

УДК 532.516.5:519.63

© 1993 г. М. Я. ИВАНОВ, В. Г. КРУПА

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПРЯМОЙ РЕШЕТКЕ ПРОФИЛЕЙ

Работа посвящена разработке и оценке точности численного метода для решения задачи трехмерного обтекания решетки профилей потоком вязкого газа.

Течения, реализующиеся в венцах лопаточных машин, имеют сложный пространственный характер и включают, например, области трехмерного отрыва, взаимодействие скачков уплотнения с пограничными слоями, эффекты, связанные с вращением, и т. д. Надежное численное моделирование таких течений требует решения трехмерных (осредненных) уравнений Навье — Стокса, замкнутых той или иной моделью турбулентности. В настоящей работе для моделирования эффектов турбулентности используется двухпараметрическая дифференциальная $(q - \omega)$ модель турбулентности [1]. Выбор этой модели обусловлен высокой совместимостью ее с процедурой численного интегрирования уравнений Навье — Стокса методом установления по времени [1]. Ранее в такой постановке расчет трехмерного обтекания решеток проводился в [2—4]. Численное интегрирование системы уравнений Навье — Стокса в приближении тонкого слоя в этих работах осуществлялось неявной разностной схемой [5] второго порядка точности. Рассчитанные результаты оказались в достаточно хорошем соответствии с данными экспериментов.

Вычислительный алгоритм настоящей работы основывается на неявной релаксационной схеме Годунова второго порядка точности, предложенной для численного интегрирования уравнений Навье — Стокса в [6, 7]. Система уравнений записывается в произвольной криволинейной системе координат с сохранением дивергентной формы. Векторы потоков через грани ячеек вычисляются аналогично явной схеме Годунова [8, 9] с помощью процедуры распада произвольного разрыва. Для повышения порядка аппроксимации пространственных производных используются кусочно-параболические распределения [10, 11], удовлетворяющие условию монотонности (для линейной системы). Схема записывается в дельта-форме [12]. Обращения неявного нефакторизованного оператора, построенного с учетом знака собственных значений матриц Якоби [13], осуществляется методом Гаусса — Зейделя по линиям. Расчет проводится на вычислительной сетке типа H . В качестве тестового примера выполнен расчет стационарного течения в прямой решетке турбины низкого давления. Точность метода оценивается путем сопоставления рассчитанных распределений с экспериментальными результатами, полученными в [14].

1. Исходные уравнения и граничные условия задачи. Уравнения Навье — Стокса в декартовой системе координат (x, y, z) записываются в консервативной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

$$F = F_i - F_v, \quad G = G_i - G_v, \quad E = E_i - E_v \quad (1.1)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho iw \\ \rho w^2 + p \\ (e + p)w \end{pmatrix}$$

$$F_v = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ A_x \end{vmatrix}, \quad G_v = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ A_y \end{vmatrix}, \quad E_v = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ A_z \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) u_x + \lambda (v_y + w_z), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu (v_x + u_y)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu (w_x + u_z), \quad \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) v_y + \lambda (u_x + w_z)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu (v_z + w_y), \quad \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) w_z + \lambda (u_x + v_y)$$

$$A_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \mu \text{Pr}^{-1} T_x$$

$$A_y = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \mu \text{Pr}^{-1} T_y$$

$$A_z = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \mu \text{Pr}^{-1} T_z$$

$$e = \frac{\rho (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad p = \frac{(\gamma - 1) \rho T}{\gamma}, \quad \frac{\mu}{\text{Pr}} = \frac{\mu_l}{\text{Pr}_l} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t}, \quad \mu = \mu_l + \mu_t$$

Здесь t — время, ρ — плотность, p — давление, T — температура, e — полная энергия на единицу объема; u, v, w — физические компоненты вектора скорости на оси x, y, z ; μ_l, μ_t — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости, $\lambda = -2/3\mu$; $\text{Pr}_l = 0,72, \text{Pr}_t = 0,9$ — числа Прандтля, $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты, Re — число Рейнольдса.

Система (1.1) записана в безразмерной форме: компоненты вектора скорости отнесены к характерной величине V_∞ ; плотность — к ρ_∞ ; давление и полная энергия — к величине $\rho_\infty V_\infty^2$, температура — к величине V_∞^2/c_p (c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении), линейные размеры — к характерной длине L . Для вычисления коэффициента вихревой вязкости μ_t применяется двухпараметрическая $(q - \omega)$ модель турбулентности [1]; величины q, ω связаны с кинетической энергией турбулентности k и скоростью диссипации ε : $q = k^{1/2}, \omega = \varepsilon/k$. В безразмерной форме (q отнесено к V_∞, ω — к V_∞/L) система уравнений $(q - \omega)$ модели имеет вид [1]

$$\frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{\partial F_t}{\partial x} + \frac{\partial G_t}{\partial y} + \frac{\partial H_t}{\partial z} = S_t \quad (1.2)$$

