

УДК 532.51.011

© 1993 г. А. Л. ГОНОР

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВХОДА ТОНКОГО ТЕЛА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Методом сращиваемых асимптотических разложений найдено составное решение задачи входа тонкого клина и конуса в сжимаемую жидкость. Новое решение основано на учете нелинейных членов в интеграле Коши — Лангранжа и равномерно пригодно в окрестности носика тела.

Теоретические исследования погружения тел в жидкость получили первоначальное развитие в 40-е годы нашего столетия. Основные результаты по постановке и линейному решению плоской задачи содержатся в работах [1—3].

Линейные решения задач входа тонких тел в жидкость обладают существенным недостатком — они расходятся вблизи носика тела, что не позволяет определить в его окрестности характеристики течения и, главное, величину максимального давления в вершине тела. Новое равномерно пригодное решение около носиков клина и конуса для несжимаемой жидкости получено в работах [4, 5, 9].

С увеличением скорости тела существенным становятся волновые эффекты, обусловленные влиянием сжимаемости жидкости. Известно, что поведение жидкости при ударе тонкого тела хорошо описывается акустической моделью, основанной на использовании волнового уравнения. Линейные решения о входе тонкого клина и конуса в сжимаемую жидкость в рамках указанной модели получены в работах [6, 7].

1. Постановка задачи для клина. Пусть клин с полууглом при вершине ε входит в жидкое полупространство с дозвуковой начальной скоростью v_0 (фиг. 1). Закон произвольного погружения вершины обозначим $a_0(t)$. В неподвижной системе декартовых координат (x, y) имеем для потенциала $\varphi(x, y, t)$ следующую начальную-краевую задачу:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_0(t) \sin \varepsilon, \quad (x, y) \in AB, AC \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad x = f(y, t) \quad (1.3)$$

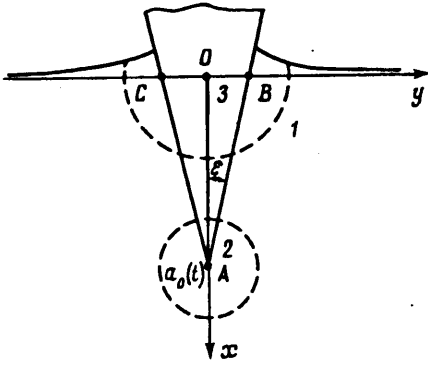
$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad \varphi_t(x, y, 0) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $x = f(y, t)$ — уравнение неизвестной свободной поверхности. Давление связано с потенциалом интегралом Коши—Лангранжа

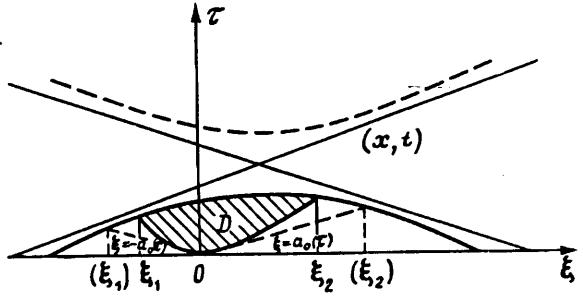
$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 = 0 \quad (1.5)$$

Сформулированная задача является нелинейной.

2. Внешнее решение для тонкого клина. Предположим, что полуугол при вершине клина мал ($\varepsilon \ll 1$). Примем его за малый параметр, по которому искомое решение будем разлагать в ряд. Предварительно зону возмущенного течения (фиг. 1) разобьем на области 1, 2 и 3. В каждой из областей выбирается



Фиг. 1



Фиг. 2

свой масштаб независимых и зависимых переменных. Так, в области I ($x \sim y \sim 1$, $\varphi \sim \varepsilon$) потенциал $\varphi(x, y, t)$ разыскиваем в виде ряда по степеням ε . Если ограничиться главным членом, то для него имеет место обычная линейризованная постановка задачи, которая позволяет граничное условие (1.2) снести на ось x и записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \dot{a}_0(t) \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq a_0(t)$$

