

УДК 532.5.031 + 532.526 + 532.551/556

© 1993 г. Г. Ю. СТЕПАНОВ

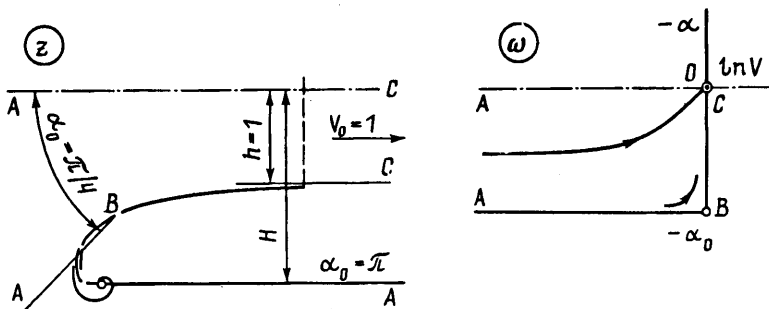
ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ КАНАЛОВ И РЕШЕТОК ТУРБОМАШИН С БЕЗОТРЫВНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Одна из важных задач теории отрывных течений — построение каналов и тел с безотрывным обтеканием. При больших числах Рейнольдса, когда вязкость жидкости проявляется только в тонких пограничных слоях на твердых стенках, а распределение давления на них определено внешним потенциальным потоком, безотрывное обтекание гарантировано при невозрастающем по потоку давлении на стенках (или неубывающей скорости на границах потенциального потока, т. е. тел вытеснения). Наименьшие габариты каналов и тел и минимальная скорость диссипации механической энергии в пограничных слоях достигаются при кусочно-постоянных и только возрастающих скоростях на границах. Для построения каналов и тел с таким распределением скорости можно использовать математический аппарат теории струй невязкой жидкости [1, 2]. Распределение скорости задается ее годографом в плоскости функции Мичела — Жуковского $\omega = \ln \bar{V} = \ln V - i\alpha$ или на границе канонической области в плоскости параметрической переменной u . В заданной области по особенностям строится производная dW/du комплексного потенциала $W = \phi + i\psi$ и течение в физической плоскости $z = x + iy$ восстанавливается квадратурой $dz = e^{-\omega} dW/du du$. При задании годографа скорости $\omega = u$; в более общем случае $\omega(u)$ выражается интегралом Шварца. Приводимые ниже примеры, имеющие прикладное значение, показывают, что возможности методов теории струй в данном аспекте еще далеко не исчерпаны.

Для построения расширяющихся каналов, крыловых профилей и решеток турбомашин, когда уменьшения по потоку скорости на границах избежать невозможно, рекомендованы гидродинамически целесообразные распределения скорости $V(s)$ на границах или на контуре канонической области с участками постоянных скоростей и одним или двумя участками замедляющегося пограничного слоя с предотрывными значениями dV/ds , которые в рамках метода Кочина — Лойцянского [3] обеспечивают безотрывное обтекание в каждой точке границы. Такие распределения скорости ранее были использованы для построения (другими способами) решеток турбомашин [4] и крыловых профилей [5].

Примеры ограничены плоским потоком несжимаемой жидкости. Однако во многих случаях построенные контуры можно непосредственно использовать для неплоского двумерного (в частности, осесимметричного) потока газа при сохранении безотрывного течения. Все примеры просто обобщаются на дозвуковое течение газа в приближении Чаплыгина [1, 4, 6]. Указанные точные связи основных параметров через законы сохранения для течения в целом при добавлении уравнения состояния справедливы и для сжимаемой жидкости [4, 6]. Проведенные расчеты могут оказаться полезными для получения исходных приближений в некоторых численно-аналитических методах расчета двумерных течений газа.

1. Вход в прямой канал AC (фиг. 1) в плоскости z образован полубесконечной прямой стенкой AB , проходящей под углом α_0 к оси канала, и кривой BC с постоянной на ней скоростью $V = V_0 = 1$. Асимптотически ($x \rightarrow \infty$) канал имеет полуширину $h = 1$. Это плоское течение невязкой несжимаемой жидкости конформно отображается на полуполосу $ABCA$ плоскости $\omega = \ln V - i\alpha$. Продолжая



Фиг. 1

аналитически $W(\omega)$ через прямые $\psi = \text{const}$ на всю плоскость ω , видим, что $W(\omega)$ есть комплексный потенциал решетки стоков интенсивности $Q=4$ с периодом $2i\alpha_0$, поэтому

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha_0} \text{cth} \frac{\pi}{2\alpha_0} \omega, \quad z = \int e^{-\omega} \frac{dW}{d\omega} d\omega = -\frac{1}{\alpha_0} \int e^{-\omega} \text{cth} \frac{\pi}{2\alpha_0} \omega d\omega$$

Интеграл в общем случае выражается через неполные β -функции, в частных случаях — через элементарные. При $\alpha_0 = \pi$ (Гельмгольц, 1868 г.) и $\pi/2$ координаты кривой BC ($\omega = -i\alpha$, $x_b = y_b = 0$) имеют выражение

$$\alpha_0 = \pi: x = \frac{-1}{\pi} \left(1 + \cos \alpha + 2 \ln \sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad y = 1 - \frac{\alpha + \sin \alpha}{\pi}$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}: x = -\frac{2}{\pi} \left(\cos \alpha + \ln \text{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right), \quad y = \frac{2}{\pi} (1 - \sin \alpha)$$

