МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1993

УДК 532.51:537.84

© 1993 г. В. Л. ТИМОШЕНКО, И. С. ШИКИН

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ И СТРУКТУРА РАЗРЫВОВ СЛАБОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Рассматриваются длинные волны в вязкой, теплопроводной среде с конечной электропроводностью и уравнением состояния общего вида, распространяющиеся под углом к магнитному полю. Для получения модельного уравнения используется метод [1]. На основе полученного уравнения рассмотрена структура слабых магнитогидродинамических ударных волн.

Слабонелинейные магнитогидродинамические волны, распространяющиеся в поперечном и в продольном к направлению движения волны магнитном поле, изучались в [2] для совершенного газа с учетом конечной электропроводности. Для поперечных волн в этой работе получено модельное уравнение Бюргерса; для продольных — модифицированное уравнение Бюргерса. Для слабонелинейных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю в совершенном газе с джоулевой диссипацией, в [3] получено модельное уравнение Бюргерса.

1. Рассмотрим волны в вязкой, теплопроводной, полностью ионизованной плазме с конечной электропроводностью. Для описания движения плазмы используем уравнения неразрывности, движения, изменения энтропии и уравнение индукции. Считаем, что коэффициенты теплопроводности $\varkappa$, первой η и второй ζ вязкости и магнитной вязкости ν_m постоянны.

Для одномерного движения плазмы (вдоль оси x) систему основных магнитогидродинамических уравнений можно представить в матричном виде

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + D\mathrm{U} = 0 \tag{1.1}$$

где U — вектор магнитогидродинамического состояния плазмы, т. е. совокупность семи магнитогидродинамических величин $\mathrm{U}^T = (\rho,\ s,\ u,\ w,\ B_z,\ v,\ B_y)$. Здесь B — магнитная индукция, T, ρ, p, s, u, v, w — температура, плотность, давление, энтропия и проекции скорости среды на декартовы оси координат. Матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{p_\rho}{\rho} & \dfrac{p_s}{\rho} & u & 0 & \dfrac{B_z}{4\pi\rho} & 0 & \dfrac{B_y}{4\pi\rho} \\ 0 & 0 & 0 & u & -\dfrac{B_x}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_x & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & -\dfrac{B_x}{4\pi\rho} \\ 0 & 0 & B_y & 0 & 0 & -B_x & u \end{pmatrix}$$

Здесь D — дифференциальный оператор, который представим в виде

$$D = \sum_{\beta=1}^{2} \prod_{\alpha=1}^{2} \left(K_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$(K_1^1)_{21} = (K_1^1)_{22} = -\frac{\varkappa}{\rho T}, \quad (K_1^1)_{23} = -\frac{\zeta + 4/3\,\eta}{\rho T}, \quad (K_1^1)_{25} = (K_1^1)_{27} = -\frac{\nu_m}{4\pi\rho T}$$

$$(K_2^1)_{11} = T_\rho, \quad (K_2^1)_{22} = T_s, \quad (K_2^1)_{33} = u, \quad (K_2^1)_{55} = B_z, \quad (K_2^1)_{77} = B_y$$

$$(K_1^2)_{23} = \frac{\zeta + 4/3\,\eta}{\rho T}\,u, \quad (K_1^2)_{25} = \frac{\nu_m}{4\pi\rho T}\,B_z, \quad (K_1^2)_{27} = \frac{\nu_m}{4\pi\rho T}\,B_y,$$

$$(K_1^2)_{33} = -\frac{\zeta + 4/3\,\eta}{\rho}, \quad (K_1^2)_{44} = (K_1^2)_{66} = -\frac{\eta}{\rho}$$

$$(K_1^2)_{55} = (K_1^2)_{77} = -\nu_m$$

Остальные элементы матриц K_1^1, K_1^2, K_2^1 равны нулю. Матрица $K_2^2 = I$ — единичная.

Разделим вектор U на две части: $U^T = (U^+, U^-)$, где

$$(U^+)^T = (\rho, s, u, w, B_z), \quad (U^-)^T = (v, B_y) \tag{1.2}$$

Будем считать, что существует такое постоянное решение системы (1.1) $(U_0)^T = (\rho_0, s_0, 0, 0, B_z^{(0)}, 0, 0)$, что векторы $U^\pm$ могут быть разложены около этого решения в ряд по степеням малого параметра ε

$$U^+ = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i^+, \quad U^- = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i U_i^- \tag{1.3}$$

где $U_i^\pm$ $(i = 1, 2, \dots)$ — дважды дифференцируемые функции по x и t.

Для длинноволнового приближения малый параметр ε связан с малостью волнового числа k и в уравнения явно не входит.