На остальной части оси x имеем $\partial_x \varphi = 0$ ($a_0(t) < x < \infty$). На свободной поверхности первое соотношение (1.3) после линейризации переходит в условие $\varphi(0, y, t) = 0$, которое позволяет продолжить потенциал в верхнюю полуплоскость нечетным образом. Давление, согласно (1.5), определяется равенством

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Условие (1.3) переходит в соотношение $\partial_x f = \partial_x \varphi(x=0)$, позволяющее определить форму возмущенной свободной поверхности. Таким образом, в области I возникает линейная задача, решение которой будем разыскивать методом запаздывающего потенциала

$$\varphi = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_y(X, 0, Z, t - r/c) dXdZ}{[y^2 + (x - X)^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} \quad (2.1)$$

$$r = [y^2 + (x - X)^2 + (z - Z)^2]^{1/2}$$

Здесь мощность источников $q = 2\varphi_y dXdZ$. В выражении (2.1) удобно перейти от переменной Z к переменной τ по формуле $\tau = t - r/c$. Тогда потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ с учетом обозначения $X = \xi$ будет

$$\varphi = - \frac{c}{\pi} \int_D \int \frac{\varphi_{y(x=0)} d\xi d\tau}{[c^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - y^2]^{3/2}} \quad (2.2)$$

В новых переменных (ξ, τ) область D есть часть плоскости $\tau \geq 0$ (фиг. 2), ограниченная нижней ветвью гиперболы

$$\tau = t - [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2}/c$$

и линиями $\xi = a_0(\tau)$ и $-\xi = a_0(\tau)$. В случае входа клина с постоянной скоростью $\xi = v_0\tau$ и $-\xi = -v_0\tau$ (штриховая линия на фиг. 2). Пределы интегрирования по переменной ξ находятся после определения корней уравнений

$$\tau_1 = t - [(x + a_0(\tau_1))^2 + y^2]^{1/2}/c$$

$$\tau_2 = t - ([x - a_0(\tau_2)]^2 + y^2)^{1/2}/c$$

$$\xi_1 = -a_0(\tau_1), \quad \xi_2 = a_0(\tau_2)$$

Учитывая, что для клина $\varphi_{x,y=0} = \text{const}$, можно вычислить интеграл (2.2) по переменной τ и записать потенциал в виде

$$\varphi(x, y, t) = \dot{a}_0(t) \varepsilon F(x, y, t)/\pi$$

$$F(x, y, t) = \int_0^{\xi_1} \left\{ \frac{1}{2} \ln r^2 - \ln |\tau_- + (\tau_-^2 - r^2)^{1/2}| \right\} d\xi + \\ + \int_0^{\xi_2} \left\{ \frac{1}{2} \ln r^2 - \ln |\tau_+ + (\tau_+^2 - r^2)^{1/2}| \right\} d\xi \quad (2.3)$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2, \quad \tau_{\pm} = c [t - a_0^{-1}(\pm \xi)]$$

Обратная функция по отношению к $a_0(\tau)$ обозначена выше через $a_0^{-1}(\xi)$. Поле скоростей для равномерного погружения клина находим после дифференцирования (2.3) по переменным x, y и интегрирования по переменной ξ в явном виде