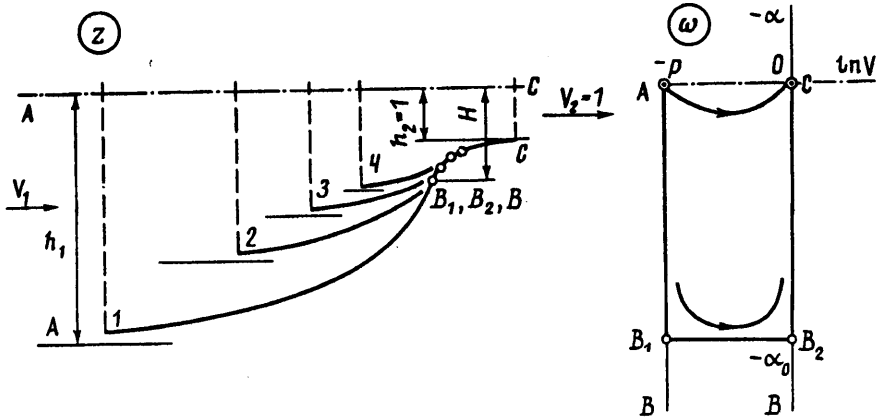
Если $\alpha_0 \rightarrow \infty$, вокруг точки B возникает бесконечнолистный завиток по sic -спирали, как в известной из теории струй первой кавитационной схеме Тулина, $x = -2/\pi \text{ci} \alpha$, $y = -2/\pi \text{si} \alpha$. По мере приближения к точке C ($x \rightarrow \infty$) векторы скорости в канале выравниваются, имея отклонения $\Delta\alpha = \Delta \ln V = \Delta V + O(\Delta V^2) \rightarrow 0$. На фиг. 1 контуры каналов с $\alpha_0 = \pi/4, \pi/2, \pi, \infty$ совмещены по сечениям, изображенным штриховой прямой, с равными $\Delta\alpha = \Delta V = 0,05$. При удалении от точек B границы сливаются в одну кривую, отстоящую от асимптоты на $\Delta y \approx 2\alpha/\pi \sim \exp(-\pi x/2)$.

При $\alpha_0 = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$) расстояния H прямой AB до оси канала одинаковы, $H = 2h = 2$. Это следует как из написанных формул, так и из теоремы импульсов в проекции на ось x и интеграла Бернулли

$$p^*H = p_0H + \rho V_0^2 h, \quad \frac{p^*}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

что дает известное сужение струи $h = H/2$ в насадке Борда. В потоке газа это сужение зависит от числа Маха [6].

2. Сужающийся канал (конфузор) с прямой осью AC (фиг. 2) ограничен кривой AB с постоянной скоростью $V_1 = 1$, отрезком B_1B_2 прямой, проходящей под углом α_0 (в примерах фиг. 2 этот отрезок по малости не показан), и кривой B_2C с постоянной скоростью $V_2 = 1$. Асимптоты этих кривых проходят на расстояниях от оси канала соответственно $h_1 = 1/V_2$ и $h_2 = 1$. В плоскости ω течению отвечает прямоугольник AB_1B_2C , в котором $W(\omega)$ имеет источник и сток интенсивностью $Q = 4$ в точках $\omega = \ln V_1 = -\rho$ и $\omega = 0$. Во всей плоскости



Фиг. 2

ω функция $dW/d\omega$ — эллиптическая с периодами $2p$ и $2i\alpha_0$. Для использования \wp -функций с общепринятой нормировкой квазипериодов $\tau_1 = \pi$ и $\tau_2 = \pi\tau$ надо перейти к переменной $u = \pi/(2p)\omega$, $\tau = i\alpha_0/p$; тогда функция dW/du , имеющая в точках $u = -\pi/2$ и $u = 0$ простые полюсы, а в точках $\omega = \pi\tau/2$ и $\omega = -\pi/2 - \pi\tau/2$ простые нули, принимает вид (см. [2, с. 91—93])

$$\frac{dW}{du} = -\frac{2}{\pi} \frac{\wp_3(u) \wp_4(u)}{\wp_1(u) \wp_2(u)} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{d}{du} \ln \wp_1(u) + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{du} \ln \wp_2(u) \right) = \frac{2}{\pi} (-\operatorname{ctg} u - 4S_1 - \operatorname{tg} u + 4S_2)$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} q^{2n} \sin 2nu$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin 2nu, \quad q = e^{\pi\tau}$$

Реально $V_1 > 0,2$, $\alpha \leq \alpha_0 \sim \pi/2$ и $q^2 = -\exp(-\pi^2/(2p)) < 4,7 \cdot 10^{-2}$. С такой погрешностью можно принять

$$\frac{dW}{d\omega} = -\frac{2}{\pi} (\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} u) = -\frac{1}{p} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p} \omega + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \omega \right) = -\frac{2}{p \sin(\pi\omega/p)}$$

Принятое выражение $dW/d\omega$ точно при $\alpha_0 = \infty$, области годографа ABC в виде полуполосы с двойной решеткой источников и стоков вдоль действительной оси плоскости ω . В плоскости z при этом получается двойной спиральный завиток вокруг точки B (как во второй кавитационной схеме Тулина).

Возьмем точку B за начало координат и выразим их для кривой BC , вдоль которой $\omega = -i\alpha$, $\infty > \alpha_m > \alpha > 0$

$$z_{bc} = -\frac{2}{\pi} \int_{\infty}^{\alpha} \frac{e^{\alpha} d\alpha}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/p)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{bm} \\ y_{bm} \end{bmatrix} \approx \frac{4e^{-\pi\alpha_m/p}}{\pi^2 + p^2} \left(\pi \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha_m \mp p \begin{bmatrix} \sin \\ \cos \end{bmatrix} \alpha_m \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_{mc} \\ y_{mc} \end{bmatrix} = -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_m}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \frac{d\alpha}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/p)}$$

На кривой BA $\omega = -p - i\alpha$, $e^{-\omega} = e^{p-i\alpha}/V_1$, $z_{ba} = z_{bc}/V_1$ и она отличается от кривой BC только масштабом и положением. Логарифмический завиток в точке B ($\alpha > \alpha_m \sim \pi/2$) пренебрежимо мал и показан на фиг. 2 точками 1—4 для принятых значений $V_1 = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$.