$$F_t = F_u - F_{uv}, \quad G_t = G_u - G_{uv}, \quad H_t = E_u - E_{uv}$$

$$U_t = \begin{vmatrix} \rho q \\ \rho \omega \end{vmatrix}, \quad F_u = \begin{vmatrix} \rho u q \\ \rho u \omega \end{vmatrix}, \quad G_u = \begin{vmatrix} \rho v q \\ \rho v \omega \end{vmatrix}, \quad E_u = \begin{vmatrix} \rho w q \\ \rho w \omega \end{vmatrix}$$

$$F_{uv} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} \mu_q q_x \\ \mu_\omega \omega_x \end{vmatrix}, \quad G_{uv} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} \mu_q q_y \\ \mu_\omega \omega_y \end{vmatrix}, \quad E_{uv} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{vmatrix} \mu_q q_z \\ \mu_\omega \omega_z \end{vmatrix}$$

$$S_t = \begin{vmatrix} 1/2 \rho q (C_\mu DP/\omega - \omega) \\ \rho (C_1 C_\mu P - C_2 \omega^2) \end{vmatrix}, \quad \mu_q = \mu_l + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_q}$$

$$\mu_\omega = \mu_l + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_\omega}, \quad \mu_t = \text{Re} C_\mu D \rho \frac{q^2}{\omega}$$

$$D = 1 - \exp(-\text{Re} \alpha \rho q \frac{d_n}{\mu_t})$$

$$P = 2 (u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) + (u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2$$

Здесь d_n — эффективное расстояние по нормали к твердой стенке; при вычислении d_n применялась формула Булеева [15]. Входящие в (1.2) константы $C_\mu = 0,09$, $C_1 = 0,045 + 0,405D$, $C_2 = 0,92$, $\alpha = 0,0065$, $Pr_g = 1$, $Pr_w = 1,3$

В (1.2) члены с $\text{div } v$ аналогично работам [2—4, 6] опущены. При расчете течения в прямой решетке профилей граничные условия для системы уравнений (1.1) и (1.2) ставились следующим образом. На твердых поверхностях для компонент скорости использовались условия прилипания $u = v = w = 0$; для турбулентных — величин $q = \partial\omega/\partial n = 0$, n — нормаль к поверхности. На входной и выходной границах расчетной области граничные условия выставлялись с учетом направления распространения характеристик для одномерного (в проекции на нормаль границы) нестационарного течения газа. На входной границе для системы (1.1) в пограничном слое задавался профиль скорости и значение полной температуры, в «невязком» ядре потока фиксировались значения полного давления, полной температуры и два угла отклонения потока. Пятый необходимый параметр доопределялся из расчетной области по характеристическим соотношениям. Профили распределений (q, ω) во входном пограничном слое определялись из условий «равновесия» (обращение в нуль источникового члена S_j первого уравнения (1.2)) и равенства значений коэффициента турбулентной вязкости, вычисленных по формулам (1.2) и алгебраической модели Болдуина — Ломакса [16]. В невязком потоке задавались значения q_∞, ω_∞ . На выходной границе фиксировалось значение статического давления, для остальных величин применялась экстраполяция нулевого порядка. В плоскостях периодичности вычислительной сетки на все искомые функции накладывались условия периодичности. В плоскости симметрии (расположенной на половине высоты решетки) $w = 0$, для остальных величин выставлялись условия симметрии.

2. Численный метод. Реализованный в настоящей работе численный метод является прямым обобщением на случай трех переменных неявной схемы Годунова, предложенной в [6, 7] для интегрирования системы уравнений Навье — Стокса. Изложим основные особенности ее построения на примере системы (1.1); для (1.2) разностная схема строится аналогично.

Система уравнений (1.1) записывается в новых криволинейных координатах $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ с сохранением дивергентной формы

$$\frac{\partial U^\circ}{\partial t} + \frac{\partial F^\circ}{\partial \xi} + \frac{\partial G^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial E^\circ}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.1)$$

$$U^\circ = \frac{U}{J}, F^\circ = \frac{(\xi_x F + \xi_y G + \xi_z E)}{J}, G^\circ = \frac{(\eta_x F + \eta_y G + \eta_z E)}{J}, E^\circ = \frac{(\zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z E)}{J}$$

$$\xi_x = J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \xi_y = J(x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta), \xi_z = J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \eta_x = J(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)$$

$$\eta_y = J(x_\zeta z_\xi - x_\xi z_\zeta), \eta_z = J(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)$$

$$\zeta_x = J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \zeta_y = J(x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta)$$

$$\zeta_z = J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \quad J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}$$