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_0 \varepsilon}{\pi} \left[\ln \frac{M^4 (x_0^2 + y_0^2) Z_1 Z_{-1}}{(1 + Z_2)^2 (\beta Z_2 + Z_3) (\beta Z_2 + Z_{-3})} - \right. \\ \left. - \frac{1 + \beta}{\beta} \ln \frac{M^2 Z_1 Z_{-1}}{(Z_3 + \beta Z_2) (Z_{-3} + \beta Z_4)} \right] \quad (2.4)$$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{v_0 \varepsilon}{\pi} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{1 - x_0 - M Z_{-1}}{\beta^2 y_0} - \operatorname{arctg} \frac{1 + x_0 - M Z_1}{\beta^2 y_0} + \right. \\ + 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \beta) Z_1 - M(1 + x_0)}{M \beta y_0} - 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \beta) Z_1 - M(1 - x_0)}{M \beta y_0} - \\ - 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \beta) (Z_3 + \beta Z_2) - M^2 (1 + x_0)}{M^2 \beta y_0} + \\ \left. + 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \beta) (Z_{-3} + \beta Z_2) - M^2 (1 - x_0)}{M^2 \beta y_0} \right]$$

$$M = \frac{v_0}{c}, \quad \beta = (1 - M^2)^{1/2}, \quad x_0 = \frac{x}{v_0 t}, \quad y_0 = \frac{y}{v_0 t}$$

$$Z_{\pm 1} = [(1 \pm x_0)^2 + (1 - M^2) y_0^2]^{1/2}$$

$$Z_2 = [1 - M^2 (x_0^2 + y_0^2)]^{1/2}, \quad Z_{\pm 3} = 1 \pm M^2 x_0$$

Нетрудно заметить, что в окрестности носика ($x_0 \rightarrow 1, y_0 \rightarrow 0$) компонента скорости u_x (2.4) расходится, а компонента v_x принимает различные значения в зависимости от направления подхода к вершине клина.

3. Внутреннее решение в окрестности носика клина. Запишем уравнение (1.1) в системе координат, связанной с движущимся носиком клина: $X = x - a_0(t), Y = y$

$$\left(1 - \frac{\dot{a}_0^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\dot{a}_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial X} - \ddot{a}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) \quad (3.1)$$

Область неоднородности внешнего решения имеет, согласно (2.4), характерный размер $r \sim e^{-\beta}$, поэтому вводим новые масштабы переменных по формулам

$$X = x_1 e^{-\beta}, \quad Y = \frac{1}{\beta} y_1 e^{-\beta}, \quad \varphi = \varphi_1 e^{-\beta}, \quad \beta^2 = 1 - \frac{\dot{\alpha}_0^2}{c^2}$$

Переходя в уравнении (3.1) к внутренним переменным, получим для потенциала внутреннего решения φ_1 уравнение Лапласа. В новых переменных клин будет иметь полуугол $\varepsilon\beta$ и граничное условие на его ребрах примет вид

$$u_1 \frac{\varepsilon}{\beta} \pm v_1 = \frac{\dot{\alpha}_0}{\beta} \varepsilon (y_1 = \mp \varepsilon\beta x_1), \quad u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \quad v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \quad (3.2)$$

В отличие от случая несжимаемой жидкости условие (3.2) не является условием обтекания клина и приводит к задаче Гильберта с косой производной. Процедура нахождения решения этой задачи достаточно сложна, что усугубляется наличием разрывов на контуре тела в точках 0 и ∞ . Не останавливаясь на подробностях, изложим основные моменты получения решения. Предварительно конформно отобразим область течения на верхнюю полуплоскость. В верхней полуплоскости разыскиваем аналитическую функцию $\Phi(z) = u_1 - iv_1$, удовлетворяющую на отрицательной полуоси условию (3.2) с верхним знаком, а на положительной полуоси — с нижним знаком. Решение задачи Гильберта сводится к решению следующей задачи Римана: построить в верхней полуплоскости аналитическую функцию $\Phi(z) = \Phi^+(z)$, удовлетворяющую на оси x соотношению

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^-(x) + g(x)$$

где $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ — предельные значения аналитических функций в верхней и нижней полуплоскостях на оси x , $G(x)$ и $g(x)$ — заданные функции.

Определение внутреннего решения методом Римана было опубликовано в сборнике [5]. Ниже дается более простой способ построения внутреннего решения, применимый также для осесимметричного случая.