Расстояние H точки B от оси канала можно вычислить в конечном виде

$$H = 1 + y_{bc} \Big|_{\alpha=0} = 1 - \frac{2}{p} \int_0^{\alpha} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/p)} = 1 + \frac{2}{p} \frac{\pi}{2\pi/p} \operatorname{th} \frac{\pi}{2\pi/p} = \frac{2}{V_1 + 1}$$

Аналогично разд. 1 это расстояние можно найти алгебраически из уравнений сохранения

$$p_1 H_1 + \rho h_1 V_1^2 = p_2 H + \rho h_2 V_2^2, \quad h_1 V_1 = h_2 V_2, \quad \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$H = \frac{2h_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

Если контуры каналов, построенные в разд. 1 и 2, использовать для осесимметричного потока газа, то скорость на их стенках будет уже не кусочно-постоянной, а только монотонно возрастать. При точном (численном) построении таких каналов со скоростью газа на BC , равной критической, согласно известной теореме Овсянникова, в выходном сечении канала на конечном расстоянии расположится прямая (плоскость) перехода через скорость звука, за которой можно строить сверхзвуковое сопло.

3. Изогнутый канал (патрубок) $ABCD$ для поворота потока на заданный угол α_0 (в примерах на фиг. 3 $\alpha_0 = \pi$) при условии некоторого увеличения скорости $V_2 > V_1$ тоже можно построить с кусочно-постоянной и только увеличивающейся скоростью на границах.

Внутренняя стенка ADC патрубка начинается отрезком прямой AD , $\alpha_1 = 0$, на которой скорость возрастает от $V_1 = 1$ до V_2 и сохраняется постоянной вдоль кривой DC . На внешней стенке ABC скорость $V = V_1$ до точки B , после которой возрастает вдоль прямой BC , $\alpha_2 = \alpha_0$, до V_2 . Ширины канала на входе и выходе асимптотически равны соответственно $h_1 = 1$ и $h_2 = h_1/V_2 < 1$. В плоскости ω течению в патрубке отвечает прямоугольник $ABCD$ с источником и стоком $W(\omega)$ интенсивности $Q = 4$ в точках A и C . Эллиптическая функция $dW/d\omega$ имеет периоды $2 \ln V_2 = 2p$ и $2i\alpha_0$, простые полюсы в точках A и C и простые нули в точках B и D . Переходя к плоскости $u = \pi/(2p)\omega$ ($\tau = i\alpha_0/p$), получим

$$\frac{dW}{du} = -\frac{2}{\pi} \frac{\vartheta_2(u) \vartheta_4(u)}{\vartheta_1(u) \vartheta_3(u)} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{du} \ln \vartheta_1(u) - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{du} \ln \vartheta_3(u) \right) = \frac{2}{\pi} (\operatorname{ctg} u + 4S_1 - 4S_3)$$

$$q = e^{\pi\tau} = \exp(-\pi\alpha_0/p)$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - q^{2n})^{-1} q^n \sin 2nu$$

Сумма S_1 уже была написана в разд. 2. Если $\alpha_0 = \pi$, $V_2 < e$ и $\alpha \leq \alpha_0/2 = \pi/2$, то $q < \exp(-\pi^2/2) = 7.2 \cdot 10^{-3}$. Как и в разд. 2, приближенно (но только до $\alpha = \alpha_0/2$) можно принять

$$\frac{dW}{du} = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg} u \quad \text{или} \quad \frac{dW}{d\omega} = \frac{1}{p} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2p} \omega \right)$$

В плоскости ω приближенной формуле соответствует решетка источников, расположенных вдоль действительной оси с шагом $2p = 2 \ln V_2$, переход прямоугольника $ABCD$ в полуполосу $\alpha_0 \rightarrow \infty$ с $dW/d\omega \rightarrow i/p$, а в плоскости z — патрубка AD в бесконечнолистный канал (кольцо) постоянных ширины $R_1 - R_2$ и кривизны. В этом канале $V_1 R_1 = V_2 R_2 = VR$, $Q \equiv 1 = V_1 R_1 \ln(R_1/R_2)$, радиусы кривизны $R_1 = 1/p$, $R_2 = 1/(V_2 p)$, и из условия безотрывного обтекания (максимума расхода Q при заданных V_2 и R_1) $R_1/R_2 \leq e$. (Это условие для плоского течения газа подробно обсуждено в [4].) С ростом α кольцевое течение устанавливается очень быстро. В сечении $A_1 D_1$, изображенном на фиг. 3 пунктиром, имеем

$$\omega = \ln V - i\alpha_*, \quad \frac{dW}{d\omega} \approx \frac{i}{p} \left(1 + 2\varepsilon \exp \left(-\frac{\pi i}{p} \ln V \right) \right)$$

$$\varepsilon = \exp \left(-\frac{\pi \alpha_*}{p} \right)$$

Если допустить отклонение $dW/d\omega$ от постоянной не более чем на 2%, сечение $A_1 D_1$ надо провести при $\alpha_* \geq 1,5p$. С указанной ошибкой соответствующее сечение $A_1 D_1$ патрубка есть отрезок прямой $A_1 D_1 = R_1 - R_2 = (V_2 - 1)/(pV_2)$, проходящей под углом $\pi/2 + \alpha_*$, и точки A_1 и D_1 можно взять за начала координат при построении границ $A_1 A$ ($\omega = -i\alpha$) и $D_1 D$ ($\omega = p - i\alpha$) входа в патрубок, $0 < \alpha \leq \alpha_*$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \int_{\alpha_*}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \operatorname{cth} \frac{\pi \alpha}{2p} d\alpha, \quad \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = \frac{1}{pV_2} \int_{\alpha_*}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \operatorname{th} \frac{\pi \alpha}{2p} d\alpha$$

С учетом симметрии течения в прямоугольнике $ABCD$ на границы выхода из патрубка получаются аналогично. В плоскости ω сечение $B_1 C_1$ отстоит от BC по мнимой оси на то же расстояние α_* ; выражения координат кривых $C_1 C$ и $B_1 B$ отличаются от выражений координат $A_1 A$ и $D_1 D$ только отсчетом угла, знаками и масштабом, $\alpha_0 > \alpha \geq \alpha_0 - \alpha_*$