Записав (2.1) на временном слое $(n+1)\tau$ (n — номер слоя, τ — шаг по времени), выполним линеаризацию относительно значений на шаге n [12]. Полученная разностная схема записывается в дельта-форме, удобной для применения итерационного метода Гаусса — Зейделя по линии $\xi, \zeta = \text{const}$ [6]

$$\begin{aligned} & (I + \mathcal{U}(A^+ + A^- + \nabla_\eta B^+ - \nabla_\eta B^- + C^+ + C^- + 2(A_v + C_v) - \Delta_\eta \nabla_\eta B_w)) \\ & \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} = \mathcal{U}_{i,j,k} \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} + (A^+ + A_v) \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} + (A^- + A_v) \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} + \\ & + (C^+ + C_v) \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} + (C^- + C_v) \Delta U_{i,j,k}^{\eta, \zeta, \xi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Z_{i,j,k} = \left[-J \left(\frac{\partial F^\circ}{\partial \xi} + \frac{\partial G^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial E^\circ}{\partial \zeta} \right) \right]_{i,j,k}$$

$$\Delta U^{n,p} = U^{n+1,p} - U^n$$

$$\Delta \eta_{i,j,k}^+ = f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}, \quad \nabla \eta_{i,j,k}^+ = f_{i,j,k} - f_{i,j-1,k}$$

где p — номер «внутренней» итерации, нижние целые индексы относятся к значениям функции в центрах расчетных ячеек. Входящие в (2.2) матрицы Якоби имеют вид

$$A = \frac{\partial F_i^+}{\partial U} = S_\xi (\Lambda_\xi^+ - \Lambda_\xi^-) S_\xi^{-1} = A^+ - A^-, \quad B = \frac{\partial G_i^+}{\partial U} = S_\eta (\Lambda_\eta^+ - \Lambda_\eta^-) S_\eta^{-1} = B^+ - B^-$$

$$C = \frac{\partial E_i^+}{\partial U} = S_\zeta (\Lambda_\zeta^+ - \Lambda_\zeta^-) S_\zeta^{-1} = C^+ - C^-$$

$$A_v = \frac{\partial F_v^+}{\partial U_\xi}, \quad B_v = \frac{\partial G_v^+}{\partial U_\eta}, \quad C_v = \frac{\partial E_v^+}{\partial U_\zeta}, \quad \Lambda^\pm = \frac{(|\Lambda| \pm \Lambda)}{2}$$

Здесь $\Lambda_\xi, \Lambda_\eta, \Lambda_\zeta$ — диагональные матрицы, составленные из собственных значений матриц A, B, C ; $|\Lambda|$ — матрица, составленная из абсолютных величин значений Λ ; S_ξ, S_η, S_ζ — матрицы преобразования, приводящие к диагональному виду. Расщепление матриц Якоби и применение направленных (в соответствии со знаком собственных значений) разностей [13] позволяет получить систему линейных уравнений, обладающих свойством диагонального преобладания. Величины U^{n+1} (при известном $Z_{i,j,k}^n$) находятся из системы (2.2). Направление обхода расчетной области выбиралось следующим: для каждого фиксированного значения i (начиная с $i=1$) рассчитывались значения $\Delta U_{i,j,k}^n, k=1, 2, \dots, k_{\max}$; далее осуществлялся переход на новый слой ($i+1$).

Матрица оператора в левой части (2.2) имеет блочный (размер блока 5×5) трехдиагональный вид, ее обращение (определение $\Delta U_{i,j,k}^n, j=1, 2, \dots, j_{\max}, i, k$ фиксированы) реализуется трехточечной матричной прогонкой. В случае периодических (по j) граничных условий для обращения матрицы необходимо воспользоваться формулами циклической прогонки. Способ вычисления правой части $Z_{i,j,k}^n$ подробно описан в [7]. Пространственные производные в вязких членах аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. «Невязки» члены рассчитываются через векторы потоков на границах ячеек (производные по ξ, ζ вычисляются аналогично, поэтому индексы i, k будем опускать)

$$\left(\frac{\partial G^+}{\partial \eta} \right)_j^n = \frac{G_j^+ + v_2 - G_j^- - v_2}{\Delta \eta} \quad (2.3)$$

Полуцелый индекс в (2.3) относится к значениям функции на грани ячейки. При вычислении векторов потока используются кусочно-параболические распределения параметров, удовлетворяющие условию монотонности (для линейной системы) [10, 11]

$$U_{j+1/2}^- = U_j^n + S_\eta \left[\frac{1+\varphi}{4} \Delta W_j^+ + \frac{1-\varphi}{4} \Delta W_j^- \right]$$

$$U_{j-1/2}^+ = U_j^n - S_\eta \left[\frac{1+\varphi}{4} \nabla W_j^+ + \frac{1-\varphi}{4} \nabla W_j^- \right]$$

$$\Delta W_j^+ = \min \text{mod} (\Delta W_j, b \nabla W_j), \quad \nabla W_j^- = \min \text{mod} (\nabla W_j, b \Delta W_j)$$

$$\Delta W_j = S_\eta^{-1} \Delta \eta U_j^n, \quad \nabla W_j = S_\eta^{-1} \nabla \eta U_j^n$$

$$1 \leq b \leq b_{\max}, \quad b_{\max} = \frac{3-\varphi}{1-\varphi}, \quad \varphi < 1$$

$$\min \text{mod} (x, y) = \begin{cases} 0, & xy < 0 \\ \text{sign}(x) \min(|x|, |y|), & xy > 0 \end{cases}$$

где $U_{j+1/2}^\pm$ — значения U^n , соответственно справа и слева от грани ячейки с номером $j+1/2$ и на n -м слое по времени. По значениям $U_{j+1/2}^+, U_{j-1/2}^-$ с помощью процедуры решения задачи о распаде произвольного разрыва [8, 9] рассчитываются «большие» величины, по которым вычисляются потоки $G_{j+1/2}^+$. Такой способ аппроксимации не требует введения членов с искусственной диссипацией и позволяет получать устойчивые решения со вторым порядком точности.