Представим потенциал абсолютного движения жидкости φ_1 в виде суммы потенциалов переносного и относительного движений

$$\varphi_1 = v_0(t) x_1 + \Phi(x_1, y_1, t) \quad (3.3)$$

Удобно разыскивать потенциал $\Phi(x_1, y_1, t)$ в полярных координатах (фиг. 3). Решение уравнения Лапласа в полярных координатах (θ, R) можно записать в следующей форме:

$$\Phi(\theta, R, t) = U(t) R^n \cos n\theta \quad (3.4)$$

Здесь $U(t)$ — произвольная функция параметра (времени), n — произвольное положительное число. Подставляя выражения (3.3) и (3.4) в условие для косой производной (3.2), получим, что оно удовлетворяется, если n есть корень уравнения

$$\operatorname{tg}[(n-1)\theta_1] = \varepsilon_1, \quad \theta_1 = \pi - \theta_0, \quad \theta_0 = \varepsilon\beta, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon/\beta$$

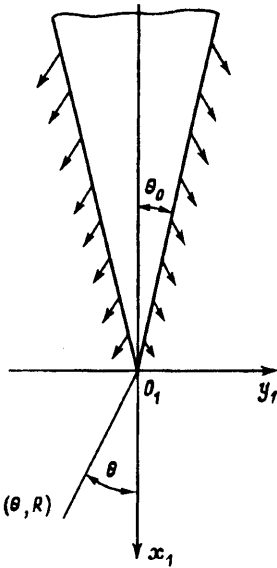
члены, содержащие переменную R , сократились.

Отсюда, ограничиваясь в арктангенсе главным членом, найдем, что $n = 1 + \varepsilon_1/(\pi - \varepsilon\beta)$ и компоненты скорости

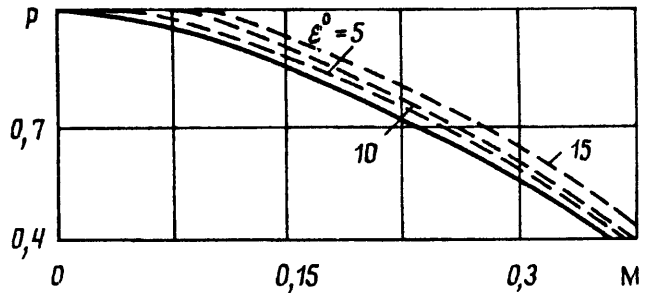
$$u_1 = v_0 - U(t) R^\alpha \cos \alpha\theta, \quad v_1 = U(t) R^\alpha \sin \alpha\theta \quad (3.5)$$

$$R^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \alpha = \varepsilon_1/(\pi - \varepsilon\beta)$$

Нетрудно непосредственно проверить, что решение (3.5) удовлетворяет граничному условию (3.2) при произвольной функции $U(t)$, которая находится из условия срачивания с внешним решением. Рассмотрим подробнее вид этой



Фиг. 3



Фиг. 4

функции для случая входа клина с постоянной скоростью v_0 . Из (2.4) для внутренних пределов внешнего решения имеем

$$\begin{aligned}
 [u_e]_i &= -\frac{v_0 \varepsilon}{\pi \beta} \left\{ \ln [(x - v_0 t)^2 + \beta^2 y^2]^{1/2} - \ln \frac{2\beta^2 v_0 t}{M^{2(1-\beta)} (1 + \beta)^{2\beta}} \right\} \\
 [v_e]_i &= \frac{v_0 \varepsilon}{\pi} \left\{ \frac{3}{2} \pi - \operatorname{arctg} \frac{(x - v_0 t) + M [(x - v_0 t)^2 + \beta^2 y^2]^{1/2}}{\beta y} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{(1 + \beta) [(x - v_0 t)^2 + \beta^2 y^2]^{1/2} - M (x - v_0 t)}{M \beta y} \right\}
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогичным образом из (3.5) находим внешние пределы внутреннего решения $[u_i]_e$ и $[\beta v_i]_e$. В частности, используя следующее соотношение, найдем функцию $U(t)$