Вектор U должен удовлетворять следующим граничным условиям: $U_i^\pm \to 0$ $(i = 1, 2, \dots)$, $x \to -\infty$, $U^\pm < \mathrm{const}$, $x \to +\infty$.

Матрица A может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} A^+ & B \\ C & A^- \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

где A^+, A^- — матрицы размерности (5×5) и (2×2) соответственно, элементы которых являются функциями от компонент вектора U^+, а элементы матриц B и C — функции только от U^-. В силу (1.3) эти матрицы также могут быть разложены по малому параметру ε следующим образом:

$$A^\pm (U^+) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j A_j^\pm, \quad A_1^\pm = U_1^+ (\nabla_{U^+} A^\pm)_0 \tag{1.5}$$

$$B(U^-) = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j U_j^- (\nabla_{U^-} B)_0, \quad C(U^-) = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j U_j^- (\nabla_{U^-} C)_0$$

Вращением системы координат вокруг оси x можно положить $B_y^{(0)} = 0$. Если θ — угол между осью x и направлением вектора B_0, то $B_x = B_0 \cos\theta$, $B_z^{(0)} = B_0 \sin\theta$, $\mathrm{tg}\,\theta \sim 1$.

В такой системе координат матрица A_0^+ имеет пять различных собственных значений λ_i $(i = 1, \dots, 5)$, а A_0^- — два $\lambda_{6,7}$ [4]:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm a_+, \quad \lambda_{4,5} = \pm a_-, \quad \lambda_{6,7} = \pm V_A \cos\theta$$

$$a_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left(V_A^2 + a_0^2 \pm \sqrt{(V_A^2 + a_0^2)^2 - 4a_0^2 V_A^2 \cos^2\theta}\right)$$

$$V_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad a_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)},$$

Величины $\lambda_{2,3}$ являются фазовыми скоростями двух быстрых и $\lambda_{4,5}$ — двух медленных магнитозвуковых волн (распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x); величины $\lambda_{6,7}$ представляют собой фазовые скорости двух альфвеновских волн (распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x); λ_1 — фазовая скорость энтропийной волны, равная нулю.

2. На основе системы уравнений (1.1) будем рассматривать распространение в однородной среде одномерных длинных волн малой, но конечной амплитуды с учетом диссипативных процессов.

Для описания длинноволновых явлений необходимо ввести новые пространственные и временные переменные, сделав масштабные преобразования растяжения пространства и времени по формулам

$$\xi = \varepsilon(x - \lambda_0 t), \qquad \tau = \varepsilon^2 t \tag{2.1}$$

где λ_0 — одно из ненулевых собственных значений матрицы A_0^+.

Для определенности будем рассматривать быстрые магнитозвуковые волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси x. Тогда $\lambda_0 = -a_+$.

В новых переменных оператор D, содержащий производные $\partial/\partial\xi$ и $\partial^2/\partial\xi^2$, запишется следующим образом:

$$\varepsilon^2 D\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \mathrm{U}\right)\mathrm{U} = \varepsilon^2 \sum_{r=0}^{2} \varepsilon^r D_r\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \mathrm{U}\right)\mathrm{U} \tag{2.2}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} G_r^+ & F_r^- \\ F_r^+ & G_r^- \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Подставив (1.4), (2.2), (2.3) в (1.1) и разделив систему (1.1) на две части, получим

$$-\lambda_0 \frac{\partial \mathrm{U}^+}{\partial\xi} + \varepsilon\frac{\partial \mathrm{U}^+}{\partial\tau} + A^+\frac{\partial \mathrm{U}^+}{\partial\xi} + B\frac{\partial \mathrm{U}^-}{\partial\xi} + \varepsilon\sum_{r=0}^{2}\varepsilon^r F_r^-\mathrm{U}^- + \varepsilon\sum_{r=0}^{2}\varepsilon^r G_r^+\mathrm{U}^+ = 0 \tag{2.4}$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial \mathrm{U}^-}{\partial\xi} + \varepsilon\frac{\partial \mathrm{U}^-}{\partial\tau} + A^-\frac{\partial \mathrm{U}^-}{\partial\xi} + C\frac{\partial \mathrm{U}^+}{\partial\xi} + \varepsilon\sum_{r=0}^{2}\varepsilon^r G_r^+\mathrm{U}^+ + \varepsilon\sum_{r=0}^{2}\varepsilon^r F_r^-\mathrm{U}^- = 0 \tag{2.5}$$

Элемент G_r^+ оператора D_r является функцией от U^+ и, следовательно, представляется в виде следующего ряда по степеням ε:

$$G_r^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j G_{rj}^+ \tag{2.6}$$

Подставляя в (2.4) разложение (2.6), (1.5) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, получим цепочку уравнений

$$\varepsilon^2: \quad -\lambda_0 \frac{\partial \mathrm{U}_1^+}{\partial\xi} + A_0^+\frac{\partial \mathrm{U}_1^+}{\partial\xi} = 0 \tag{2.7}$$

$$\varepsilon^3: \quad -\lambda_0 \frac{\partial \mathrm{U}_2^+}{\partial\xi} + A_0^+\frac{\partial \mathrm{U}_2^+}{\partial\xi} + \frac{\partial \mathrm{U}_1^+}{\partial\tau} + A_1^+\frac{\partial \mathrm{U}_1^+}{\partial\xi} + G_{00}^+\mathrm{U}_1^+ = 0 \tag{2.8}$$

и т. д.