3. Результаты расчета. Расчет проводился для решетки турбины низкого давления, течение в которой исследовалось экспериментально в [14]. Решетка имела следующие основные геометрические параметры: ширина решетки равнялась $C_x = 52,5$ мм, хорда $C = 55,9$ мм, шаг решетки $S = 31,5$ мм; высота

решетки на входе $h_1 = 95,8$ мм, на выходе $h_2 = 101,6$ мм. До и после решетки торцевые поверхности параллельны; в межлопаточном канале высота решетки изменялась линейно от входного к выходному сечению. Профиль лопатки являлся постоянным по высоте решетки; радиус скругления входной кромки лопатки $0,0165 C_x$, выходной кромки $0,00485 C_x$; координаты профиля приведены в [14].

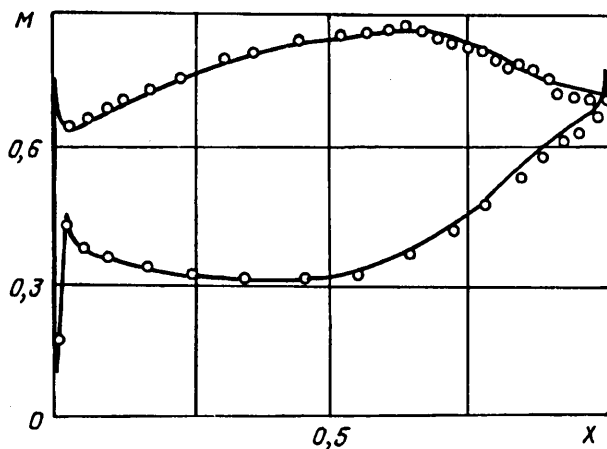
При расчете параметры обтекания соответствовали условиям проведения испытаний: число Маха на выходе решетки $M = 0,702$, число Рейнольдса, вычисленное по параметрам изэнтропического течения на выходе решетки и ширине решетки $Re = 2,9 \cdot 10^5$. Угол потока на входе к оси x $38,8^\circ$, координата x отсчитывается от фронта решетки. В соответствии с измеренным уровнем турбулентности $Tu_\infty = 0,5\%$, степень турбулентности набегающего потока полагалась равной $q_\infty/a_* = 3,24 \cdot 10^3$, где $*$ обозначены критические параметры газа, a_* — скорость звука. Линейный масштаб турбулентности выбирался равным $l = q_\infty/\omega_\infty = 0,028 C_x$. Профиль входного пограничного слоя на торцевой поверхности задавался по закону $1/\eta$, его толщина определялась по данным [14]. Коэффициент молекулярной вязкости μ_l вычислялся по степенному закону с показателем $0,75$.

В силу симметрии задачи расчет проводился до половины высоты решетки. Вычислительная сетка типа *H* строилась алгебраическим способом с экспоненциальным сгущением по всем трем координатам. Сетка состояла из $81 \times 40 \times 27$ узлов по координатам x, y, z соответственно; минимальные расстояния от узлов сетки до твердых поверхностей составляли $\Delta y_{\min} = 6,4 \cdot 10^{-5} C_x$, $\Delta z_{\min} = 8 \cdot 10^{-5} h_1$, что соответствовало $\Delta y_{\min}^+ (\Delta z_{\min}^+) \sim 1$. Входная граница разностной сетки расположена при $x = -0,86 C_x$, выходная при $x = 1,61 C_x$.

Стационарное решение задачи получалось методом установления по времени. Параметры схемы $\varphi = 1/2$, $b = b_{\max}$. При обращении матрицы неявного оператора выполнялись две внутренние итерации. Граничные условия реализовывались неявным образом. В начальном приближении $u = v = w = 0$, p и ρ равнялись значениям (рассчитанным по изэнтропическим формулам) на выходе решетки, величина энергии рассчитывалась по уравнению состояния; для турбулентных величин $q = q_\infty$, $\omega = \omega_\infty$. Использовался переменный по пространству шаг по времени. Значение числа Куранта K изменялось на 50 первых шагах (итераций) по времени от 5 до 50, далее расчет продолжался с постоянным (для каждой ячейки) значением $K = 50$. Для установления стационарного решения (уменьшения начальной невязки на 4 порядка для каждой из систем (1.1) и (1.2)) потребовалось 400 итераций по времени. Это составило приблизительно 70 ч работы центрального процессора ЭВМ типа ЕС-1066.