$$[u_i]_e = v_0 - U(t) e^{-\nu \pi} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi^2} \right) \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_1}{2\pi} \ln [(x - v_0 t)^2 + \beta^2 y^2] \right\} \quad (3.7)$$

$$U(t) = U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \dots$$

$$U_0(t) = v_0 e^{-\nu \pi}, \quad U_1 = -\frac{v_0}{\beta \pi} e^{-\nu \pi} \left[\ln \frac{2\beta^2 v_0 t}{M^{2(1-\beta)} (1 + \beta)^\beta} + \frac{\beta}{\pi} \right]$$

Равенство $[v_e]_i = [\beta v_i]_e$ проверяется непосредственно с использованием (3.5)—(3.6).

4. Давление в носике клина. Составное решение для компонент скорости u_e и v_e можно получить по формулам (2.4), (3.5) и (3.6). Потенциал φ_e определяется по формуле

$$\varphi_e = \int_0^x u_e(x, 0, t) dx + \int_0^y v_e dy \quad (4.1)$$

Опуская достаточно громоздкие выражения для u_c и v_c , перейдем к определению максимального давления в носике клина. Дифференцируя (4.1) по времени, находим, что в вершине клина

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} &= v_0 \int_0^1 u_c(x_0, 0) dx_0 - v_0^2 \\ u_c &= v_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{\pi} \left[\ln \frac{M^4 (x_0^2 + y_0^2) Z_1}{(1 + Z_2)^2 (\beta Z_2 + Z_3) (\beta Z_2 + Z_{-3})} - \right. \right. \\ &\quad - \frac{1 + \beta}{\beta} \ln \frac{M^2 Z_1}{(\beta Z_2 + Z_3) (\beta Z_2 + Z_{-3})} - \frac{1}{\beta} \ln \frac{2\beta^2}{M^{2(1-\beta)} (1 + \beta)^\beta} \left. \right] - \\ &\quad - \left[1 + \frac{\varepsilon}{\pi\beta} \ln \frac{M^{2(1-\beta)} (1 + \beta)^{2\beta}}{2\beta^2} \right] [(1 - x_0)^2 + \beta^2 y_0^2]^{\nu_2 - \varphi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда с помощью интеграла Коши—Лангранжа (1.5) давление в носике можно представить в виде

$$c_p^* = \frac{p^* - p_0}{q} = 1 + \frac{4\varepsilon \ln 2}{\pi} \left[1 - \frac{M^2}{4 \ln 2} (1 - 2 \ln M) \right], \quad q = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) справедлива для чисел $M \ll 1$. В этом случае можно упростить подынтегральное выражение (4.2), опустив на нем члены $O(M^4)$. Попутно заметим, что основанная на волновом уравнении модель течения вблизи носика клина пригодна только для малых чисел Маха.

Зависимость безразмерного нормированного давления $P^* = (c_p^* - 1) \pi / 4\varepsilon \ln 2$ от числа Маха показана на фиг. 4. Добавка к скоростному напору за счет нестационарных эффектов с увеличением числа Маха уменьшается примерно на 10%. На этой же фигуре штриховыми линиями приведены результаты для давления, полученные на основе численного расчета интеграла (4.2); наблюдается хорошее совпадение данных с формулой (4.3).

5. Постановка задачи и внешнее решение для конуса. Тонкий конус с полууглом при вершине $\varepsilon \ll 1$ входит в жидкое полупространство. Закон движения вершины конуса задается функцией $a_0(t)$. В неподвижной цилиндрической системе координат (x, r) начально-краевая задача сводится к решению для потенциала $\varphi(x, r, t)$ волнового уравнения

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

при граничных и начальных условиях (1.2)—(1.4), в которых переменная y заменяется на переменную r .