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \mp \frac{1}{pV_2} \int_{\alpha_0 - \alpha_*}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (\alpha_0 - \alpha) \operatorname{cth} \frac{\pi (\alpha_0 - \alpha)}{2p} d\alpha$$

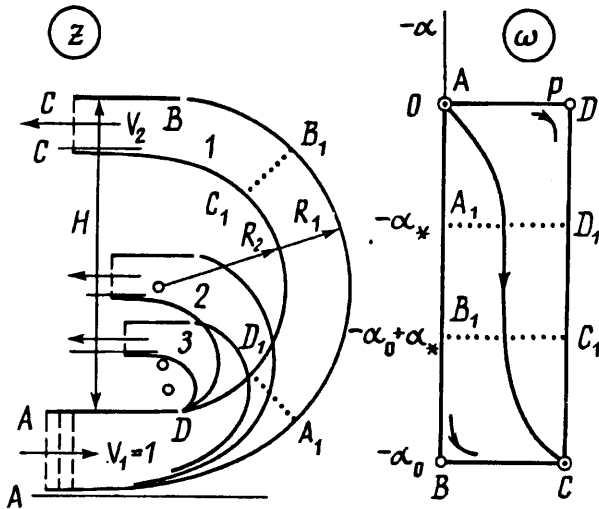
$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \mp \frac{1}{p} \int_{\alpha_0 - \alpha_*}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} (\alpha_0 - \alpha) \operatorname{th} \frac{\pi (\alpha_0 - \alpha)}{2p} d\alpha$$

С принятой точностью вход в патрубок и выход из него строятся независимо и их можно соединять кольцевым каналом $D_1 A_1 B_1 C_1$ с радиусами стенок R_1 и R_2 для любого угла α_0 поворота, не меньшего $2\alpha_*$ (когда сечения $A_1 D$ и $B_1 C_1$ совпадают). В примерах фиг. 3 ($V_2 = 3/2, 2, e$, кривые 1—3) это условие соблюдено, так как $2\alpha_* = 3 \ln V_2 \leq 1,2-3 < \alpha_0 = \pi$. При необходимости уточнить построение расчеты надо проводить от среднего сечения ($\alpha = \alpha_0/2$) с учетом необходимого числа членов рядов S_1 и S_3 .

Для общей оценки погрешности построения полезно сравнить получающееся при $\alpha_0 = \pi$ расстояние H между прямыми AD и BC с точным, которое легко найти из законов сохранения

$$H = \frac{2h_1 V_1}{V_2 - V_1} = \frac{2}{V_2 - 1}, \quad (\rho V_1^2 + p_1) h_1 + (\rho V_2^2 + p_2) h_2 = p_1 (H + h_1) - p_2 (H - h_2)$$

$$h_1 V_1 + h_2 V_2, \quad \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$



Фиг. 3

4. Закручивающий канал (входная «улитка» компрессора, центростремительной турбины или какого-либо вихревого устройства) может быть выполнен с постоянной скоростью на всей границе. В улитку (фиг. 4) входит однородный поток со скоростью $V_1 = 1$ и расходом $Q = 1$ ($h_1 = 1$), отрывается от стенки в точке заострения K и поступает в вихресток интенсивности $\Gamma - iQ$ в точке $z = 0$, $W = (\Gamma - iQ)/(2\pi i) \ln z$ с углом закрутки $\gamma = \text{arctg}(\Gamma/Q) > 0$. В данном примере удобно воспользоваться годографом скорости $\bar{V} = Ve^{-\kappa}$, область которого есть внешность единичной окружности $|\bar{V}| \geq 1$. Во всей плоскости \bar{V} производная $dW/d\bar{V}$ имеет простые полюсы в точках $\bar{V} = 0$ и 1

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\bar{V}} &= \frac{-\Gamma - iQ}{2\pi i\bar{V}} + \frac{Q}{\pi(\bar{V} - 1)} = -\frac{\text{tg } \gamma + i}{2\pi i\bar{V}} + \frac{1}{\pi(\bar{V} - 1)} = \\ &= -\frac{e^{-\eta}}{2\pi\bar{V} \cos \gamma} + \frac{1}{\pi(\bar{V} - 1)} \end{aligned}$$

В точке K схода потока $dW/d\bar{V} = 0$ и $\alpha = \alpha_k = \pi + 2\gamma$, $\bar{V} = \bar{V}_k = -e^{-2\eta}$. В данном примере комплексная координата получает простое конечное выражение

$$z = \int \frac{1}{\bar{V}} \frac{dW}{d\bar{V}} d\bar{V} = \frac{e^{-\eta}}{2\pi\bar{V} \cos \gamma} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\bar{V} - 1}{\bar{V}} + \text{const}$$

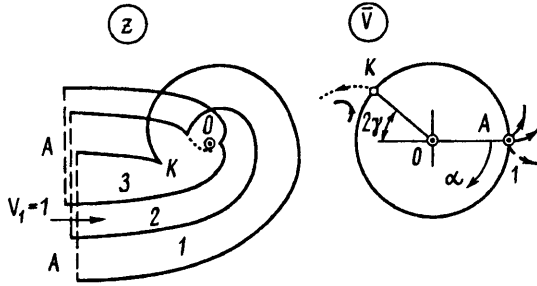
Координаты контура, на котором $\bar{V} = e^{-\kappa}$, точек схода $\alpha = \alpha_k$ и сечения входа с $\Delta\alpha \approx \Delta V$

$$x = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} + 2 \ln \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right), \quad y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma} + \alpha - \pi \right)$$

$$x_k = \frac{1}{2\pi} (-1 + 2 \ln (2 \cos \gamma)), \quad y_k = \frac{1}{2\pi} (-\text{tg } \gamma + 2\gamma)$$

$$x_{\pm} \approx \frac{1}{2\pi} (1 + 2 \ln \Delta\alpha), \quad y_{\pm} = \frac{1}{2\pi} (-\text{tg } \Delta\alpha \pm \pi)$$

Середина входа $y_{1m} = 1/2 (y_{1+} + y_{1-}) = -(\text{tg } \gamma)/(2\pi) = -\Gamma/(2\pi)$ удовлетворяет условию равенства моментов количества движения относительно $z = 0$ входящего потока ($V_1 Q y_{1m}$) и вихресточка ($\Gamma Q/(2\pi)$). На фиг. 4 показаны контуры улитки



Фиг. 4

при $\gamma = 75, 60, 0^\circ$ (кривые 1—3), которые существенно отличаются от обычно применяемой архимедовой спирали.