На фиг. 1 приведено распределение числа Маха M (вычисленное по изэнтропическим формулам по распределению давления) по поверхности лопатки в среднем по высоте сечении решетки. Точками нанесены результаты эксперимента, сплошная линия — настоящий расчет ($X = x/C_x$). Вблизи входной кромки (в среднем сечении) лопатки образуются две замкнутые области отрыва, которые возникают вследствие торможения потока после его ускорения на передней кромке [14]. Также был обнаружен третий «отрывной пузырь» на стороне разрежения вблизи сечения $x = 0,83 C_x$. В расчете на стороне давления (вогнутой поверхности) лопатки область отрыва расположена при $0,136 C_x \leq x \leq 0,212 C_x$; на стороне разрежения (выпуклой поверхности) — при $6 \cdot 10^{-4} C_x \leq x \leq 1,8 \cdot 10^{-3} C_x$ и при $0,75 C_x \leq x \leq 0,8 C_x$. Точки отрыва и присоединения потока в среднем сечении лопатки в расчете определялись из условия обращения в нуль поверхностного трения. В [14] не приведены данные о размерах отрывных пузырей на стороне давления и разрежения вблизи входной кромки лопатки; «центр» третьего отрывного пузыря находится по данным [14] при $x = 0,83 C_x$; его границы, по-видимому, заключены в пределах $0,7 C_x \leq x \leq 0,9 C_x$.

Таким образом, размеры этой зоны отрыва в расчете существенно занижены по сравнению с данными эксперимента; при расчете точка присоединения потока



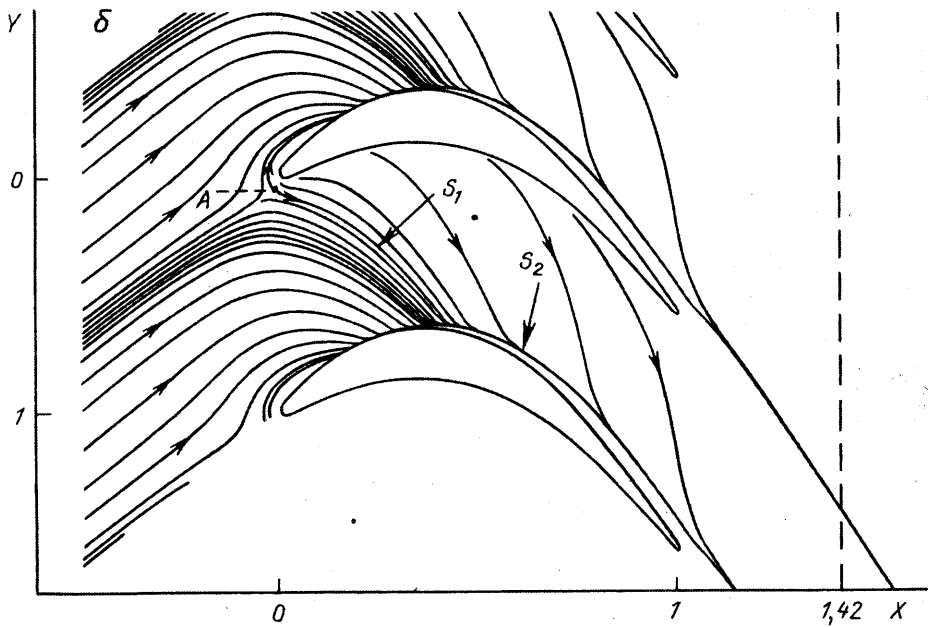
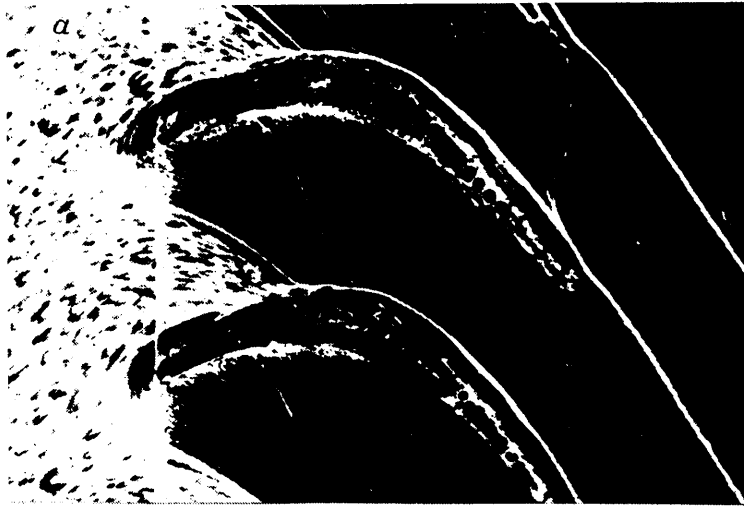
Фиг. 1

приблизительно совпала с точкой перехода пограничного слоя из ламинарного в турбулентное состояние, полученной по модели турбулентности [1]. В реальности, вероятно, точка перехода расположена дальше вниз по потоку.

