взаимодействие со скачком уплотнения//Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 2. С. 8—16.
20. Ribner H. S. Shock-turbulence interaction and the generation of noise//NACA Rep. 1955. № 1233. 19 p.
21. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
22. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
23. Coleman G. N., Mansour N. N. Modeling the rapid spherical compression of isotropic turbulence//Phys. Fluids. 1991. V. 3. № 9. P. 2255—2259.
24. Papamaschou D., Roshko A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study//J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 453—477.
25. Bogdanoff D. W. Compressibility effects in turbulent shear layers//AIAA Journal. 1983. V. 21. № 6. P. 926—927.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1992