Полуугол при вершине конуса ε примем за малый параметр, по которому искомое решение будем разлагать в ряд. Зону возмущенного течения разобьем снова на три области, как показано на фиг. 1. В области I принимаем масштаб переменных $x \sim r \sim 1$, $\varphi \sim \varepsilon^2$.

Потенциал $\varphi(x, r, t)$ разыскиваем в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+2} \varphi_n(x, r, t)$$

Главный член этого разложения определяется решением линейной задачи, в которой граничное условие (1.2) сносится на ось и записывается в виде

$$\partial_r \varphi = v_0(t) \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq a_0(t); \quad \partial_x \varphi = 0, \quad a_0(t) < x < \infty$$

На свободной поверхности динамическое условие (1.3) после линеаризации дает $\varphi(0, r, t) = 0$, что позволяет продолжить потенциал в верхнее по-

лупространство нечетным образом. Кинематическое условие (1.3) переходит в соотношение $\partial_t f = \partial_x \varphi(0, r, t)$, позволяющее определить форму возмущенной свободной поверхности. Таким образом, линейная задача, возникающая для главного члена потенциала в области I , подобна решенной в [7].

Ограничимся для простоты случаем погружения конуса с постоянной скоростью, тогда потенциал внешнего течения можно записать в элементарных функциях [7]

$$\varphi_e(x, r, t) = -\frac{v_0 \varepsilon^2}{2} \left(\int_0^{\xi_2} \frac{(v_0 t' - \xi) d\xi}{[(\xi - x)^2 + r^2]^{3/2}} - \int_{\xi_1}^0 \frac{(v_0 t' + \xi) d\xi}{[(\xi - x)^2 + r^2]^{3/2}} \right)$$

$$\xi_2 (M^2 - 1) = M^2 x - v_0 t + M [(v_0 t - x)^2 + (1 - M^2) r^2]^{1/2}$$

$$\xi_1 (M^2 - 1) = M^2 x + v_0 t + M [(v_0 t + x)^2 + (1 - M^2) r^2]^{1/2}, \quad t' = t - [(\xi - x)^2 + r^2]^{1/2}/c$$

Проинтегрировав получим

$$\begin{aligned} \varphi_e = & \frac{1}{2} \varepsilon^2 v_0 \left\{ (v_0 t - x) \ln \left| \frac{x - \xi_2 + [(x - \xi_2)^2 + r^2]^{1/2}}{x + (x^2 + r^2)^{1/2}} \right| + \right. \\ & + (v_0 t + x) \ln \left| \frac{x - \xi_1 + [(x - \xi_1)^2 + r^2]^{1/2}}{x + (x^2 + r^2)^{1/2}} \right| + M (\xi_1 + \xi_2) + \\ & \left. + [(x - \xi_2)^2 + r^2]^{1/2} - [(x - \xi_1)^2 + r^2]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нетрудно проверить, что при $r \rightarrow 0$ и $x \rightarrow v_0 t$ величина $\xi_2 \rightarrow v_0 t$, следовательно, компоненты скорости и давления расходятся в областях 2 и 3, показанных на фиг. 1.

6. Внутреннее решение в окрестности вершины конуса. Перепишем уравнение (5.1) в системе координат, связанной с движущимся носиком конуса: $X = x - a_0(t)$. В новых переменных волновое уравнение принимает вид

$$\left(1 - \frac{\dot{a}_0^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\dot{a}_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial X} - \ddot{a}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right) \quad (6.1)$$

Область неоднородности внешнего решения (5.2) имеет характерный размер $\sim e^{-\nu_0}$, что позволяет ввести новые масштабы переменных по формулам

$$X = x_1 e^{-\nu_0}, \quad r = \frac{1}{\beta} r_1 e^{-\nu_0}, \quad \varphi = \varphi e^{-\nu_0}$$