На фиг. 2 приведена картина пристеночных (донных) линий тока на торцевой поверхности решетки, на фиг. 2,а представлены результаты эксперимента [14], визуализация потока осуществлялась с помощью смеси флюоресцирующего порошка и силиконового масла. Рассчитанные линии тока (фиг. 2,б) были получены интегрированием траектории поля скоростей в плоскости, удаленной от торцевой стенки на расстояние $z = 4 \cdot 10^{-5} h_1$ ($Y = y/S$). Точка А — критическая точка (особая точка типа седла). Поле векторов скорости вторичного течения в плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярной линии S_1 , показывает образование возвратного (противоположного направлению основного потока) течения — пограничный слой свертывается в подковообразный вихрь. Протяженность области возвратного течения невелика (два узла разностной сетки по x); учитывая небольшую «степень стекания» пристеночных линий тока к линии S_1 , можно предположить, что в расчете происходит «затухание» (например, из-за численной диссипации) подковообразного вихря вниз по потоку. Качество фотографии работы [14], к сожалению, не позволяет провести детальное сравнение пристеночного течения в окрестности линии S_1 .

Линия стекания донных линий тока S_2 (фиг. 2,б) вызвана существованием углового вихря. Этот вихрь образуется из-за большого угла поверхностных линий тока по отношению к стороне разреза лопатки [14]. Линия S_2 (фиг. 2,б) расположена несколько ближе к поверхности разреза лопатки по сравнению с экспериментом (фиг. 2,а). Рассчитанные линии тока достаточно хорошо воспроизводят результаты эксперимента.

Картина рассчитанных предельных линий тока на вогнутой и выпуклой поверхностях лопаток приведена на фиг. 3,а и б соответственно ($Z_1 = z/h_1$). Линии «отрыва» S_3 (фиг. 3,а) и S_4 (фиг. 3,б) соответствуют зонам отрыва, которые образуются вследствие замедления потока после его ускорения на передней кромке (фиг. 1). При $0,2h_1 \leq z \leq 0,8h_1$ эти линии практически параллельны образующим лопатки. Линия отрыва S_5 на стороне разреза смещена к выходной кромке лопатки по сравнению с результатами [14]. Рассчитанное направление течения вдоль линии S_5 (из-за численных ошибок) вряд ли соответствует реальному обтеканию, так как в окрестности S_5 величина поверхностного трения близка к нулю. Линия стекания S_6 формируется из-за вращения частиц жидкости в канальном (парном) вихре; ее положение по высоте на выходной кромке лопатки совпадает с точностью 15% с экспериментом. Отсутствие в

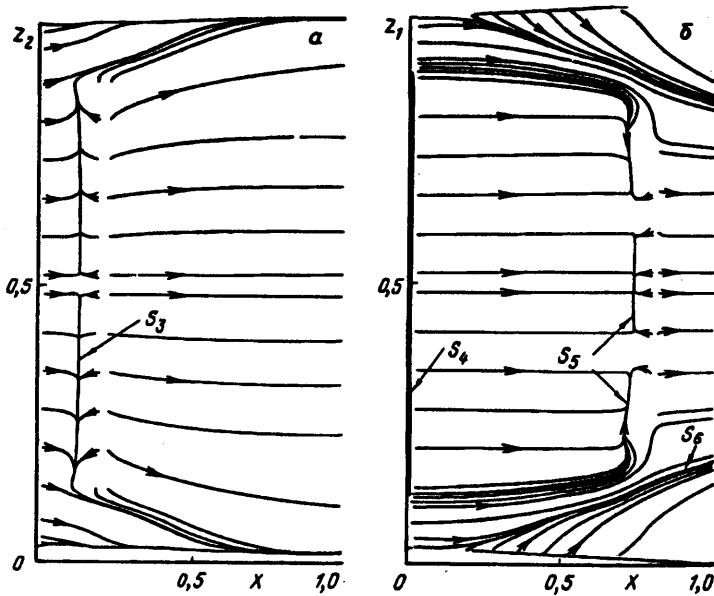


Фиг. 2

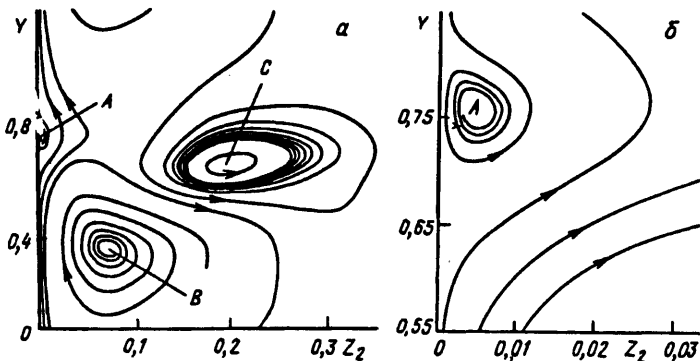
расчете линий стекания, связанных с подковообразным вихрем, подтверждает вывод о его затухании.