Здесь оператор G^+_{00} представляет собой произведение постоянной матрицы $g^+_{00} = \{g_{ij}\}$ и $\partial^2/\partial\xi^2$. Матрица g^+_{00} имеет ненулевые элементы

$$g_{21} = -\frac{\varkappa T_\rho}{\rho_0 T},\quad g_{22} = -\frac{\varkappa T_s}{\rho_0 T},\quad g_{33} = -\frac{\zeta + 4/3\,\eta}{\rho_0},\quad g_{55} = g_{44} = -\frac{\eta}{\rho_0} \tag{2.9}$$

Пусть $\mathbf{r}^+_0$ — правый собственный вектор матрицы A^+_0 для собственного значения λ_0. Тогда, интегрируя (2.7) по ξ, получим

$$\mathbf{U}^+_1 = \mathbf{r}^+_0 u^{(I)} + \mathbf{V}_1(\tau)$$

где $u^{(1)}$ — одна из компонент вектора $\mathbf{U}^+_1$; соответствующая компонента $\mathbf{r}_0{}^+$ нормирована на единицу, $\mathbf{V}_1^*$ — произвольный вектор, зависящий только от τ. Используя предположение о граничных условиях, получаем $\mathbf{V}_1 \equiv 0$.

Для собственного значения $\lambda_0 = -a_+$

$$(\mathbf{U}^+_1)^T = \left(1,\ 0,\ -\frac{a_+}{\rho_J},\ \frac{a_+^2 - a_0^2}{a_+\rho_0}\operatorname{ctg}\theta,\ \frac{a_+^2 - a_0^2}{V_A^2\sin\theta}\frac{B_0}{\rho_0}\right)\rho^{(1)} \tag{2.10}$$

Изменение энтропии в такой волне равно нулю (аналогично случаю газовой динамики). Из уравнения состояния следует, что

$$p^{(1)} = a_0^2\rho^{(1)} \tag{2.11}$$

Пусть $\mathbf{l}^+_0$ — левый собственный вектор матрицы A^+_0 для собственного значения $\lambda_0 = -a_+$ такой, что $\mathbf{l}^+_0\mathbf{r}^+_0 = 1$

$$l^+_0 = \left\{\frac{1}{2\rho_0}\frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2},\ \frac{p_s}{2\rho_0 p_\rho}\frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2},\ -\frac{1}{2a_+}\frac{a_+^2}{a_0^2}\frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2}\right.$$
$$\left.\frac{1}{2a_+}\frac{a_+^2}{a_0^2}\frac{a_-^2\operatorname{tg}\theta}{a_+^2 - a_-^2},\ \frac{1}{2B_0}\frac{V_A^2\sin\theta}{a_+^2 - a_-^2}\right\} \tag{2.12}$$

Вектор $\mathbf{U}^+_2$ можно исключить из уравнения (2.8), умножив его слева на $\mathbf{l}^+_0$. Тогда, используя (2.10), получим окончательное уравнение для $\rho^{(1)}$ — уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\tau} + C_1\rho^{(1)}\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\xi} = C_2\frac{\partial^2\rho^{(1)}}{\partial\xi^2} \tag{2.13}$$

$$C_1 = l^+_0\,(r^+_0\,(\nabla_U A^+)_0\,r^+_0) = \text{const},\qquad C_2 = l^+_0 g^+_{00} r^+_0 = \text{const}$$

Аналогичные уравнения можно написать для $u^{(1)}$, $w^{(1)}$, $B_z{}^{(1)}$ и $p^{(1)}$, используя (2.10), (2.11).

Уравнение (2.13) для величины $\rho - \rho_0$ как функции от t и $\zeta = x - \lambda_0 t$ будет иметь вид

$$\frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial t} + C_1(\rho - \rho_0)\frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial\zeta} = C_2\frac{\partial^2(\rho - \rho_0)}{\partial\zeta^2} \tag{2.14}$$

Малый параметр ε в уравнение (2.14) не входит.