Переходя в уравнении (6.1) к внутренним переменным, получим для потенциала внутреннего решения уравнения Лапласа $\Delta \varphi_i = 0$ в цилиндрических координатах. В новых переменных полуугол конуса будет равен $\theta_0 = \varepsilon \beta$ и граничное условие на его поверхности примет вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varepsilon + \frac{\partial \varphi_i}{\partial r_1} = \frac{\dot{a}_0}{\beta} \varepsilon, \quad r_1 = -\varepsilon \beta x_1 \quad (6.2)$$

Снова, как и для клина, имеем задачу Гильберта с косою производной. Потенциал абсолютного движения жидкости запишем в виде суммы потенциала переносного и относительного движений

$$\varphi_i = v_0 x_1 + \Phi(x_1, r_1, t) + C(t) \quad (6.3)$$

Здесь $C(t)$ — произвольная функция времени. Потенциал $\Phi(x_1, r_1, t)$ удобно разыскивать в сферических координатах (фиг. 3). Решение уравнения Лапласа в сферических координатах (θ, R, ψ) можно представить в форме [8]

$$\Phi(\theta, R, t) = U(t) R^n P_n(\cos \theta) \quad (6.4)$$

Здесь $U(t)$ — произвольная функция времени, $P_n(\cos \theta)$ — функция Лежандра произвольной степени. Подставляя (6.3) и (6.4) в граничное условие (6.2), приходим к соотношению, не содержащему переменную R , вида

$$nP_n(\cos \theta) (\varepsilon_1 \cos \theta + \sin \theta) + P_n'(\cos \theta) (\cos \theta - \varepsilon_1 \sin \theta) = 0, \quad \theta = \pi - \theta_0. \quad (6.5)$$

Из условия (6.5) нужно найти зависимость $n(\theta_0)$. В случае несжимаемой жидкости [9] соответствующее условие имело вид $P_n'(-\cos \theta_0) = 0$. Для удовлетворения граничного условия (6.5) воспользуемся новым асимптотическим представлением функции Лежандра, полученным в [9]. Будем интересоваться ниже функцией Лежандра с дробной степенью, близкой к единице. Имеем

$$P_{1+m}(\cos \theta) = \cos \theta + m [\cos \theta \ln |1 + \cos \theta| + (1 - \ln 2) \cos \theta - 1] + \dots, \\ n = 1 + m \quad (6.6)$$

Продифференцируем выражение (6.6) и воспользуемся граничным условием (6.5), тогда получим квадратное уравнение относительно n , позволяющее в явном виде представить зависимость $n(\theta_0)$. Не выписывая полностью громоздкой формулы, ограничимся разложением функции $n(\theta_0)$, достаточным для определения главных членов внутреннего решения и сращения.

В результате имеем

$$n = 1 + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \ln | \varepsilon \beta / 2 |) / 2 \quad (6.7)$$

Подставляя найденное n (6.7) и выражение (6.6) в формулу (6.4), а затем в (6.3), найдем потенциал, определяющий в явном виде внутреннее решение

$$\varphi_i = v_0 x_1 + U(t) (x_1^2 + r_1^2)^{(2+\varepsilon^2)/4} \{ \cos \theta + \varepsilon^2 [\cos \theta \ln |1 + \cos \theta| + \\ + (1 - \ln 2) \cos \theta - 1] / 2 \} + C(t) \cos \theta = x_1 (x_1^2 + y_1^2)^{-1/2} \quad (6.8)$$

Произвольные функции $U(t)$ и $C(t)$ находятся из условий сращения с внешним решением. Сначала вычислим внутренний предел внешнего решения

$$[\varphi_e]_i = \frac{1}{2} \varepsilon^2 v_0 \left\{ (x - a_0) \left(\ln \left| \frac{4(1-M)}{1+M} \right| - 2(1-M) - \ln |x - a_0| \right) \right. \\ \left. + [(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2} \left| a_0^{-1} \right| + [(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2} + \right. \\ \left. + a_0 \left[2 \ln \left| \frac{2}{1+M} \right| - 2(1-M) \right] \right\} \quad (6.9)$$

Подобным образом выписывается внешний предел внутреннего решения (6.8) $[\varphi_i]_e$.