На фиг. 4 представлены траектории поля векторов скорости вторичного течения за лопатками в поперечном (перпендикулярном оси x) сечении $x_4 = 1,42C_x (z_2 = z/h_2)$. Компоненты вектора скорости вторичного течения определялись как проекции вектора скорости на плоскость, перпендикулярную (осредненному) направлению потока в этом сечении. Построенные таким образом линии тока не совпадают (в общем случае) с проекциями пространственных линий тока. Направление вращения частиц жидкости в угловом вихре (окрестность точки A) происходит против часовой стрелки, увеличенный фрагмент линии тока, позволяющий оценить «размеры» этого вихря, приведен на фиг. 4,б.

Вращение жидкости в канальном вихре (точка B) происходит в противопо-



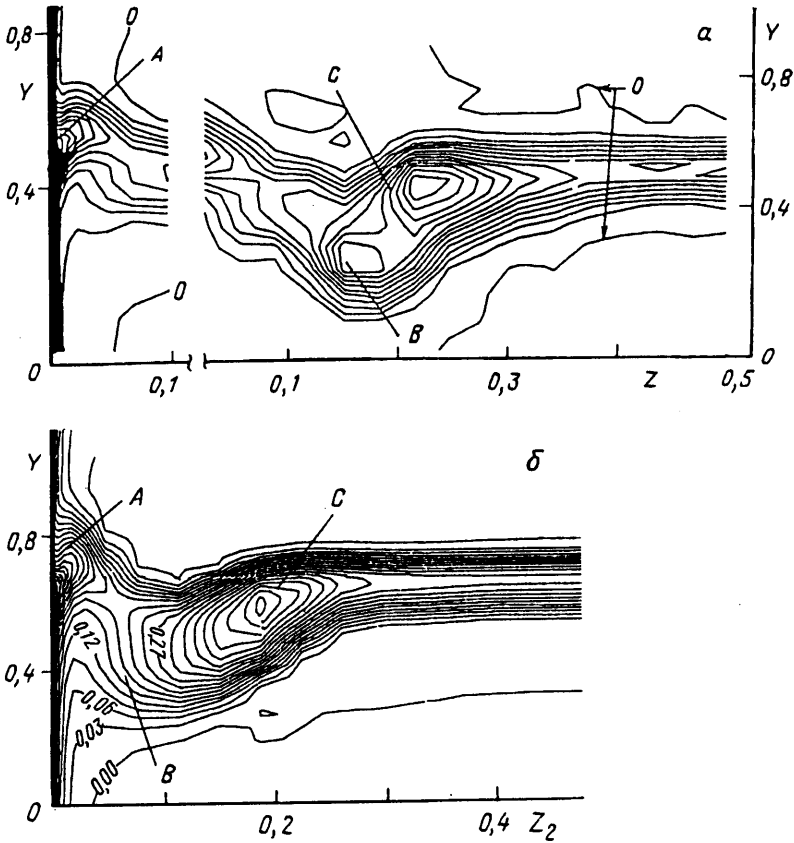
Фиг. 3



Фиг. 4

ложном направлении. Авторы работы [14] пишут: «Обнаруженная в сечении $x = 1,1C_x \dots$ вытянутая область с завихренностью, направленной против часовой стрелки, представляет собой вихревой след, который образуется в виде вихревой пелены, а в сечении $x = 1,42C_x$ наблюдается в виде свернувшегося дискретного вихря» (цитата взята из русского перевода [17] работы [14]). Рассчитанные линии тока (окрестность точки C) также показывают вращательный (против часовой стрелки) характер движения частиц жидкости в закруточном следе. Таким образом, сворачивание «вихревой пелены» (узкой области с большой завихренностью, обусловленной пространственным сходом пограничного слоя с выходной кромки лопатки) в «дискретный» (изолированный) вихрь в данном сечении подтверждается расчетом.

Распределение линий постоянства коэффициента потерь полного давления ζ в сечении $x_4 = 1,42C_x$ приведено на фиг. 5,а (эксперимент) и 5,б (расчет); изолинии проведены с шагом 0,03. Здесь $\zeta = (p_{0\infty} - p_0)/(p_{04} - p_4)$, p_0 — полное

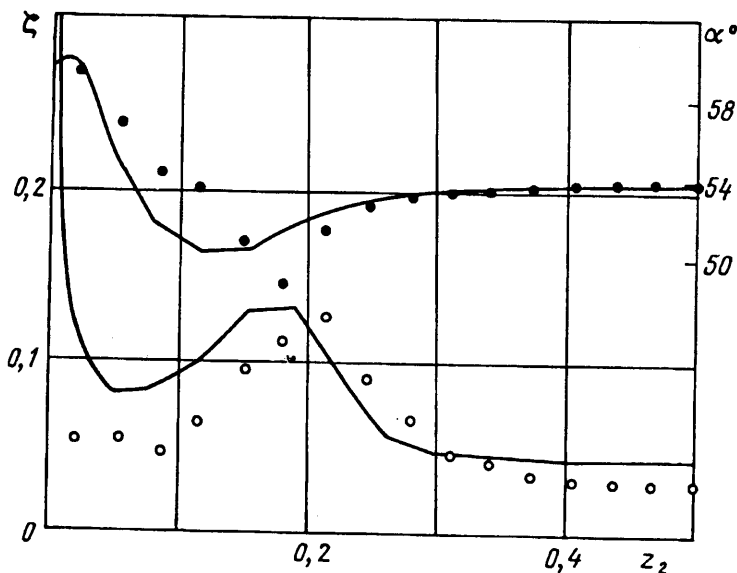


Фиг. 5

давление, индекс ∞ относится к невозмущенному потоку на входе в решетку, индекс 4 соответствует осредненным по площади поперечного сечения величинам. В [14] для измерений в непосредственной близости торцевой стенки ($z \leq 0,1h_2$) и в области $z \geq 0,05h_2$ применялись различные типы зондов. В расчете осреднение величин по шагу или площади решетки проводилось, как и в [14], с применением уравнений неразрывности, импульса и энергии для трубок тока постоянного сечения.