Не представляет большого труда построить аналогичные улитки не с одним, а с n одинаковыми каналами, расположенными под углом $2\pi/n$

$$\frac{dW}{d\bar{V}} = -\frac{e^{-\eta}}{2\pi\bar{V}} + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\bar{V} - e^{2k\pi i/n}}$$

$$z = \frac{e^{-\eta}}{2\pi\bar{V} \cos \gamma} + \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k\pi i/n} \ln \frac{\bar{V} - e^{2k\pi i/n}}{\bar{V}}$$

Обращенный поток дает раскручивающие каналы тоже с постоянной скоростью на стенках, равной скорости выхода. Однако на практике условие их безотрывного обтекания будут нарушать неоднородность входящего потока и отрыв пограничного слоя на плоских боковых ограничивающих стенках.

5. Расширяющийся канал (диффузор) $ABKC$ (фиг. 5) с отбором потока имеет на стенках только постоянные скорости $V = V_1$ на AB и $V = V_2 < V_1$ на BK и KC . Расход через диффузор $Q = V_1 h_1 = V_2 h_2 + q = 1$, где $q < 1$ — отбор в канал KB с постоянными скоростями на стенках, переходящий в бесконечнолистный кольцевой канал постоянных ширины $R_2 - R_1$ и кривизны (уже обсужденный в разд. 3) с радиусами кривизн

$$R_1 = \frac{q}{V_1 \ln(V_1/V_2)} = \frac{q}{p}, \quad p = -\ln V_2, \quad R_2 = \frac{R_1}{V_2}$$

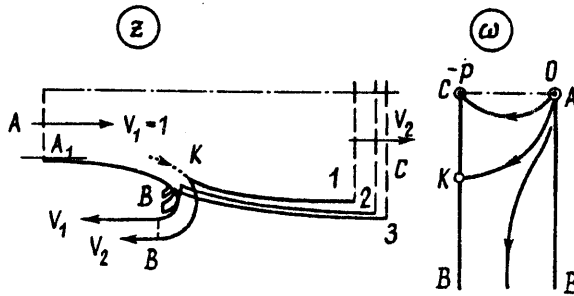
Комплексный потенциал $W(\omega)$ представлен, как в разд. 2, двойной решеткой сточков с периодом $2p$, поэтому

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{1}{p} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p} \omega + (1 - q) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \omega \right),$$

$$z = \frac{1}{p} \int e^{-\omega} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2p} \omega + (1 - q) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \omega \right) d\omega$$

В точке разветвления K из условия $dW/d\omega = 0$ $\alpha_k = -\operatorname{arth} \sqrt{1 - q}$. Координаты дуги AB , на которой $\omega = -i\alpha$ ($\alpha < 0$), будем отсчитывать от точки A_1 с заданной неравномерностью $\Delta\alpha \approx \Delta V$ (эта точка расположена на расстоянии $1 + 2/\pi \Delta\alpha$ от оси канала)

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \int_{\Delta\alpha}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \left(\operatorname{cth} \frac{\pi}{2p} \alpha - (1 - q) \operatorname{th} \frac{\pi}{2p} \alpha \right) d\alpha$$



Фиг. 5

При $\alpha = -\pi$ перейдем на другую сторону канала KB , уменьшив $y < 0$ на $R_2 - R_1 = (1 - V_2) q / (pV_2)$ (погрешность этого имеет порядок $2e^{-x^2/(2p)}$), и определим координаты дуги BKC

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \frac{1}{pV_2} \int_{-\pi}^{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2p} \alpha - (1 - q) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2p} \alpha \right) d\alpha$$

На фиг. 5 показаны контуры диффузоров с $V_2 = 0,5$ и $q = 0,2; 0,1; 0,05$ (кривые 1—3).

Рассмотренные диффузоры обеспечивают безотрывное обтекание стенок AB и BKC за счет постоянства скоростей; в потоке вязкой жидкости отбор q должен быть таким, чтобы весь пограничный слой, образовавшийся на стенке A_1B , уходил бы в канал отбора KB . Потери механической энергии, связанные с отбором, можно уменьшить, возвращая отобранную среду на сторону входа. Диффузоры такого типа должны быть особенно эффективны в осесимметричном исполнении ввиду отсутствия вторичных потерь на плоских ограничивающих стенках.

При обращении потока получается конфузор, ускоряющий поток при подаче дополнительной среды через канал BK (например, охлаждающей среды в камеру сгорания). Без этой подачи ($q = 0$) контуры будут совпадать с построенными в разд. 2.

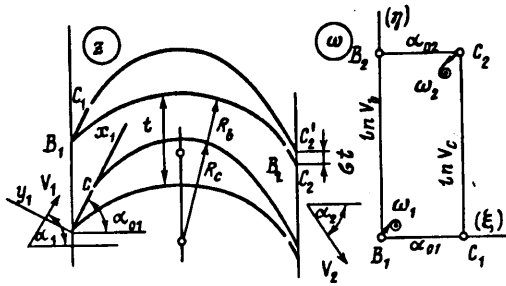
6. Для поворота однородного потока в турбинах, каналах аэродинамических труб и других устройствах используют лопаточные решетки.