При вычислении C_2 необходимо учесть, что выражение $T_\rho p_s/(Tp_\rho)$ при использовании известных термодинамических тождеств [5] преобразуется к виду

$$\frac{T_\rho p_s}{Tp_\rho} = \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \tag{2.15}$$

где c_p и c_V — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме.

Учитывая (2.9), (2.10), (2.12) и (2.15), получаем

$$C_1 = -\frac{a_+}{\rho_0}\left\{1 + \frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2}\frac{\rho_0}{2a_0^2}p_{\rho\rho} + \frac{(a_0^2 - a_-^2)(a_+^2 - a_0^2)^2}{2(a_+^2 - a_-^2)a_0^2 V_A^2 \sin^2\theta}\right\}$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2\rho_0}\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right)\frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2} + \frac{1}{2\rho_0}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{a_+^2}{a_0^2}\frac{a_0^2 - a_-^2}{a_+^2 - a_-^2} +$$

$$+ \frac{\eta}{\rho_0}\frac{a_-^2}{a_0^2}\frac{a_+^2 - a_0^2}{a_+^2 - a_-^2} + \frac{\nu_m}{2}\frac{a_+^2 - a_0^2}{a_+^2 - a_-^2}$$

При отсутствии магнитного поля $a_+ = a_0$, $a_- = 0$ и коэффициенты C_1 и C_2 принимают вид

$$C_1 = -\frac{a_0}{\rho_0}\left\{1 + \frac{\rho_0}{2a_0^2}p_{\rho\rho}\right\} = -\frac{a_0^5\rho_0^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right),$$

$$C_2 = \frac{\varkappa}{2\rho_0}\left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right) + \frac{1}{2\rho_0}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)$$

Уравнение для $\rho^{(1)}$ (2.13) совпадает при этом с аналогичным уравнением газовой динамики [5].

3. На основе модельного уравнения Бюргерса может быть получено решение, описывающее структуру ударных волн слабой интенсивности.

Считая, что функция $\rho(\zeta, t)$ в уравнении Бюргерса (2.14) зависит от комбинации $y = \zeta + c_0 t$, получаем первый интеграл уравнения (2.14) в виде

$$C_2\frac{d\rho}{dy} = \frac{C_1}{2}(\rho - \rho_0)\left(\rho - \rho_0 + \frac{2c_0}{C_1}\right) \tag{3.1}$$

Отсюда следует связь величины скачка плотности $\Delta\rho$ и скорости ударной волны в виде

$$\Delta\rho = \rho(+\infty) - \rho(-\infty) = \rho_1 - \rho_0 = -\frac{2c_0}{C_1}$$

Решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям, есть

$$\rho = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_0}{2}\,th\left\{\frac{(\rho_1 - \rho_0)C_1}{4C_2}y\right\}$$

Полученное решение описывает ударную волну (слабой интенсивности) с конечной шириной, равной $\delta \sim 2C_2/c_0 = -4C_2/((\rho_1 - \rho_0)C_1)$.

Так как коэффициенты C_1 и C_2 вычислены, можно получить оценки для δ.

Пусть u_0 — характерная скорость задачи. Считаем, что $\varkappa T_\rho p_s/(\rho_0 T p_\rho) \sim \chi$, где χ — коэффициент температуропроводности; a_+, a_-, a_0, c_0 имеют одинаковый порядок u_0; разности $a_+^2 - a_-^2$, $a_+^2 - a_0^2$, $a_0^2 - a_-^2$ имеют порядок u_0^2. Тогда

$$\delta \sim \frac{\chi}{u_0} + \frac{\nu}{u_0} + \frac{\nu_m}{u_0}$$

где ν — кинематическая вязкость.

Если L — характерный размер задачи, то

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\mathrm{Pe}} + \frac{1}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{R_m}$$

Здесь Pe, Re, R_m — безразмерные числа Пекле, Рейнольдса и магнитное число Рейнольдса соответственно.

Как известно из кинетической теории газов

$$\nu \sim l v_i, \quad \chi \sim l v_e, \quad \sigma \sim \frac{e^2 n l}{m_e v_e}$$

где l — длина свободного пробега частиц, v_e, v_i — тепловые скорости электронов и ионов. m_e — масса электрона, e — заряд электрона, n — число частиц в единице объема. Учитывая эти выражения, получим

$$\delta \sim \frac{1}{u_0}\left(l v_e + l v_i + \frac{c^2 m_e v_e}{4\pi e^2 n l}\right)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taniuti T., Wei C.-C.* Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation//J. Phys. Soc. Jap. 1968. V. 24. № 4. P. 941—946.
2. *Селезов И. Т., Корсунский С. В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наук. думка, 1991. 198 с.
3. *Рудерман М. С.* Метод получения уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса//ПММ. 1975. Т. 39. № 4. С. 686—694.
4. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.X.1992