Точками A, B и C указаны центры углового, канального и дискретного вихрей. В [14] центр углового вихря определялся по линиям равных потерь полного давления, центры канального и дискретного вихря — по максимуму завихренности вторичного течения; ветвь входного подковообразного вихря со стороны поверхности разрежения в данном сечении выделить было нельзя. В расчете центры вихрей определялись по линиям тока фиг. 4. Столь большое различие (примерно в 2 раза) в положении центра (точка B) канального вихря по высоте лопатки в эксперименте и расчете является неожиданным, так как рассчитанное положение линии стекания S_6 (фиг. 3,б), связанной с канальным вихрем, на выходной кромке лопатки хорошо согласуется с данными [14].

Сравнение результатов по шагу решетки затруднено, так как по данным работы [14] не удалось определить ноль координаты y. Деформации изолиний, вызванные вращением углового вихря, и потери в пограничном слое хорошо воспроизводятся расчетом. (Изменение толщины пограничного слоя по шагу решетки вызвано тем, что пограничный слой на торцевой поверхности в межлопаточном канале сильно скошен к стороне разрежения лопатки (фиг. 2).)



Фиг. 6

Расчет, однако, не в состоянии получить максимум, совпадающий, по данным [14], с центром канального вихря. Значения максимума потерь, связанного с центром дискретного вихря в закруточном следе, составляют 0,522 и 0,412 для расчета и эксперимента соответственно.

На фиг. 6 представлены распределения коэффициента потерь полного давления ζ и угла α между скоростью потока и осью x , осредненных по шагу решетки, в зависимости от высоты лопатки в сечении $x_4 = 1,42C_x$; значками нанесены результаты [14], сплошная линия — расчет. Рассчитанное значение и положение по высоте лопатки максимума распределения потерь достаточно хорошо соответствуют экспериментальным результатам. В области, примыкающей к торцевой поверхности и центральной части канала, в расчете величины потерь завышены. Величина недозакрутки потока, вызванная вращением системы вихрей [14], в эксперименте несколько больше, чем в расчете. При $z \leq 0,02h_2$ в расчете наблюдается уменьшение угла α (величины перезакрутки потока). Осредненный по площади угол выхода потока в этом сечении составил $53,6^\circ$, что хорошо согласуется с экспериментальным значением $54,1^\circ$.

Авторы выражают признательность Е. В. Мозохиной за помощь в оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coakley T. J. Turbulence modelling methods for the compressible Navier — Stokes equations // AIAA Pap. 1983. № 1693. 9 p.
2. Knight C. J., Choi D. Development of a viscous cascade code based on scalar implicit factorization // AIAA Pap. 1987. № 2150. 17 p.
3. Choi D., Knight C. J. Computation of 3D viscous cascade flows. // AIAA Pap. 1988. № 363. 9 p.
4. Choi D., Knight C. J. Computation of 3D viscous annular cascade flows // AIAA Pap. 1988. № 3092. 9 p.
5. Coakley T. J. Implicit upwind methods for the compressible Navier — Stokes equations // AIAA Pap. 1983. № 1958. 9 p.
6. Иванов М. Я., Крупа В. Г. Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 5. С. 754—766.
7. Иванов М. Я., Крупа В. Г., Нигматуллин Р. З. Неявная схема С. К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 6. С. 888—901.

8. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271—306.
9. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
10. Colella P., Woodward P. R. The piecewise parabolic method (PPM) for gasdynamical simulation // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. № 1. P. 174—201.
11. Chakravarthy S. R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Pap. 1985. № 363. 11 p.
12. Beam R. M., Warming R. F. An implicit factored scheme for the compressible Navier — Stokes equations // AIAA Journal. 1978. V. 16. № 4. P. 393—402.
13. Steger J. L., Warming R. F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite difference methods // J. Comp. Phys. 1981. V. 40. № 2. P. 263—293.
14. Hodson H. P., Dominy R. G. Three-dimensional flow in a low-pressure turbine cascade at its design condition // ASME Pap. 1986. № 86-GT-106. 9 p.
15. Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 341 с.
16. Baldwin B., Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // AIAA Pap. 1978. № 257. 8 p.
17. Ходсон, Домини. Пространственное течение в решетке профилей турбины низкого давления на расчетном режиме // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Энергет. машины и установки. 1988. № 2. С. 116—126.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1992