Пусть поток с вектором скорости $V_1 e^{i\alpha_1}$ набегае на решетку лопаток, установленных с периодом it , и выходит из нее с вектором скорости $V_2 e^{i\alpha_2}$ (фиг. 6). С учетом конечной толщины выходных кромок лопаток скорости и углы связаны уравнением неравенности

$$tV_1 \cos \alpha_1 = (1 - \sigma) tV_2 \cos \alpha_2, \quad \sigma < 1$$

Если допустить небольшое увеличение скорости $V_2 > V_1$ и бесконечно тонкие входные кромки, можно построить профили лопаток с двумя участками B_1C_1 и B_2C_2 и двумя участками C_1C_2' и B_1B_2 с постоянными скоростями $V_c > V_2$ и $V_b < V_1$. Течение через один период решетки отображается на прямоугольник $B_1C_1C_2B_2$ плоскости ω . В точках $\omega_k = \ln V_k - i\alpha_k$ расположены вихреисточник ($k = 1$) и вихресток ($k = 2$) интенсивности

$$\Gamma_1 + iQ_1 = tV_1 (\sin \alpha_1 + i \cos \alpha_1), \quad \Gamma_2 + iQ_2 = - (1 - \sigma) tV_2 \times \\ \times (\sin \alpha_2 + i \cos \alpha_2)$$



Фиг. 6

В этих точках $dW/d\omega$ имеет простые полюсы. Для получения только возрастающей скорости на прямых участках точки разветвления должны совпадать с точками B_1 и C_2 , и тогда в них будут нули $dW/d\omega$ третьего порядка; еще два простых нуля будут в точках B_2 и C_1 . Приведенных сведений достаточно для построения эллиптической функции $dW/d\omega$ по ее полюсам и нулям. Однако для достаточно больших углов поворота потока можно, как в разд. 3 с указанной там малой погрешностью, заменить прямоугольник двумя полуполосами, т. е. считать, что межлопаточный канал быстро становится каналом постоянных ширины $R_b - R_c$ и кривизны

$$R_c = \frac{tV_1 \cos \alpha_1}{V_c p}, \quad R_b = \frac{R_c V_c}{V_b}, \quad p = \ln \left(\frac{V_c}{V_b} \right)$$

При построении входной части профиля для упрощения формул перейдем к переменной

$$u \equiv \xi + i\eta = \frac{\pi}{2p} (\omega - \omega_{b1}), \quad \omega_{b1} = \ln V_b - i\alpha_{01}, \quad u_{b1} = 0, \quad u_{c1} = \frac{\pi}{2}$$

и, не нарушая общности рассмотрения, примем $t=1$ и $V_1=1$.

В полуполосе $0 \leq \xi \leq \pi/2$, $\eta \geq 0$ вихреисточник расположен в точке $u_1 = a + ib$, $a = \pi/(2p) \ln V_b$, $b = \pi/(2p) (\alpha_{01} - \alpha_1)$, где $\alpha_{01} > \alpha_1$ — наклон отрезка B_1C_1 . В соответствии с указанными выше полюсами и нулями

$$\frac{dW}{du} = N \frac{\sin^3 u \cos u}{\sin(u - u_1) \sin(u + u_1) \sin(u - \bar{u}_1) \sin(u + \bar{u}_1)}$$

Из условия $dW/du \rightarrow (\Gamma_1 + iQ_1)/(2\pi i u)$ при $u \rightarrow 0$ находим постоянную $N = 2/\pi \cos \alpha_1$ и уравнение, связывающее координаты a и b

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \sin 2a \operatorname{sh} 2b + \cos 2a \operatorname{ch} 2b - 1 = 0$$

с положительным корнем $b = 1/2 \ln ((\cos \alpha_1 + \sin 2a)/\cos(\alpha_1 - 2a))$. При заданных α_1 , V_c и V_b по приведенным формулам вычисляем p , N , a , b и $\alpha_{01} = \alpha_1 + 2pb/\pi$. Дальнейшие расчеты сводятся к квадратурам.

На отрезке B_1C_1 $u = \xi \leq \pi/2$, поэтому его длина

$$c = \frac{2N}{V_b} \int_0^{\pi/2} \exp \left(-\frac{2p}{\pi} \xi \right) \frac{\sin 2\xi \sin^2 \xi d\xi}{(\operatorname{ch} 2b - \cos 2(\xi - a)) (\operatorname{ch} 2b - \cos 2(\xi + a))}$$

Кривые $B(u = i\eta)$, $C(u = \pi/2 + i\eta)$ строим в наклонных осях x_1, y_1 ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \end{bmatrix} &= \frac{2N}{V_b} \int_0^\eta \begin{bmatrix} \cos \\ -\sin \end{bmatrix} \left(\frac{2p}{\pi} \eta \right) \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} 2\eta \operatorname{sh}^2 \eta d\eta}{(\operatorname{ch} 2(\eta - b) - \cos 2a)(\operatorname{ch} 2(\eta + b) - \cos 2a)} \\ \begin{bmatrix} x_{1c} - c \\ y_{1c} \end{bmatrix} &= \frac{2N}{V_c} \int_0^\eta \begin{bmatrix} \cos \\ -\sin \end{bmatrix} \left(\frac{2p}{\pi} \eta \right) \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} 2\eta \operatorname{ch}^2 \eta d\eta}{(\operatorname{ch} 2(\eta - b) + \cos 2a)(\operatorname{ch} 2(\eta + b) + \cos 2a)} \end{aligned}$$

При больших $\eta > 1$ кривые B и C с точностью 99% выходят на окружности указанных выше радиусов R_b и R_c .

Выходную часть профиля строим (назад по потоку от точек B_2 и C_2), учитывая квазисимметрию dW/du в прямоугольнике $B_1C_1C_2B_2$. Кривая C ($V = V_c$) начинается в точке C_2' , прямой отрезок C_2B_2 — в точке C_2 , отстоящей от C_2' на расстояние σ вдоль оси y . Если совместить эти точки (или взять σ слишком малой), вблизи выходной кромки появится нереальное самопересечение контура профиля с выходом потока вдоль кривой B на второй лист.