Представляя искомую функцию $U(t)$ в виде ряда

$$U(t) = U_0(t) + \varepsilon U_1(t) + \varepsilon^2 U_2(t) + \dots$$

находим из условия $[\varphi_e]_i = e^{-\nu_0 t} [\varphi_i]_e$, что

$$U_0 = -v_0, \quad U_1 = \frac{v_0}{2}, \quad U_2 = \frac{v_0}{2} \left[\ln \left| 2a_0 \frac{1-M}{1+M} \right| + 2M - 1 \right] \\ C(t) = 0,5 v_0 a_0 \varepsilon^2 \left[2 \ln \left| \frac{2}{1+M} \right| + 2(1-M) \right] \quad (6.10)$$

Составное решение φ_c находится по формуле

$$\varphi_c = \varphi_e + e^{-\nu_0 t} \varphi_i - [\varphi_e]_i$$

слагаемые в которой определены выражениями (5.2), (6.8), (6.9) и (6.10).

В окончательном виде имеем

$$\begin{aligned} \varphi_c = & v_0 (x - a_0) \left[1 + 0,5 \varepsilon^2 \left(2(1 - M) - \ln \left| 4a_0 \frac{1 - M}{1 + M} \right| \right) \right] + \\ & + 0,5 \varepsilon^2 v_0 \left\{ (x + a_0) \ln |x + a_0 + [(x + a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2}| - \right. \\ & - 2 a_0 \ln |\beta [x + (x^2 + r^2)^{1/2}]| - [(x + a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2} + \\ & + x \left(\ln \left| \frac{1 - M}{1 + M} \right| + 2M \right) \left. \right\} + U(t) e^{\nu t} [(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{\nu/4} \times \\ & \times \left\{ x - a_0 + 0,5 \varepsilon^2 [(x - a_0) \ln \left| \frac{x - a_0 + [(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2}}{[(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2}} \right| - \right. \\ & \left. - [(x - a_0)^2 + \beta^2 r^2]^{1/2} + (1 - \ln 2)(x - a_0) \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Потенциал φ_c определяет равномерно пригодное решение как вблизи, так и вдали от вершины конуса. С помощью интеграла Коши — Лагранжа (1.5) можно определить распределение давления на поверхности конуса и, в частности, величину давления в вершине конуса. Опуская выкладки, найдем, что коэффициент давления, отнесенный к скоростному напору, определяется формулой

$$c_p = \frac{p^* - p_0}{q} = 1 + 2 \varepsilon^2 [1 - M + \ln |\beta (1 + M)/2|]$$

Слагаемое в квадратных скобках характеризует превышение давления по сравнению с давлением торможения в стационарном случае. Влияние сжимаемости приводит к уменьшению добавки по сравнению со случаем несжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wagner H.* Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten // ZAMM. 1932. В. 12. № 4. S. 193—215.
2. *Лаврентьев М. А., Келдыш М. В.* Общая задача о жестком ударе о воду // Тр. ЦАГИ. 1935. Вып. 152. С. 5—12.
3. *Седов Л. И.* Удар плавающего клина // Там же. С. 27—31.
4. *Гонор А. Л.* Вход тонкого клина в жидкость // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 5. С. 1068—1072.
5. *Гонор А. Л.* Аналитическое решение нелинейной задачи погружения тонкого клина в сжимаемую жидкость // Механика: Современ. пробл. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 41—49.
6. *Сагомонян А. Я.* Проникание узкого клина в сжимаемую жидкость // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1956. № 2. С. 13—18.
7. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
8. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 476 с.
9. *Гонор А. Л.* Асимптотическое решение нелинейной осесимметричной задачи входа в жидкость тонкого тела // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 4. С. 812—817.

Москва

Поступила в редакцию
20.1.1993