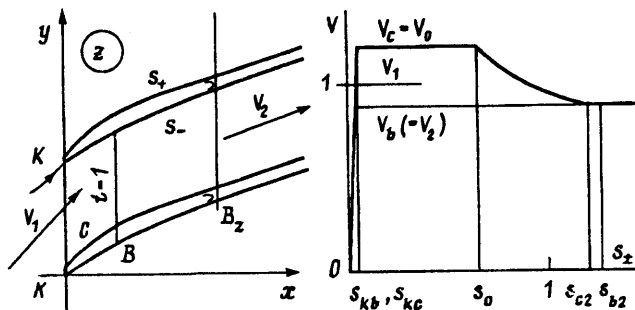
На фиг. 6 приведен пример построения решетки для данных $\alpha_1 = -\alpha_2 = 60^\circ$, $\sigma = 0,15$, $V_c = 1,2$, $V_b = 0,8$. Входная и выходная части профиля совмещены по средней части канала ($\alpha = 0$).

7. При решении более общих обратных задач построения каналов и тел с распределениями скорости, заданными вне пограничных слоев или на контуре канонической области, важно обеспечить безотрывное течение на участках возрастающего давления. Современные численные методы интегрирования уравнений движения вязкой жидкости позволяют достаточно надежно устанавливать появление отрыва в прямых задачах расчета течений с заданными границами, но не дают обобщенных сведений об условиях безотрывного обтекания для постановки обратных задач. Из общих соображений ясно, что эти условия для плоского стационарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости должны иметь вид связи локального числа Рейнольдса по характерному размеру пограничного слоя, например по толщине δ^{**} потери импульса, $Re^{**} = V\delta^{**}/\nu$, безразмерных параметров профиля скорости в набегающем слое, в частности $H = \delta^*/\delta^{**}$ (δ^* — толщина вытеснения), параметров турбулентности внешнего потока и некоторого числа безразмерных производных скорости $d^n V/ds^n (\delta^{**})^n/V$. Уже первые простейшие методы расчета дали оценки условий безотрывного обтекания, которые можно записать в виде ограничения на первую производную скорости набегающего потока [4]

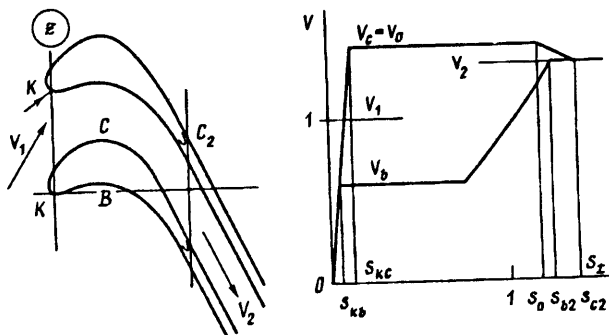
$$-\frac{dV}{ds} \frac{\delta^{**}}{V} \leq B (Re^{**})^{-1/m} \quad (7.1)$$

где для ламинарного слоя $m = 1$, $B = 0,157$ (Польгаузен), $B = 0,068$ (Кочин — Лойцянский); для турбулентного слоя, в согласии с различными экспериментальными данными, $m = 4$, $B = 0,06—0,07$ (Прандтль — Бури), $m = 6$, $B = 0,013—0,020$ (Лойцянский), $m = \infty$, $B = 0,005$ (Бам-Зеликович). В более совершенной теории «обобщенного подобия» условие безотрывного обтекания с ламинарным слоем, согласно рис. 194 и табл. 19 из [3], можно представить в виде

$$-\frac{dV}{ds} \frac{\delta^{**}}{V} + 0,15 \frac{d^2 V}{ds^2} \frac{(\delta^{**})^2}{V} Re^{**} \leq \frac{0,092}{Re^{**}} \quad (7.2)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

В случае турбулентного слоя аналогичных условий пока не известно. Для него условия типа (7.1), (7.2) надо рассматривать как эмпирические, подлежащие уточнению на основе экспериментальных и расчетных исследований.

Для построения профилей решеток турбомашин и крыльев принимаем распределения скорости вида изображенных на фиг. 7 и 8. От критической точки K ($V = 0, s = 0$) скорость возрастает приблизительно линейно до заданных значений $V_0 = V_c > V_1$ ($0 \leq s_+ \leq s_{kc}$) и $V_0 = V_b < V_1$ ($0 \leq s_- \leq s_{kb}$), затем при $s_k \leq s \leq s_0$ скорость сохраняется постоянной и при $s > s_0$ в общем случае монотонно изменяется до скорости схода $V \approx V_2$ с выходных кромок конечной толщины. (Распределение скорости на границе тела вытеснения вблизи выходных кромок и за ними может быть уточнено методами теории отрывных течений [7].) На участках уменьшающейся скорости выполняется условие (7.1) с максимально возможным значением dV/ds . Можно показать, что при заданных $V_1 e^{\alpha_1}$, σ , V_2 (или α_2), V_b и Re и ограничениях $V < V_c$ и (7.1) в форме равенства такое распределение обеспечивает близкую к минимальной скорости диссипации механической энергии в пограничных слоях и поэтому оно было названо гидродинамически целесообразным.

В принятом предотрывном состоянии пограничного слоя на участках повышения давления трение на стенках пренебрежимо мало и из уравня импульсов (Кармана) следует, что $\delta^{**} = (V_0/V)^{2+H} \delta_0^{**}$, где $\delta_0^{**} = \delta^{**}(s_0)$ и $H = 2,8-3,2$. Подставив выражение $\delta^{**}(V)$ в условие (7.1) как равенство, получим дифференциальное уравнение относительно $V(s)$, из которого имеем

$$\frac{V}{V_0} = \left(1 + \frac{B}{n Re_0^{1/m}} \frac{s/s_0 - 1}{(\delta_0^{**}/s_0)^{(m+1)/m}} \right)^{-n}, \quad n = \frac{m}{(2+H)(m+1) - 1}$$

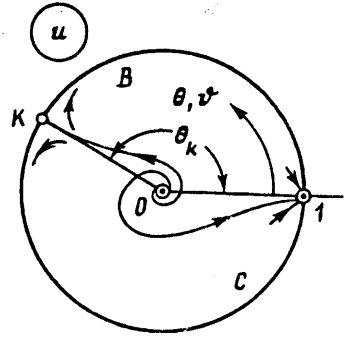
$$Re_0 = \frac{V_0 s_0}{\nu}$$

Для турбулентного слоя при реальных $Re_0^{**} \geq 10^4$ и наиболее надежных значениях $m = 6$, $B = 0,013$, $H = 2,8$

$$\frac{V}{V_0} = \left(1 + \frac{0,0706 (s/s_0 - 1)}{Re_0^{1/6} (\delta_0^{**}/s_0)^{7/6}} \right)^{-0,184}$$

Определяя с некоторым запасом начальную толщину δ_0^{**} по формуле $\delta_0^{**} = 0,036 Re_0^{-1/5}$ (как для пластинки с полностью турбулентным слоем и $V = V_0$), получим

$$V/V_0 = (1 + 3,4 Re_0^{0,0667} (s/s_0 - 1))^{-0,184} \quad (7.3)$$



Фиг. 9

Внешний потенциальный поток обтекает решетку полутел вытеснения (фиг. 7 и 8), которые с достаточной точностью можно считать совпадающими с безотрывно обтекаемой частью профилей и за ними — с полосками шириной $\sigma t \cos \alpha_2$, на границах которых $V = V_2$. Течение в одном периоде решетки полутел отобразим из плоскости z на единичный круг $|u| \leq 1$ с переходом $z = \pm \infty$ соответственно в точки $u = 1$ и 0 (фиг. 9). В этом круге и на окружности

$$W(u) \equiv \varphi + i\psi = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln u - \frac{Q}{\pi} \ln(u - 1)$$

$$\Gamma = tV_1 \sin \alpha_1, \quad Q = tV_1 \cos \alpha_1 = (1 - \sigma) tV_2 \cos \alpha_2$$

$$u = e^{i\theta}: \quad \varphi(\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{Q}{\pi} \ln \sin \frac{\theta}{2}, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{tV_1 \cos(\alpha_1 + \theta/2)}{2\pi \sin(\theta/2)}$$

В критической точке K ($s = 0$, $d\varphi/d\theta = 0$) $\theta_k = \pi - 2\alpha_1$.

Описанное выше распределение скорости удобнее задавать в функции не дуги s профиля, а угла θ , однозначно связанного с s равенством потенциалов $\varphi = \varphi(\theta)$. При этом распределение (7.3) надо использовать в зависимости от φ

$$\frac{V}{V_0} = \left(1 + 2,77 Re_0^{0,0667} \frac{\varphi - \varphi_0}{s_0 V_0} \right)^{-0,225}, \quad s_0 = \int_{\theta_k}^{\theta_0} \frac{1}{V} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta$$

и учитывать соотношение

$$\varphi_{c2} - \varphi_{b2} = tV_1 \sin \alpha_1 - (1 - \sigma) tV_2 \sin \alpha_2$$

Для заданного распределения $V = V(\theta)$ из интеграла Шварца следуют выражение угла наклона вектора скорости на контуре тела вытеснения, а также условия, которым должно удовлетворять задаваемое распределение $V(\theta)$

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{V(\vartheta)}{V(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \theta}{2} d\vartheta + \alpha_1$$

$$\ln V_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln V d\theta, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{V}{V_2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \alpha_1 \quad (7.4)$$

Свободными параметрами функции служат длины «полок» с $V = V_c$ и $V = V_b$, а также наклон $V(\theta)$ в окрестности $\theta = \theta_k$. Полагая при $\theta_{kb} < \theta < \theta_{kc}$ $V = k|\theta - \theta_k|$ и принимая приближенно $V(\theta > \theta_{kc}) = V_c$, $V(\theta < \theta_{kb}) = V_b$ (это достаточно точно для реальных решеток), из первого условия (7.4) находим

$$k = \frac{(V_b + V_c)/V_1}{(\pi - 2\alpha_1) \ln(V_b/V_1) + (\pi + 2\alpha_1) \ln(V_c/V_1)}$$

Теперь удовлетворение второго условия трудностей не представляет. После определения $\alpha(\theta)$ координаты контура тела вытеснения выражаются квадратурой

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{tV_1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{1}{V} \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \alpha \frac{\cos(\alpha_1 + \theta/2)}{\sin(\theta/2)} d\theta$$

Возможное небольшое несовпадение по x конечных точек B_2 и C_2 профилей значения не имеет; тело вытеснения надо обрезать по $\max(x_{b2}, x_{c2})$. Строго говоря, для получения контура профиля надо еще рассчитать на нем пограничный слой и утоньшить тело вытеснения по нормальям к нему на δ^* , однако практически ввиду малости δ^* этого можно не делать.

Вычисление интегралов затрудняет экспоненциальное возрастание $ds/d\theta$ с приближением к $\theta = 0$. Расчеты производились с заменой переменной $\theta = 1/(2\pi) e^T/(e^T + 1)$ и с учетом особенностей подынтегральных функций при $\theta = 0$ и $V = 0$.

На фиг. 7 и 8 приведены примеры построения решеток с данными $V_1 = 1$, $t = 1$, $\sigma = 0,1$, $Re_0 = 10^5$; $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$, $V_c = 1,2$, $V_b = V_2 = 0,836$ (фиг. 7) и $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = -65^\circ$, $V_c = 1,1$, $V_2 = 1,446$, $V_b = 0,6$ (фиг. 8).

Автор выражает признательность С. И. Чернышенко за разработку программ построения решеток и проведение расчетов, а также Г. С. Самойловичу, предложившему изложить методику профилирования решеток в его книге [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
5. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики//Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Мех. жидкости и газа. Т. 23. М., 1989. С. 3—115.
6. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
7. Гогши Л. В., Степанов Г. Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990. 384 с.
8. Самойлович Г. С. Газодинамика. М.: Машиностроение, 1990. 384 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.I.1993